

P. GREGORII A S^to VINCENTIO OPVS GEOMETRICVM QVADRATVRÆ CIRCVLI ET SECTIONVM CONI

Decem libris comprehenſum.





DOMVI
AVSTRIACAE
SEMPER AVGVSTÆ.



Ate veniam, Auguſti Principes, ſi ad Voluminum meorum frontem Veſtras columnas transferre, & meis lucubrationibus Veſtrum PLVS VLTRA adſcribere auſus ſum. Non tam ſum arrogans vt arbitrer ad Matheſeos apicem ita me perueniſſe, quemadmodum Vos ſtatutas Herculi metas prætergreſsi, extremos gloriæ mundique terminos attigiſtis. Verùm cùm à benignitate Veſtra tutelam, à nominis ſplendore lucem peterem, conſilium fuit ijs columnis, quæ magnam mundi partem ſuſtentant, operis mei limen fulcire, & ſcriptoribus ſtimulo eſſe, vt in ſapientiæ regno nullas ſibi metas poſitas rati, ſcientiarum quàm latiſsimè fines propagent: quiq; Mathematicas colunt diſciplinas, vt vltrà quàm meis ego vigilijs eniti potui, ſuis ipſi laboribus contendant. Quod ſi cui aliquouſque progreſſus videbor, & in reperiendâ circuli quadraturâ ceteris ante me felicior fuiſſe; non tam mihi gratulabor quia repererim, quod alius nemo; quàm opto, vt, dum Vobis offero, quod alius nemini, ſingularis id obſeruantiæ argumentum permittatis eſ-

ſe. Sunt ea Auſtriacorum Principum in familiam noſtram merita, vt ijs agnoſcendis nulla gratia par, teſtandis omnis conatus ſuperuacaneus ſit : Neque aliam beneficentia Veſtra, quàm ſit ipſamet ſibi, repoſcit mercedem. Quemadmodùm tamen flumina in mare, vnde ortum habent, redire non ideò deſinunt, quòd illius immenſitatem ſuo non augeant affluxu, ita tametſi magnitudini Veſtræ noſtris nihil ſtudijs poſsit accedere, adeò tamen effuſam benignitatem quâ poſſumus animi teſtificatione non proſequi nefas ſit. Quò ſi faciant tot ingeniorum, quæ per Vos Societas alit, conſecrata nomini Veſtro monumenta; quod eidem ego L. M.Q. dedico, vtinam & inter ea locum, & apud Vos fauoris aliquid atque approbationis reperiat! Regi quidem Hieroni ſcio nihil dicaturum fuiſſe libentiùs Archimedem, quàm dimetiendi quadrandíque circuli rationem, neque impotentiore vnquam lætitiâ ſuum εὕρηκα, quàm hâc repertâ ingeminaturum fuiſſe; verùm quod tantò auguſtiore nomine inſigniatur; &, tanquam vobis non indignum, Auſtriacum vocetur, quanto interuallo illius vota vt ſuperet, neceſſe eſt? Nominis Veſtri menſuram nemo expleat præter Vos. Sed ſtudij & obſeruantiæ, non ambitionis fuit, digeſtum à me problema Auſtriacum vocare. Et dominorum liberti, & patronorum clientes ſibi induunt nomina. Nec quidquam tutius quàm quod Regio nomine ſignóue munitur. In arduo poſita atque inacceſſa eſt Veſtra gloria. Sed facilis ad benignitatem patet aditus

tus

tus. Propterea potentes estis, vt benefici sitis. Propterea latissimè regnatis, vt complectamini quamplurimos. Non ad pauciores patrocinium, quàm imperium extenditis. Quid quod Catholicum nomen Vestris quoque columnis impositum sit, nec nisi his deiectis illius casum, qui Ecclesiam in vobis oppugnant, hæretici sperent? At si familiarum firmamentum religio est, mutuamque suis defensoribus præstat tutelam; dum prima illius cura erit, quidni sitis æternitatis securi? Nihil in humanis stabile, nec rarò Dominos mutauit orbis. Vt traiectos per quadrum radios in orbem deducens *Quadrata rotundis mutat* Sol, ita prospera aduersis, ima summis inuertere gaudet interdum, per quam Reges regnant, prouidentia; sed & quomodo si vice versâ rotunda quadratis mutes, globumque in cubum formes, suam ei mobilitatem adimas; ita instabilem regnorum potentiam pietatis ac religionis studium firmat. Christiani conditor Imperij Constanstinus quadratæ aræ mundi globum imposuit, professus orbis Imperium non tam viribus, quàm sacrorum cultu niti; neque tam ab armis, quàm ab aris regnorum petendam tranquillitatem. Redactus ad quadrum globus operis mei argumentum est; sit & Vestræ felicitatis omen: quà modo caret ac termino Vestram magnitudinem exhibet, quà stellis inocciduis eum insigniui, gloriam motus inter ac turbas non occubituram repræsentet: vtque rotunda quadrando suam illi volubilitatem ademi, ita fortunæ

in

inconſtantiam Veſtra virtus & religio coerceat, ſalutemque ac pacem populorum in laudem ſuam vertat. Ita vouet

NOMINI VESTRO

æternùm deuota

SOCIETAS IESV FLANDRO-BELGICA:

Cuius ego minimus Gregorius à Sancto Vincentio.

SERE.

SERENISSIMO

LEOPOLDO VVILHELMO

ARCHIDVCI AVSTRIÆ, DVCI BVRGVNDIÆ, &c.

BELGII ET BVRGVNDIÆ PRO REGE CATHOLICO

GVBERNATORI, &c.

ORDINIS TEVTONICI

SVPREMO PRÆFECTO, &c.



Vſtriaco nomini conſecratum opus ad Te, SERENISS. LEOPOLDE defero, qui Auguſtæ Domûs pars magna cùm ſis, totam nobis repræſentas. Duabus ea ſtirpibus cælo ſe attollens, Ferdinandum III. & Philippum IV. capita habet. Illo Germania potitur, hoc Hiſpania: vtrumque in Te agnoſcit Belgica. Alterius in Fratre genium, alterius in Vicario poteſtatem veneratur: dubium vtri plus obſtricta, illíne quòd carere Te ſuſtineat, an huic quòd habere contendat. Erat aliquot abhinc annis quòd gaude-

b ret

ret vnico Regis ſui Fratre dignam ſe æſtimari. Quod nunc Cæſari tam cara ſit, vt & vnicum ſuum ipſe concedat, quomodo vel inter miſerias ſuas non beatam ſe putet? hoc magis, quòd reparandis Imperij rebus admotus, & fraternis exercitibus præfectus Belgis dari non potueris, quin Germanis eripereris. At, ſi regionem, non virtutis campum mutaſti. In Belgio Germaniam reperturus es, hoc eſt, Prouinciam prudentiæ, magnanimitati, vigilantiæ Tuæ parem. Duris exercitus ad nihilò molliora veniſti. Sed ad hæc & natura Te aptauit, & virtus inſtruxit. Suæ ſint alijs deliciæ. Tibi pro quiete labor eſt, pro aulæ commodis puluis & campus, pro oblectamento equus & arma. Quid quod, quantum Tibi, quantum iis, per quos Te habemus, debeamus, minùs conſtaret, ſi ad feliciores veniſſes? Non peritiam modò medici, ſed & beneficium morbi commendant. Tibi quoque optabilius Belgas beatos facere, quàm reperire. Vti ſoſpitatem nobis dulciorem antecedens calamitas, ita illuſtriores triumphos Tuos præteritæ clades facient. Quis eum citò diem det, quo, quos deſiderio Tui veniens compleuiſti, pleno lætitiæ fructu victor exſaties! quo, conuerſis aliò belli calamitatibus, priſtinus Prouinciarum decor, vbi pace non licet, ibi victorijs refloreſcat! cœpit à Serenitate Tua ea Belgis lux affulgere: neque ſuas tantùm in Te collocant, ſed & Hiſpaniæ Germaniæq; ſpes Tibi credunt commiſſas. Experire viciſsim Tu quales gubernandos ſuſceperis,

ceperis : Deoque, cuius TIMORE gloriaris, propitio in curanda Belgij ſalute regionum multarum regnorumque rem gere.

SERENITATIS TVÆ

minimus Cliens

GREGORIVS A SANCTO VINCENTIO

Societatis IESV.

PRÆFATIO
AD BENEVOLVM
LECTOREM.

*Ogitanti mihi perſæpè quid cauſſæ eſſet, quod retrò tot actis ſæculis, problematis de quadrando circulo, quam nunc inueſtigamus, ſolutio, à tot magnis præclariſque viris nequidquam tentata, necdum expedita ſit, facemque ipſo præferente Archimede, nihilominus ſuis adhuc tenebris inuoluta permanſerit; illud præcipuè occurrit, lumen quod ab antiquis nobis tradita Geometria exhibebat, nimis debile eſſe, quàm vt tam intricatæ rei perueſtigandæ ſufficeret. Id ſanè præterquam quod aſtruerent tantorum virorum, quot hactenus Geometria eduxit, indefatigabiles quidem, vani tamen labores, Archimedæa certè Spiralis, & Pappi Quadratrix idipſum euincere mihi viſa ſunt. Vt quid enim deſertâ Geometriæ tritâ ſemitâ, aliam ipſi planè viam ingrederentur viri in Geometricis acutiſſimi, ſi hâc quæ omnibus patet, quæque omnium veſtigiis teritur, ad optatum finem duci ſe poſſe exſtimaſſent? Adde quod à præclaris hoc æuo viris factum video, vt, dum ad idem problema ſoluendum ſe accingunt, veteri relictâ, nouam ſibi Geometriæ formam effinxerint, & per præruptos calles quos ſuo ſibi marte aperuerunt, eniti eò conati ſint, quò alios tendere quidem ſemper, numquam tamen peruenturos videbant. Hæc mihi ſeriò conſideranti, idem profectò in mentem venit aggredi, quod ab aliis ſummâ cum laude videbam attentatum: illudque Poëtæ præſertim animos dabat:*

Eſſe aliquò prodire tenus, ſi non datur vltra.

Ad nouas itaque artes, nouaque inuenta animos ſtudiaque conuerti; nihilque non tentatum reliqui, donec non produſſe tantùm penetraſſeque hunc montem aliquouſque, ſed metas ipſas (abſit verbo inuidia) attigiſſe nobis viſi ſumus.

Atque vt aliquam hîc itinerum meorum rationem, ambageſque quas, dum in incertum erro, percurri aperiam, primò Archimedis exemplo inductus, difficultatem hanc in aliam haud paullò difficiliorem, Spiralis inquam contingentē, conieci. quod dum ago, impenſiuſque diu Spiralis contemplationi inſiſto, admirorque quæ contingentem Spiralis inter & Circuli quadraturam ſit connexio, ecce tibi aliud planè in mentem incidit, mira ſcilicet ſymbolizatio concordiaque Spiralis cum Parabolâ. quam dum proſequor, oſtendo Spiralem inuolutam eſſe Parabolam, & viciſſim Parabolam non niſi Spiralem eſſe euolutam. Romam, vt mox aperiam, poſtmodum euocatus, rem hanc cum P. Chriſtophoro Grienbergero, acutiſſimo ſanè in Mathematicis viro, totaque tum Italiâ celeberrimo, aliiſque contuli: à quibus cùm fortè rogarem, num ſymbolizatio hæc Archimedi fortaſſis nota occaſionem ſuggeſſiſſet Spiralem ad Circuli quadraturam tam admirabili artificio applicandi, non eiuſmodi eſſe inuentum affirmabant illi, quod ab Archimede, ſi ei innotuiſſet, vllo modo celandum fuiſſe crederent. Æquus Lector ſtatuet quid ſit de re, cùm ea quæ libro de Hyperbola ſubiunxi, peruoluerit. Hâc tamen cùm abſolui viâ problema poſſe diffiderem, à Spirali ad Quadratricem animum ſtudiumque conuerti: quam dum nouis efformo producoque modis, plurimaſque eius exhibeo proprietates, quæ ſolæ iuſtum librum conſtituere potuiſſent (conſtituiſſentque, niſi is qui ceteros ferè omnes labores meos, etiam hos abſtuliſſet caſus) ne hîc quidem adiumenti ſatis reperio, quo tam arduum problema poſſim abſoluere. Inde igitur rurſus ad noua conſilia conuerſus, reperi tandem materiam eam quæ de corporibus agit, ab antiquis inchoatam, planè imperfectam in ipſis adhuc hærere incunabilis: neſcio tamen quæ meæ hac in parte

te

te lux menti obiiceretur, & ad noua rursus studia animos daret. Totum igitur me in corporum contemplationem, efformationem, comparationem, peruigili multorum annorum curâ contuli, vt tandem aliquam mihi viam complanarem, qua ad montem hunc, imperuium hactenus, possem eniti. Res ex sententia tandem successit, complanaui quoad potui omnia; an autem apicem ipsum attigerim, docebit res.

Prima igitur cura fuit noua omnis generis corpora, nouo & Geometrico more efformare, quæ libro huius operis septimo continentur; & quia corporibus iis indigebam quæ cum sphæricis comparari possent, librum de circulis, qui tertium hîc locum obtinet, tres præterea conicorum præmisi, qui exinde suo ordine quartum, quintum, sextumque conficiunt; quartum quidem de Ellipsi, quia maiorem cum circulo cognationem habet, illi subiunxi; quintum de Parabola, sextum denique de Hyperbola; copiosi sunt singuli, quippe quibus naturam abstrusam hactenus sectionum illarum, ab Appollonio fortasse studio inuolutam ita euoluo, vt à communis Geometriæ perito, nullo Appollonij adminiculo, intelligi possit. Horum verò demonstrationes, cùm à linearum proprietatibus dependerent, alterum de lineis præmittere necesse fuit, quo earum affectiones quæ vsui nobis futuræ erant, lemmatum instar explanarem; hicque totius operis primus est, eiusque quasi basis. Iam verò cùm tam in Conicis quàm in corporum comparatione inscriptionibus, exhaustionibusque indigerem, librum de Progressionibus Geometricis placuit conscribere, tum quod non parum viderem subleuandum Lectoris meumque tædium longis illis, Archimedis tamen vsitatis, ratiocinationibus, quibus vtitur, quoties exhaustiones demonstrationibus adhibet; tum quod plurima noua, & non iniucunda exhibeat, quæ non mediocrem fortasse legenti afferent, vel admirationem, vel voluptatem, hicque secundus liber est. Rursus quia corpora diuersarum in quantitate specierum comparare inter se non poteram nisi in exhaustionibus octo planè vterer terminis, iisque sæpè dissimilium rationum, quarum tamen in Geometria hactenus non fuit vsus, librum de Proportionalitatibus, quas octauus exhibet, nouam quasi Geometriam concinnare me oportuit. Ecquando enim hactenus Geometria proportionibus vsa nisi quæ in similitudine rationum consisterent? mihi verò etiam dissimilibus rationibus vtendum fuit. Hisce itaque rite expositis, tum demum ad Quadraturas varias, ac demum Circuli, quas reliquis libris absoluo, hoc fere tenore me accingo. In libro de Parabola conscripto, sectiones produco Parabolicas, præter alias, illas quoque quas circulus mihi offerebat. dein ex illis duas semiparabolas æquales assumo, altitudinem verò habentes eam quam latus rectum ipsius axis exhibet; quæ in se inuicem subalternâ ductæ, corpus producunt æquale semicylindro, cuius basis semicirculus est, ex quo Parabolæ illæ oriuntur, & altitudo Parabolis communis, vti in libro de planorum ductibus, septimo nempè, demonstro. Tandem partes corporis orti ex Parabolis proposito modo ductis, per Proportionalitates confero cum partibus cylindri cui corpus illud æquale est. notâ autem ratione partium corporis Parabolici, innotescit ratio partium cylindri quæ illis æquales sunt. Quare, cùm partium cylindricarum bases, quæ sunt circuli segmenta, parallelis lineis intercepta, eandem inter se proportionem habeant quam partes ipsæ cylindricæ, nota etiam sit proportio segmentorum circularium, quæ inter parallelas lineas sunt posita. Tum denique ex segmentorum illorum eâ notâ proportione, nullo negocio circuli ad rectilineum proportionem exhibeo. Eadem penè ratione Hyperbolæ quadraturam exhibeo, per Parabolas parallelas in se ductas, quæ cylindro æquantur hyperbolico.

Atque hæc est operis totius adumbratio, obscura adhuc & tenuis, sed quam operis ipsius deductio faciet manifestam; præsertim æquis rerum Geometricarum, quibus hoc opus conscribo, æstimatoribus, quibus spero vel ob materiarum nouitatem, vel ob Problematis, quod soluendum suscepi, non infelicem, vt quidem reor, accessum, non omnino displiciturum.

Verùm non iniucundum fortasse fuerit, intelligere qui casus quasi concatenati semper studiorum meorum cursum interruperint partumque hunc meum, quem à viginti quinque annis

 conceperam

conceperam tamdiu retardarint, quo minùs lucem hanc in quam modò prodeunt, citiùs aspicerent, iuuat enim præteritorum meminisse nonnumquam, neque sine grata recordatione eorum mentio fit, præsertim si cum amicis, beneuolis inquam Lectoribus, defæcato nunc demum, vt cum Comico loquar, animo communicentur. Anno itaque huius seculi vigesimo quinto, cùm omnia quæ hoc opere continentur, si librum de Proportionalitatibus excipias, parata haberem, licet non ita concinnata, vt prælo subijci statim possent, sed summa tantùm capita, propositiones inquam cum demonstrationibus summatim memoriæ tantum caussâ scriptas, Romam ab Admodum R.P. Generali Nostro euocatus abij, lucubrationes meas solutionemque problematis de quadrando Circulo cum P. Grienbergero, eo quem dixi summo Mathematico collaturus: cumque per plures menses longo studio mea explicare essem aggressus, & ille ad calculos indefesso labore singula reuocaret, dimidium operis absoluere numquam potuimus, tum quòd ea quæ Proportionalitates concernunt, necdum planè perfecissem, quamquam in iis nulla esset difficultas; tum vel maximè quòd ipse graui & diuturno, sæpiusque interrupto implicitus morbo, maiorem moram requireret, quàm maximorum Principum, quorum nutus imperia sunt, preces litteræque permittebant.

In ea itaque dum Romæ incumbimus, ecce tibi binis è locis litteræ ad Admod. R. P. Generalem perferuntur, quibus Româ ad Mathesin docendum euocor; Catholici Regis Philippi vna, quibus Madritum mitti postulat; ab Augustissimo Imperatore Ferdinando altera, quibus me Pragam destinari vult. Vtrique certè Imperio obsequi cùm non posset admodum R.P. Generalis, huic me assignat, illicoque cùm res moram non ferret, eò me proficisci iubet. Pragam vix attigeram, rursum secundis litteris in Hispaniam euocor, tamq; ad iter accingebam me, cùm ecce paralysi subitò correptus morem gererem iusto Regis mei desiderio non potui: & quamquam vim subiti mali infregerim aliquousque, non tam feliciter tamen eluctari potui, quin integrum quinquennium me isthic morbi vis ingens detinuerit. Vix hoc malum euaseram, non ita tamen quin cum morbi reliquiis toto deinceps vitæ tempore mihi fuerit decertandum; euaseram tamen aliquousque, paulatimque à morbo respirare iam cæperam, cùm alius haud paullò tristior casus scripta mea laboresque excepit. Saxoniæ enim Dux post funestam illam cladem nostris ad Lipsiæ muros illatam, deditione Pragam tum fortè superat: victor itaque miles, & hæreticus, quod vnum satis erat ne nobis parceretur, in Collegium nostrum irrumpit, diripitque miserrimum in modum omnia: quidquid itaque breuissimo antè tempore aliquorum diligentiâ militum manus non euasit, cessit eorum libidini, aut certè flammis, & quod incommodo mihi tum non exiguo, imò commodo fuit maximo, eâ horâ reliquiæ incendio secuturo subducebantur, quâ ego ad aram sacrificaturus stabam: incommodo, quod plerosque ingenij fœtus amiserim, commodo certè quod eum saltem præ manibus haberem tunc, quem qui habet, habet omnia. Resciuit id R.P. Rodericus de Arriaga celeberrimus hoc tempore, multis etiam exinde tomis clarus Theologus: festinus itaque ad cubiculum meum aduolat, scripta quæ in mensa exposueram expolienda adhuc, vnà cum suis in currum coniicit, eaque cùm solertiâ summâ hostium manibus subduxisset, Viennam defert. cetera omnia quæ cistam integram implebant, eaque ferè erant, quæ, cùm iis vltima adhibita iam esset manus, prælo parabantur, præda aut flammis relicta, cùm tempori subduci non possent. Inter plurima quæ isthic deperdita, liber erat quo totam Staticam Geometricè ex Archimedæis deductam principiis comprehenderam, iustæ spissitudinis tomo. Inerant præterea Geometrica plurima quæ tomos duos hisce non absimiles magnitudine expleuissent. Atque ita labores plurium annorum, Deo ita volente, suauiterq; ad maius virtutis exercitium dirigente omnia, vnico horæ quadrante deperdidi. Perdidi illa, non tamen animos, quos exinde maiores mihi suffecit Deus. Spoliato itaque Collegio, Viennam cum ceteris remissus sum: inde ad Belgas meos, cùm Italiæ rursus destinarer, rediij, non eâ tamē valetudine qua ab iis discesserā. Scripta

mea

mea quæ cladi superfuerant, cùm mecum deferre non possem, Gracio Oenipontem Tyrolis amandata sunt, secundo demum Rheno in Belgium deferenda, sed cùm impeditæ semper essent viæ, varijque bellorum casus omnem Rheni tractum quotannis exciperent, neque manifesto periculo exponenda iudicarentur, decennium totum ea expectare necesse fuit: donec tandem non sine magnis impensis, magnaque amicorum curâ, summo meo gaudio, decimum post annum, Gandauum delata sunt, eæque scriptorum meorum sunt reliquiæ, quæ mihi materiam huius operis præbuerunt. Quo nomine quantum quidem debeam, imò omnes qui hisce rebus delectabuntur, R. P. Roderico de Arriaga, qui tantum mihi beneficium inopinatò præstitit, ego scio: omnia enim ferè exciderant quæ illis chartis fueram complexus; quis enim omnium iam senex recordetur quæ à triginta & quod excedit annis, fuerit commentatus? præsertim cùm breuissimè singula & quasi per compendium digessissem. Gratias itaque ago maximas bono Patri amicissimo meo; & hoc saltem alicuius gratiæ loco rependo, extare me velle publicè aliquod debiti mei monumentum, publicamque testificationem beneficij priuatim quidem impensi, sed ex quo, publico etiam Geometriæ bono, nisi mea me fallat sententia, vtilitas emanabit.

Atque hæc sunt quæ tecum, Lector beneuole, more meo, id est candidè communicanda ducebam. Interim si quid in operis decursu minùs expolitum occurrerit, id sanè festinationi nimiæ adscribas velim; cùm enim rursus morbi mei Pragæ contracti vires recrudescerent, senemque iam defectis viribus oppressuræ nonnumquam viderentur, Superiorum iussu, quorum nutus etiam, non imperia tantùm obseruo, conquisitis vndique auxilijs, hoc quale nunc vides opus effudi dicam, an concinnaui? antequam mors subita, expectata tamen semper, fœtum hunc opprimeret. Mihi sanè rebusque meis parum esse laborandum censebam ego; sed cùm in eorum manibus ego sim, qui cogere possint, malui qualecunque hoc opus publici iuris facere, quàm refragari minimo etiam eorum nutui. Vti enim nos nostri minimè sumus, ita fœtus etiam ingenij non nostri, minimè nobis arrogandi sunt, quos Religioni obnoxios fecit professio. Si quid tamen laude dignum fortasse duxeris, totum id Deo adscriptum cupio, cuius honori & gloriæ laboraui toto vitæ meæ tempore; neque sanè sine ingenti admiratione, æterni, etiam in minimis, artificij: non enim eum ordinem, symmetriam, proportionem, quam in singulis superficiebus corporibusque demonstramus, nos ipsi industriâ nostrâ aut arte effingimus, sed facta iam, & æternis legibus ita disposita, felicitate aliquâ ingenij, aut, quod mihi contigisse profiteor, eius fauore qui omnia tam concinnè in partes suas distribuit, inuenimus, & inuenta demonstramus.

Summa

Summa Priuilegij Cæsarei Societati IESV *concessi.*

CVm ex mandato sacræ Cæsareæ Maiestatis omnibus & singulis Typographis, Bibliopolis, atque alijs quibuscumque librariam negotiationem exercentibus seriò, strictèque inhibeatur ne quis libros illos à Societatis nostræ Patribus hactenus editos, aut edendos imposterum intra S R.I.Regnorumque & Dominiorum Sacræ Cæsareæ Maiestatis hereditariorum fines, simili aliouè charactere aut formâ, siue in toto, siue in parte excudere, vel recudere, vel aliò recudendos mittere aut alibi etiam impressos inuehere, vendere, seu distrahere, clam seu palam, citra supradictorum Patrum consensum ac testimonium audeat, vel præsumat. Ego Ioannes Baptista Engelgraue per Prouinciam Flandro-Belgicam, Præpositus Prouincialis concedo IOANNI & IACOBO MEVRSIIS, facultatem excudendi *Opus Geometricum Quadraturæ Circuli*, Auctore Patre GREGORIO A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV, in cuius fidem litteras manu meâ subscriptas & sigillo officij mei munitas dedi Gandaui 31. Martij 1647.

Ioannes Baptista Engelgraue.

E*Go infrascriptus Societatis* IESV *in Prouincia Flandro-Belgicâ Prouincialis iuxta Priuilegium à Serenissimis Principibus eidem Societati nostræ concessum, quo bibliopolis omnibus prohibet, ne libros ab eiusdem Societatis hominibus compositos absque Superiorum permissione imprimant: Facultatem do* IOANNI & IACOBO MEVRSIIS *Typographis vt librum cui titulus est* Opus Geometricum Quadraturæ Circuli, Auctore P. GREGORIO A S^to^. VINCENTIO *Societatis* IESV, *imprimere, & liberè distrahere possint. Datum Gand.* 31. *Martij* 1647.

Ioannes Baptista Engelgraue.

APPROBATIO.

LIbrum hunc compositum à R.P. GREGORIO A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV tanquam nihil continentem Religioni nostræ orthodoxæ contrarium, aut moribus, sed vt vtilem scientiæ istius, quam tractat, amatoribus approbo, & prælo dignissimum censeo. Datum Antuerpiæ 25. Febr. 1647.

Christianus Voochts Archipresb. Antuerp. Lib. Censor.

SVMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS Dei Gratiâ Hispaniarum, Indiarum, &c. Rex Catholicus, Archidux Austriæ, Dux Burgundiæ, Brabantiæ, &c. Serenissimus Belgarum Princeps, diplomate suo sanxit, ne quis librum, cui titulus est, R. P. GREGORII A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV *Opus Geometricum Quadraturæ Circuli*, citra IOANNIS & IACOBI MEVRSIORVM voluntatem, vllo modo imprimat, aut alibi terrarum impressum, in inferioris Germaniæ ditiones importet, venalémve habeat. Qui secus faxit, confiscatione librorum, & aliâ graui pœnâ mulctabitur, vti latiùs patet in litteris datis Bruxellæ XXVIII. Febr. M. DC. XLVII.

Signat Loyens.

ELEN-

ELENCHVS MATERIARVM

quæ toto hoc Opere continentur.

LIBER PRIMVS.

De linearum potentijs.

PARS PRIMA.

De variâ linearum inter se proportione.

PARS SECVNDA.

De triangulis eorumq; proprietatibus.

PARS

PARS TERTIA.

De rectangulorum inter se proportione.

LIBER SECVNDVS.

De progreßionibus Geometricis.

PARS PRIMA

Progreßiones non terminatas considerat.

Datis

PARS SECVNDA

Terminum progressionis in infinitum continuatæ assignat.

PARS TERTIA

Progressiones terminatas planis applicat, præsertim similibus.

PARS QVARTA.

Hæc quæ in planis demonstrata, corporibus applicat.

LIBER

M A T E R I A R V M.

L I B E R T E R T I V S.

De Circulis.

P A R S P R I M A.

De linearum in circulis proportione.

P A R S S E C V N D A.

De angulorum & arcuum comparatione.

PARS TERTIA.

De mutuâ circulorum intersectione & contactu.

PARS QVARTA.

De linearum in circulo potentia.

Prolegomena ad sectiones coni.

Proprie-

LIBER QVARTVS.

De Ellipsi.

PARS PRIMA

Sectionem è cono educit primasq; ac essentiales eius exhibet proprietates.

PARS

PARS SECVNDA

De sectoribus & segmentis ellipseos.

PARS TERTIA

In ellipsi considerat axium & diametrorum coniugatarum æqualium ac inæqualium proprietates.

PARS QVARTA

Sectionis polos, & lineam à puncto in axe dato ad peripheriam, breuissimam designat.

PARS QVINTA

Varias exhibet ellipsis geneses.

PARS SEXTA

Circulum cum ellipsi comparat.

LIBER

LIBER QVINTVS.

De Parabola.

PARS PRIMA.

Parabola è cono educitur, paßionesq; illius fundamentales exhibentur.

PARS SECVNDA

Linearum in parabolâ tam continuam quàm discretam proportionem contemplatur.

PARS TERTIA

Sectionis focum, & mutuas parabolarum vel circulorum intersectiones Geometricè designat.

Determi-

PARS QVARTA

Proprietates parabolarum se inuicem, aut circulos contingentium, intersecantium.

PARS QVINTA.

Quadratura parabolæ.

PARS SEXTA

Segmenta primùm & parabolas inter se confert, dein figuras maximas sectioni inscribit.

PARS

PARS SEPTIMA

Varias parabolæ geneses exhibet.

PARS OCTAVA

Miram exhibet parabolarum parallelarum, cum hyperbolâ inter asymptotos constituta symbolizationem.

LIBER

LIBER SEXTVS.

De Hyberbola.

PARS PRIMA

Hyperbolam sectionesq́ oppositas, denique & asymptotos è cono educit, primasq́ ac fundamentales hyperbolæ passiones demonstrat.

PARS SECVNDA

Sectionum oppositarum ac coniugatarum affectiones considerat.

PARS TERTIA

Asymptotos & concauam contemplatur hyperbolam, ac linearum præsertim asymptotis æquidistantium exhibet proportionem.

PARS QVARTA.

De segmentis hyperbolicis conuexis & concauis.

***

Concauo

PARS QVINTA

Hyperbolam expendit à parabola intersectam.

PARS SEXTA.

Solutio variorum problematum, aliaq́ theoremata ad pleniorem hyperbolæ cognitionem spectantia.

PARS SEPTIMA.

Geneses variæ hyperbolæ, & ex hyperbola reliquæ sectiones eductæ.

Spiralis

Spiralis & parabolæ symbolizatio.

LIBER SEPTIMVS.

De ductu plani in planum.

PARS PRIMA

Superficies primò exhibet, & quales sint determinat, vti & omnes interfectiones ortas ex ductu rectilinei in rectilineum. Deinde corpora sic producta inter se comparat.

Idem

PARS SECVNDA

Superficies contemplatur, & communes intersectiones natas ex ductu plani circularis in rectilineum. Deinde corpora sic producta exhibet.

PARS TERTIA.

Vniuersales quasdam propositiones continet, & fundamentales, quibus corpora inter se comparantur.

PARS QVARTA.

Comparantur corpora orta ex ductu rectilinei in rectilineum, cum corporibus ortis ex ductu partium circuli in se vel in alias circulares.

PARS QVINTA.

PARS SEXTA

Ampliorem continet comparationem corporum productorum ex ductu plani circularis in circulare, cum ijs quæ oriuntur ex ductu circularium partium in Ellipticas parabolicas, hyperbolicas.

Aliæ

PARS SEPTIMA.

Confert inter se corpora nata ex ductu parabolici in parabolicum.

PARS OCTAVA.

Corpora huc vsque ex vario planorum in plana ductu, reducit ad corpora determinatam habentia basim & altitudinem.

PARS

PARS NONA.

Praxis huius libri de planorum inter se ductu seu multiplicatione.

PARS DECIMA.

De Parabolis virtualibus.item aliqua materia quæ prioribus excidêre.

LIBER OCTAVVS.

De Proportionalitatibus Geometricis.

ELENCHVS
PARS PRIMA

Fundamentales propositiones complectitur naturam denominatorum concernentes.

PARS SECVNDA.

De similitudine proportionum quæ inter rationes existunt.

Duæ

PARS TERTIA.

De rationum multiplicatione seu compositione.

PARS QVARTA

Rationum proportiones considerat, maximè secundùm rectangulorum comparationem quæ fiunt ex terminis rationum, termini autem statuuntur lineæ.

PARS QVINTA.

Exponuntur ea quæ proportionalitatibus communia sunt cum operationibus Arithmeticis.

PARS

PARS SEXTA

Varias proportionalitatum proprietates complectitur.

LIBER NONVS.

De cylindro, cono, sphæra, sphæroide, & vtroque conoide parabolico & hyperbolico.

PARS PRIMA

Vngulas cylindricas, eiusq́ partes, planis ad cylindri axem parallelis, resciſſas ad cubum reducit.

 Trian-

PARS SECVNDA.

De inuolucro vngulari eiusq; ad cubum vel parallelepipedū reductione.

PARS TERTIA.

Superficies cylindrica quæ vngulam cingit ad rectilineum reducitur aliaq; eius affectiones notæ redduntur.

Imò

PARS QVARTA.

Comparatio vngulæ cylindricæ cum sphæra & aliis corporibus.

PARS QVINTA

Vngulam parabolicam considerat, insuper cylindricam vngulam & sphæram conferri cum parabola & cylindro parabolico.

Cylin-

PARS SEXTA.

De Sphæroide.

PARS SEPTIMA.

De conoide parabolico.

PARS OCTAVA.

De conoide hyperbolico.

Omnis

LIBER DECIMVS.

De ipsa circuli quadratura.

PARS PRIMA

Varia Lemmata complectitur quæ varijs quadraturis concinnandis inseruire poterunt.

PARS SECVNDA.

Corpori producto ex ductu mutuo parabolarum subalternè positarum nihil prorsus habenti circulare, triplici viâ cylindrum inuenit æqualem pr.46.47.48.49.50.51. item prop.68. item prop.75. & ipsius demum circuli varias quadraturas exhibet, modosque reducendi cylindrica corpora ad rectilineas magnitudines solidas.

PARS TERTIA.

Hyperbolem quoque per cylindrum hyperbolicum ad rectilinea solida reductum ad figuras rectilineas planas reducit. Atque vnà miram quadraturæ hyperbolicæ cum circulari similitudinem prosequitur.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER PRIMVS.

DE LINEARVM POTENTIIS.

ARGVMENTVM.

Liber hic fere Lemmaticus est, quemadmodum & alter, qui de Circulorum varijs proprietatibus tractat. Porrò quò magis materia Lectori ad manum sint, omnem in tres partes diuidere placuit.

Prima quidem maximè circa linearum proportionem versatur.

Secunda varias trianguli affectiones exhibet.

Tertia illas linearum contemplatur proprietates, quæ earum potentias concernunt.

PARS PRIMA.

De varia linearum inter se proportione.

PROPOSITIO PRIMA.

Sint AB, BC, CD, DE, lineæ in continua proportione; sit autem media FG, inter AB, BC; & inter AB, CD; media GH: Denique inter AB. DE. media sit HI.

A B C D E

F G H I

Dico AB. FG. GH. HI. lineas esse in continua analogia.

Demonstratio.

Quadratum AB est ad rectangulum ABC. a vt AB. ad BC. & ABC. rectangulum ad AB. CD. rectangulum est vt BC. ad CD. id est vt AB, ad BC. a 1.Sexti. Eodem modo rectangulum super AB. CD. ad AB. DE rectangulum, est vt CD ad DE; id est AB ad BC. Quadratum autem AB, ad FG. quadratum, est vt AB ad BC. Igitur quadratum AB. est ad quadratum FG, vt ABC rectangulum, ad rectangulum AB.CD. id est ad quadratum GH. Vnde eandem rationem conti-

A nuanε

nuant quadrata AB. FG. GH. HI. ac proinde ipſæ lineæ; quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Circulum ABC contingant rectæ DA, DC. & ductâ AC, ponatur altera DG occurrens AC in H. & circulo in G & I.

Dico rectam DG. ſectam eſſe in I & H, vt ſit DG ad GH. quemadmodum eſt DI ad IH.

Demonſtratio.

Svper IG. diametro, deſcribatur circulus GLK & per H punctum erigatur normaliter HL, vel HK, ad diametrum GI; ponaturque DL, erit itaque GHI rectangulo, [a] hoc eſt AHC, æquale rectangulum LHK, ſiue LH quadratum; pertinent igitur ad eundem [b] circulum puncta LAKC. iuncta igitur DL eſt æqualis tangenti DA, adeoque tangens; nam LD quadratum eſt æquale quadrato LH; id eſt rectangulo GHI, id eſt [c] AHC vnà cum quadrato HD: id eſt quadratis HF, FD. vnde LD quadrato rectangulum [d] IDG æquale; ac proinde cum IG. diameter ſit circuli GLI. erit per Pappum [e] vt DG ad GH. ita DI ad IH. quod fuit demonſtrandum.

a 35. Tertij.
b Ibid.
c 35. Tertij.
d 36. Tertij.
e Lib. 7. pr. 155.

Scholion.

Qvoniam multoties in hoc opere recurret diuiſio lineæ, prout præſenti propoſitione expoſita eſt; operæpretium exiſtimaui, aliquod illi peculiare nomen adiungere, quo illius cognitio magis innoteſcat: placuit autem nomenclaturam illi appropriare, ſectionis lineæ, ſecundùm mediam & extremam rationem proportionalem; quoniam ſimilitudinem non exiguam habet, cum ea diuiſione, quæ in elementis vocatur, ratio media & extrema: differt tamen ab ea, quòd illa ſolùm ſit æqualitatis, hæc verò de qua agimus, omnem omnino proportionem admittat; ſolam æqualitatis excludens.

PROPOSITIO III.

Ex termino diametri circuli ABC: ſumantur arcus hinc inde æquales, BC. BD. & ducta qualibet CF, quæ occurrat perimetro in E; ponatur DE interſecans AB in G.

Dico rectam FB. ſectam eſſe in A & G, media & extrema ratione proportionali.

Demonſtratio.

Demonſtratum inuenies libro noſtro de Circulis, propoſ. tot. rectam BF ad FA. eandem habere rationem, quam BG. GA. hoc eſt totam FB. ad alterum extremorum FA, eandem rationem obtinere, quam BG alterum extremum, habet ad medium AG; ergo ſecta eſt recta FB. in A & G. media & extrema ratione proportionali. Secundam explicationem præcedenti Scholio factam.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SEcta sit AB. in C & D. media & extrema ratione proportionali, & composita ex altera extremarum, & media, Verbi gratia CB, bifariam fecetur in E.

F A C D E B

Dico CE quadratum, rectangulo DEA, æquale exsurgere.

Demonstratio.

PRoducatur CA. in F, vt CA, AF æquales sint inter se: quoniam est vt BA ad AC; ita BD ad DC; erit componendo, BA cum AC. hoc est BF. ad FA. id est AC, vt BC ad DC. sed totius BF, dimidia est AE, ipsius quoque BC, dimidia est EC, per constructionem.

Igitur AE, ad AC, est vt EC ad CD. & cõuertendo vt AE. ad CE ita est, EC ad DE. ergo AE. CE. DE. sunt in continuata ratione: Vnde & quadrato [a] CE. rectangulum AED. æquale. Quod fuit demonstrandum. [a] 15 Sexti.

PROPOSITIO V.

POnantur tres in continua ratione ED, EC, EA. & EB, fiat æqualis EC, & ipsi CA. æqualis AF. dico AB. in C. & D. diuisam esse media & extrema ratione proportionali.

Demonstratio.

QVoniam est ratio continuata, trium ED. EC. EA. erit quoque diuidendo, DE ad DC. vt EC. ad CA. & componendo, vt CE ad DC. sic AE ad AC. quare & BC ad DC. ita BF. ad AC. hoc est ad AF. & diuidendo BD ad DC. vt BA ad AF. hoc est, ad AC. Quod fuit demonstrandum.

F A C D E B

Corellarium.

DVo hinc Consequuntur; primum, rectangulum BDC. rectangulo ADE. esse æquale, alterum BAC. rectangulo æquale existere, EAD rectangulum.

Primi demonstratio inde patet: quoniam BC. in E. secta est in æqualia, & non æqualia in D. rectangulum sub inæqualibus segmentis totius BDC. vnà cum [a] quadrato quod fit ab intermedia DE. æquale est ei, quod à dimidia CE. describitur quadrato. Rursus cùm AE secta sit in D. vtcunque erit rectangulum AED. [b] æquale rectangulo ADE, & quadrato DE. sed iam ostensum est, AED rectangulum quadrato CE æquale, Igitur BDC rectangulum, vnà cum DE quadrato, æquale est ADE rectangulo, vnà cum DE quadrato. Sublato itaque communi DE quadrato, residuum erit BDC rectangulum, rectangulo ADE æquale.

[a] 5. Secundi. [b] 3. Secundi.

Alterum quoque sic manifestum erit. Quoniam BC in E, secta est bifariam, ipsique additur pars CA, erit rectangulum BAC, [c] vnà cum quadrato CE, æquale quadrato AE: sed cùm secetur AE in D. vtcunque, erit quadratum AE, æquale duobus [d] rectangulis AED, & EAD. Igitur rectangulum BAC, vnà cum quadrato CE, æquale est duobus rectangulis AED, EAD. sed horum alterum AED, ostensum est quadrato CE. esse [e] æquale, his itaque detractis, residuum manebit BAC rectangulum, rectangulo EAD æquale.

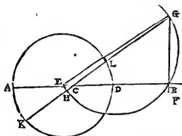
[c] 6. Secundi. [d] 2. Secundi. [e] 4. Huius.

PROPOSITIO VI.

Lineâ AB. ſectâ in C. & D. ſecundùm mediam & extremam rationem proportionalem; fiat circulus ſuper AD. diametro, cuius centum E, erigatur deinde BFG. normalis ad AB. ex puncto B.

Dico rectas omnes per C. ductas quæ circulo in K. & L. occurrunt & FB. normali in aliquo puncto G. diuiſas eſſe ſecundùm mediam & extremam rationem proportionalem.

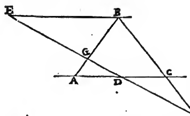
Demonſtratio.



Ex E. centro Circuli ALD, ducatur recta EH, normalis ad rectam KG; erit itaque KL. bifariam [a] diuiſa in H; & quia rectus eſt vterque angulorum ad H, & B, Circulus diametro GE deſcriptus, percurret puncta H, [b] & B: Rectangulum itaque BCE, [c] æquale eſt GCH rectangulo; eſt quoque rectangulum BCE, rectangulo ACD æquale, per Corollarium præcedentis propoſitionis; huic autem æquale eſt [d] rectangulum KCL, Igitur rectangulo GCH, rectangulū KCL, æquale erit; adde ergo vtriq; rectangulo quod ex CH. fit quadratū, erit denuo rectangulum KCL, vnà cum quadrato CH, æquale rectangulo GCH, vnà cum quadrato CH; ſed rectangulo KCL, vna eum quadrato CH oſtenſum eſt æquari rectangulum GHC, ſine GCH vnà cum quadrato CH id eſt quadratum [e] HL. Itaque rectangulum GHC, æquale eſt HL quadrato: vtque CH ad HL, ita eadem HL ad HG. quo fit, vt cùm ſit HL æqualis HK. Ipſa GK. [f] in C. & L, ſecta ſit ſecundùm rationem extremam & mediam proportionalem, per præcedentem propoſitionem. Quod fuit demonſtrandum.

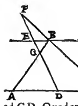
a 3. Tertij.
b 31. Tertij.
c 35. Tertij.
d Ibid.
e 5. Secundi.
f 5. Huius.

PROPOSITIO VII.



Esto ABC trianguli baſis AC diuiſa bifariam in D; actâque per B lineâ BE, parallelâ baſi AC, agatur per D linea quæcunque EF, occurrēs trianguli ABC lateribus, In G. D

Dico EF lineam in D & G punctis extrema & media ratione proportionali eſſe diuiſam: id eſt eſſe vt EF ad FD, ſic EG ad GD.



Demonſtratio.

Quoniam EB, & AC lineæ æquidiſtant, erit vt EB ad DC, id eſt ad AD, ſic EF ad DF; ſed eſt vt EB ad AD, ſic EG ad GD, igitur vt EF ad FD, ſic EG ad GD. Quod erat demonſtrandum.

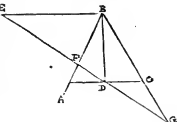
In

In 2. figura eſt FD linea in E & G diuiſa media & extrema ratione proportionali.

PROPOSITIO VIII.

Sit angulus ABC diuiſus bifariam rectâ BD, ad quam erecta ex B normali BE, agatur linea quæcunque EG per punctum D.

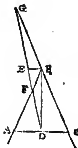
Dico EG lineam in F & D, media & extrema ratione proportionali eſſe diuiſam.



Demonſtratio.

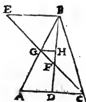
Ponatur per D, linea AC, parallela rectæ BE: occurrens anguli ABC lateribus, in A & C. Quoniam igitur AC linea æquidiſtat, rectæ EB quæ normalis ponitur ad lineam BD, erunt anguli ADB. CDB recti; ſunt autem per conſtructionem, & anguli ABD. CBD inter ſe æquales, & BD linea communis, igitur triangulum ABD æquale eſt triangulo CBD, & AD baſis, æqualis baſi DC: igitur per præcedentem vt EG ad GD, ſic EF ad FD Quòd erat demonſtrandum.

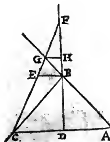
In 2 figura linea GD. diuiſa eſt, ſecundum mediam & extremam rationem proportionalem.

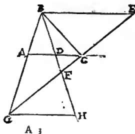


PROPOSITIO IX.

Esto ABC trianguli baſis AC, in D bifariam diuiſa, iunctiſque BD, agatur per B linea BE, parallela baſi AC; dein ex C, recta ducatur CE, occurrens vtcunque lineæ BE in E, BD rectæ in F, & lateri AB in G. Dico in prima figura: lineam EC; in ſecunda lineam FC; in tertia rectam EG, extrema & media ratione proportionali eſſe diuiſam.







Demonſtratio.

Ducatur GH linea, parallela baſi AC: Quoniam AC, EB. GH, lineæ æquidiſtant, erit AB ad BG. vt CE ad GE: ſed eſt vt AB ad GB, ſic AD ad GH,

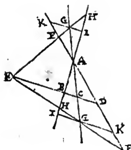
hoc eſt DC ad GH, hoc eſt CF ad FG, igitur vt CE ad EG, ſic CF ad FG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

DEmittantur ex A puncto, lineæ tres AB, AC, AD, quæ angulos conſtituant BAC, CAD rectis minores. Ponatur autem quæuis ED occurrens ductis ex A. lineis, & diuiſa in B. & C. extrema & media ratione proportionali.

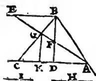
Dico omnes lineas ex E ductas, occurrentes rectis AB, AC, AD, ab ijſdem media & extrema ratione proportionali diuidi.

Demonſtratio.



DVcatur ex E, quæuis linea EF, occurrens lineæ AD in F, rectæ AC in G, & AB lineæ in H. dein per G, agatur linea IK, parallela rectæ BD. Quoniam BD, IK lineæ æquidiſtant, erit vt DC ad CB, ſic KG ad GI, ſed per hypotheſim eſt, DC ad CB, vt DE ad EB, igitur erit vt DE ad EB, ſic KG ad GI, & permutando vt DE ad KG, ſic EB ad IG. eſt autem vt DE ad KG, ſic EF ad FG, & vt EB ad IG, ſic EH ad HG, igitur vt EF ad FG, ſic EH ad HG, & permutando vt EF ad EH, ſic FG ad GH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

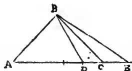


ESto ABC trianguli baſis AC, cui per B, verticem agatur æquidiſtans BE; oportet ex A rectam ducere AE, vt AE ad EG. datam habeat rationem maioris inæqualitatis H ad I.

Conſtructio & demonſtratio.

DIuiſa AC bifariam in D, fiat, vt H ad I ſic AD ad DK, iunctiſque punctis BD, erigatur ex K linea KG, parallela ipſi BD, occurrens BC lateri in G, tum ex A per G, agatur linea AE, ſecans BD lineam in F, & rectam EB in E; dico factum eſſe quod petitur. Quoniam FD GK lineæ ſunt parallelæ erit vt AD ad DK, ſic AF ad FG, ſed AD eſt ad DK vt H ad I per conſtructionem igitur, vt H ad I ſic
a 9. Huius. AF ad FG eſt autem vt a AF ad FG ſic AE ad EG, igitur vt H ad I ſic AE ad EG. Duximus igitur ex A lineam, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XII.



SIt AC linea vtcumque diuiſa in D, oportet illi rectam quandam CE adijcere, vt AE tota, in D & C, diuiſa ſit media & extrema ratione proportionali.

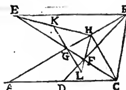
Con-

Constructio & demonstratio.

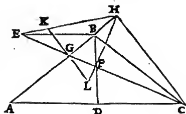
SVper AC vt basi constituatur triangulum rectangulum ABC, habens ad B rectum angulum,& ex B demittatur linea BE constituens angulum EBC æqualem angulo DBC; occurrens AC lineæ in E: dico factum esse quod petitur. Quoniam anguli DBC. CBE per constructionem sunt inter se æquales, & AB linea normalis ad rectam BC, [a] erit AD ad DC vt AE ad EC. datæ igitur lineæ AC, adiecimus, &c. Quod erat postulatum. [a] Per 8. huius.

PROPOSITIO XIII.

ESto ABC trianguli basis AC, in D bifariam diuisa, iunctisque BD, ponatur per B linea BE parallela basi AC: tum in EB linea, punctum sumatur quoduis E, ex quo linea demittatur EC, occurrens AB lineæ in G, & rectæ BD in F; dein ex C recta erigatur CH, secans orthonaliter lineam AB in H. iunganturque puncta HF EH.

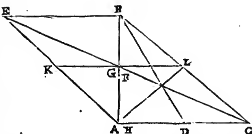


Dico angulos EHG, FHG esse inter se æquales.

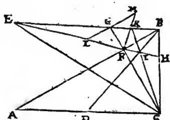


Demonstratio.

DVcatur per G linea KL, parallela rectæ HC; occurrens HE lineæ in K,&FH rectæ in L. Quoniam igitur HC KG, lineæ sunt parallelæ, erit vt HC ad KG, sic CE ad EG: sed vt CE ad EG, sic CF, [a] est ad FG, igitur vt HC ad KG, sic CF ad FG: est autem vt CF ad FG, sic HC ad GL, igitur vt HC ad KG, sic HC est ad GL; quare KG. GL. lineæ sunt inter se æquales. Rursum cũ HC lineæ, æquidistet linea KG, sit autem & HC normalis ex hypothesi ad rectam AB, erit & KG linea perpendicularis ad lineam AB, adeoque anguli HGK, HGL recti; igitur cum HG. GL lineæ duabus lineis HG GK sunt æquales, & anguli illis contenti recti, erunt HGK. HGL triangula inter se æqualia & similia, & anguli EHG, FHG æqualibus lineis subtensi, æquales. Quod erat demonstrandum. [a] 9. huius.



PROPOSITIO XIV.



ESto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D; iunctisq; BD, agatur per B linea BE, parallela rectæ AC, in qua assumpto pũcto quouis E, ducatur recta EC, & ex C erigatur linea CF orthogona rectæ AB, occurrens EB lineæ in G; dein ponatur EF intersecans BD in I, & BC in H, ducaturq; CI, occurrens lineæ EB in K.

Dico lineam EB in G & K, diuisam extrema & media ratione proportionali.

Demonstratio.

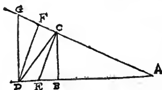
AGatur per G linea LM, parallela rectæ AB: occurrens FK in M. Quoniam linea GC, per constructionem normalis est ad rectam AB, erunt anguli GFA, GFB recti: est autem angulus KFB æqualis [a] angulo BFI, id est angulo AFL; igitur reliquus angulus GFL æqualis est reliquo GFK; rursum cùm LM linea æquidistet lineæ AB normali ad rectam GC, erunt anguli FGL, FGM recti; igitur cùm tam anguli FGM, FGL, quàm GFM, GFL sint inter se æquales, & FG linea communis, erunt FGM, FGL triangula, adeoque & latera LG, GM inter se æqualia. Quare vt FB ad LG, sic FB ad GM: sed est vt FB ad LG, sic BE ad EG, & vt FB ad GM, sic BK ad KG, igitur vt BE ad EG, sic BK ad KG. Quod erat demonstrandum.

[a] Per 13. huius.

PROPOSITIO XV.

COnstituant AB, BC rectum angulum, & AB maius sit latere BC. oportet AB latus producere in D, vt iunctâ DC. fiant proportionales DC. AD. & CB. AB.

Constructio & demonstratio.

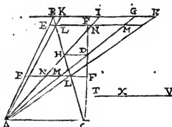


DVctâ CA, demittatur ex C linea CE, normalis ipsi AC, & alia quędã CD, quę angulum DCB constituat duplum anguli CAB. dico factum esse quod petitur. Erigantur ex D lineæ DF, DG; & DF quidem æquidistet ipsi EC; DG verò, rectæ CB. Quoniam angulus ACE per constructionem rectus est; & CB linea normalis ipsi AE, erunt ABC EBC triangula similia, & angulus ECB æqualis angulo CAB; quare & angulus DCB, rectâ CE bifariam est diuisus. Rursum cùm DG linea, per constructionem æquidistet rectæ BC; & FD linea, ipsi EC; erit angulus GDC æqualis angulo DCB, & angulus FDC, æqualis angulo ECD; adeoque GDC angulus, rectâ FD bifariam diuisus; sunt autem & anguli DFG, DFC recti (cùm FD linea æquidistet ipsi EC, normali ad AC) & FD linea communis, igitur triangulum DFC, æquale triangulo DFG, & DC latus, lateri GD æquale.

æquale. Quare CD ad DA vt GD ad DA; ſed eſt GD ad DA, vt CB ad BA, igitur vt CB ad BA ſic CD ad DA. Quoad igitur AB lineam produximus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XVI.

Sint ABC ADC triangula, inæqualis altitudinis, ſuper eadem baſi AC conſtituta; oportet ducere lineam EF, parallelam baſi AC, vt EL ad MF datam habeat rationem TV ad XV.



Conſtructio, & demonſtratio.

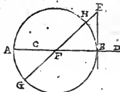
Conſtituantur per B & D lineæ BG, DH parallelæ baſi AC; & DH quidem occurrat triangulo ABC in H; dein AD producta, donec BG lineæ occurrat in G, agatur per H, linea AHI, occurrens BG lineæ in I: diuidaturque BI in K, vt BI ad IK datam habeat rationem TV ad VX; & ex K demittatur linea KA, occurrens BC lineæ in L, tum per L ducatur linea EF parallela baſi AC, occurrens ABC triangulo in E & L, rectæ CD productæ in F, & AD lineæ in M.

Dico EL ad MF datam habere rationem in TV ad VX. EF recta occurrat Lineæ AI in N; Quoniam HAD, HCD triangula ſuper eadem baſi HD & inter eaſdem parallelas conſtituta ſunt, erunt LF, MN lineæ inter ſe æquales: demptâ igitur communi NF, vel additâ ML, erunt LN, FM, lineæ æquales; igitur vt EL ad LN ſic EL eſt ad MF, ſed EL eſt ad LN, id eſt BK ad KI vt TV ad VX; igitur vt TV ad VX, ſic EL eſt ad MF; duximus igitur lineam EF, &c. Quod erat præſtandum.

Idem patet euenire ſi dicta duo triangula, æquales habeant baſes in directū poſitas.

PROPOSITIO XVII.

Sit AB linea diuiſa vtcunque in C, oportet illi rectam addere BD, vt tota AD ſit ad AB, vt AC eſt ad BD.



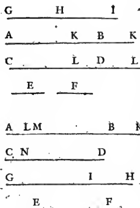
Conſtructio, & demonſtratio.

Deſcripto ſuper AB vt diametro, circulo AHB, erigatur ex B tangens EB, quæ ſit media inter AB & AC; dein ex E per F centrum circuli AHB recta ducatur EG occurrens circulo in H, addaturque lineæ AB quædam BD, æqualis ipſi EH. Dico factum eſſe quod petitur. Quoniam HE, BD lineæ ſunt æquales, erunt HEG BDA rectangula inter ſe æqualia; ſed HEG rectangulum eſt æquale quadrato EB, id eſt ex conſtructione rectangulo CAB, igitur CAB, BDA rectangula ſunt inter ſe æqualia; quare AD eſt ad AB vt AC ad BD. datæ igitur lineæ AB quandam adiecimus vt, &c. Quod erat poſtulatum.

PROPOSITIO XVIII.

Datis duabus rectis AB, CD, rectas addere, vel detrahere, in data ratione E ad F; vt compoſitæ vel reliquæ datam habeant rationem GH ad HI.

Constructio & demonstratio.

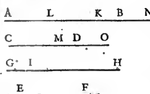


1. DAtæ rectæ A B C D sint inter se æquales, & tam ratio E ad F, quam G H ad H I, sit æqualitatis; addantur antè, vel detrahantur in ratione E ad F, lineæ B K, D L, patet veritas propositionis.

2. Si fuerit A B maior quàm C D; & ratio G H ad H I, maior quoque ratione A B ad C D, ratio autem E & F æqualitatis; Dico æquales addi non posse vt compositæ sint in ratione data G H ad H I. Cùm enim A B ponatur maior quàm C D, fiat L B æqualis ipsi C D; addaturque rectæ A B, quæuis B K; & si fieri possit, sit A K ad L K vt G H ad H I. erit igitur ratio A K ad L K maior ratione A B ad L B, id est ad C D: & quia ratio G H ad H I maior ponitur ratione A B ad L B, erit diuidendo[a] quoque ratio G I ad I H maior ratione A L ad L B: sed est vt G H ad H I sic A K ad L K ex hypothesi, adeoque vt G I[b] ad I H, sic A L ad L K; igitur & ratio A L ad L K maior est ratione A L ad L B. Quod fieri non potest; [c] cùm L B minor sit ipsa L K. Quare lineæ æquales addi non poterunt, vt, &c. Demi verò poterunt æquales, vt reliquæ sint in ratione G H ad H I: facta enim L B æquali ipsi C D, fiat vt G I ad I H, sic A L ad L M, cadet M inter L & B; (cùm A L ad L B, ostēsa sit minorem habere rationem, quàm G I ad I H) dein rectæ M B, fiat æqualis N D; Quoniam igitur per constructionem est vt G I ad I H, sic A L ad L M, erit componendo, A M ad L M, id est ad C N per constructionem vt G H ad H I. Quod erat demonstrandum.

a 19. Quinti. b 17. Quinti. c 8. Quinti.

[Handwritten marginal note:] A L ad L B habet minorem rationem quam G I ad I H, sed G I ad I H est ut A L ad L M, ergo A L ad L B habet minorem rationem quam eadem ad L M, ergo per 10 quinti ad quam eadem maiorem rationem habet illa minor est, ergo L M minor est quam L B, ergo cadit inter L et B



3. Si A B linea rursum fuerit maior rectâ C D, & ratio G H ad H I minor ratione A B ad C D, ratio autem E ad F æqualitatis, æquales addi poterunt vt compositæ rationem habeant G H ad H I: fiat enim L B linea, æqualis rectæ C D; quoniam per hypothesim, ratio A B ad L B, id est C D per construct. maior est ratione G H ad H I, erit[a] diuidendo, ratio A L ad L B maior ratione G I ad I H; facto igitur vt G I, ad I H, sic A L ad L N, patet L N maiorem esse linea L B; nam ratio G H ad H I minor ponitur ratione A B ad L B, id est C D, adeoque & ratio G I[b] ad I H, id est A L ad L N minor est ratione A L ad L B: tum C D lineæ addatur quædam D O æqualis ipsi B N: Quoniam igitur est A L ad L N, vt G I ad H I, erit componendo, A N ad L N, id est C O, vt G H ad H I: Quod erat primum.

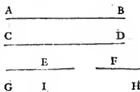
a 19. Quinti. b Ibid.

Iisdem positis, æquales demi non poterunt, vt reliquę datam habeant rationem G H ad H I: auferantur enim æquales K B, M D; & si fieri possit, sit vt G H ad H I sic A K ad L K, id est ad C M. cùm igitur per hypothesim, ratio G H ad H I minor sit ratione A B ad L B, id est ad C D; sit autem vt G H ad H I, sic A K ad L K, id est ad C M, erit ratio A K ad L K, minor quoque ratione A B ad L B, & diuidendo,[a] ratio A L ad L K, minor ratione A L ad L B. Quod fieri non[b] potest cùm L B linea, maior sit lineâ L K. quare hoc casu demi æquales lineæ non poterunt vt reliquæ, &c.

a 19 Quinti. b 8. Quinti.

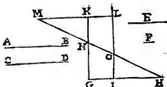
4. Si

4. Si fuerint A B, C D lineę æquales, & ratio E ad F inæqualitatis, & eadem cum ratione G H ad H I:

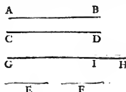


Dico addi non posse lineas in ratione E ad F, vt compositę datam habeant rationem G H ad H I. Rationi enim G H ad H I non potest addi ratio æqualitatis, quin producatur ratio minor illa, quam habet G H ad H I. Ergo nec rationi ęqualitatis potest addi ratio G H ad H I, quin producatur ratio minor illâ, quam habet G H ad H I. cùm eædem sint quę resultant.

Iisdem positis; demi rectę poterunt secundùm rationem E ad F, vt residuę obtineant rationem G H ad H I reciprocè: id est, vt vtriusque rationis antecedentes non sint in eadem linea: erigantur enim ex G & I parallelę G K, I L, ęquales ipsis A B, C D; & ex L per K agatur linea L K M ęqualis rectæ G H, ducaturque linea M H occurrens G K, I L rectis in N & O. Quoniam igitur N K O L lineę sibi mutuo æquidistant, erit O L ad N K ablata ad ablatam vt L M ad M K, id est vt G H ad H I, id est vt E ad F per hypothesim; & vt G H ad I H, sic N G est ad O I, residua ad residuam: igitur lineas abstulimus secundùm rationem E ad F vt reliquę datam obtineant rationem reciprocè G H ad H I.

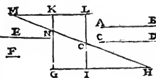


5. A B, C D lineę sint rursum inter se æquales, & ratio E ad F minor ratione G H ad H I:



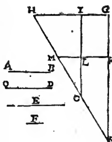
Dico addi non posse lineas secundùm rationem E ad F, vt compositæ rationem obtineant G H ad H I. patet: cùm ratio G H ad H I ponatur minor ratione E ad F; ratio verò E ad F aucta ratione æqualitatis, fiat minor ratione E ad F.

Iisdem positis: auferri poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant G H ad H I, reciprocè: erigantur enim ex G & I, parallelę G K, I L, æquales ipsis A B, C D: dein ex L per K, agatur linea L K M: factaque L M ad K M vt E ad F; ducatur recta M H occurrens G K, I L lineis in N & O: erit igitur L O ad N K, ablata ad ablatam, vt L M ad M K, id est vt E ad F; & N G ad O I, reliqua ad reliquam, vt G H ad I H.



6. Sint iterum A B, C D lineæ æquales, & ratio E ad F, maior ratione G H ad H I;

Dico addi posse lineas, in ratione E ad F, vt compositæ habeant rationem G H ad H I. Demittantur enim ex G & I, parallelæ G K, I L, datis A B, C D lineis æquales; & ex K per L agatur parallela G H recta K M, vt K M sit ad L M, sicut E ad F; tum ex H per M recta agatur H N; occurret illa lineis I L, G K in O & N: Cùm enim ratio E ad F, id est K M ad L M, maior ponatur ratione G H ad H I, erit [a] diuidendo, ratio K L ad L M, maior ratione G I ad I H; adeoque L M recta minor [b] ipsâ H I. Quare & H M producta secabit lineas I L, G K in O & N: vnde N K est ad L O addita ad additam, vt K M ad L M, id est E ad F, & G N ad I O, tota ad totam, vt G H ad H I. Quod erat primum.



a 29. Quinti.
b 10. Quinti.

 Iisdem

Iisdem positis, poterunt auferri lineæ, in ratione E ad F, vt residuæ daram habeant rationem GH ad HI reciprocè. Erigantur enim ex G & I parallelæ GK IL, æquales rectis AB CD; & ex L per K ducatur linea LKM, vt LM sit ad MK, quemadmodum est E ad F; ducaturque recta MH, occurrens GK IL lineis in N & O. patet LO ad NK ablatam ad ablatam esse, vt LM ad MK; id est E ad F; & NG ad OI, reliquam ad reliquam, vt GH ad HI. Quod erat demonstrandum.

7. Sit AB maior rectâ CD, habeatque E ad F eandem rationem, quam AB ad CD, quæ & eadem sit cum ratione GH ad HI. Addi poterunt lineæ in ratione E ad F, vt compositæ, rationem habeant GH ad HI. addantur enim BK DL lineæ, secundùm rationem E ad F: Quoniam igitur per hypothesin, AB est ad CD, vt E ad F, id est per constructionem vt BK ad DL, erit[a] AK ad CL, vt AB ad CD, id est GH ad HI.

[a] 19. Quinti.

Iisdem positis: demi poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant GH ad HI: demantur enim BM, DN: Quoniam igitur est vt AB ad CD, sic E ad F, id est per constructionem BM ad ND, erit AM[b] ad CN, reliqua ad reliquam, vt AB ad CD, id est vt GH ad HI. Quod erat demonstrandum.

[b] ibid.

8. Sit ratio AB ad CD inæqualitaris; & maior quidem, ratione GH ad HI; sit autem ratio E ad F, maior ratione AB ad CD.

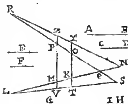
Dico addi posse lineas in ratione E ad F, vt compositæ habeant rationem GH ad HI. Facto enim KL ad ML vt E ad F, erigantur ex K & M parallelæ, KN, MO, æquales ipsis AB, CD; iunctisque N, O, fiat vt GH ad HI, sic NP ad OP; & ex P per L linea agatur PR quæ (cùm ratio NP ad OP, id est GH ad HI, minor sit ratione KL ad ML, id est E ad F, adeoque PL nõ æquidistet ipsi OM) conueniet cum OM, NK lineis, in Q & R. Vnde patet MQ ad KR additam ad additam esse, vt KL ad LM, id est per constructionem vt E ad F; & OQ ad NR, totam ad totam, esse vt NP ad OP, id est GH ad HI. Iisdem positis:

Dico demi posse lineas in ratione E ad F, vt reliquæ obtineant rationem GH ad HI. Producatur enim ON, donec cum MK linea, conueniat in Z: factoque OT ad NT, vt GH ad HI, & sumptâ KS æquali ipsi ML, erit NT maior ipsa NZ, & KS minor rectâ KZ, vt ostendam; quare si ex T per S agatur linea occurrens NK OM lineis, in V & X, factum erit quod petitur. Quoniam enim ratio OZ ad NZ, id est OM ad NK, id est per constructionem AB ad CD, maior ponitur ratione GH ad HI, id est OT ad NT, erit diuidendo, ratio ON ad NZ, [a] maior ratione ON ad NT: vnde NZ minor est lineâ NT. eodem modo cùm ratio E ad F, id est MS ad KS, ex hypothesi sit maior, ratione AB ad BC, id est OM ad NK, id est MZ ad

[a] 19. Quinti.

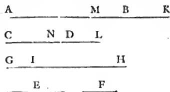
ad KZ, erit quoque diuidendo, ratio MK ad KS, maior ratione MK ad KZ, quare & KS linea b minor lineâ KZ: & recta TS, secabit lineas OM, NK. vnde patet XM esse ad VK, ablatam ad ablatam, vt MS ad KS, id est vt E ad F; & OX esse ad NV, residuum ad residuum, vt OT ad NT, id est vt GH ad HI. b 10 quinti

9. Si fuerint AB, CD lineæ inæquales, & ratio E ad F eadem cum ratione GH ad HI, quæ minor sit ratione AB ad CD;



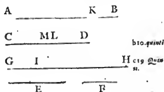
Dico addi posse lineas in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI, reciprocè. Fiat enim vt E ad F sic KL ad ML, & MN ad KN; erectisque ex M & K, parallelis KO, MP, æqualibus, ipsis AB, CD; iungatur OP, fiatque vt GH ad HI, sic OR ad PR, & PS ad OS, & PO producta occurrat MN lineæ in Q. erit PS maior quàm PQ, & MQ minor quā MN, vt ostendā; cū recta ducatur SL; quæ secet MP OK lineas in V & T; Quoniam igitur MQ est ad KQ, vt PM ad OK, id est per constructionem vt AB ad CD, & MN ad KN, vt E ad F; sit autem ex hypothesi ratio AB ad BC, maior ratione E ad F, erit ratio MQ ad KQ, maior ratione MN ad KN, & diuidendo, c ratio MK ad KQ, maior ratione MK ad KN, quare MQ linea minor est lineâ MN. eodē modo ostēditur PQ recta minor rectâ PS. Vnde KT est ad MV addita ad additā vt KL ad ML, id est E ad F, & PV ad OT tota ad totam, vt PS ad OS, id est GH ad HI. Similiter additio fiet reciproca, si recta ducatur NR occurrens OK, PM lineis, in X & Z: erit enim XO ad ZR, addita ad additam, vt OR ad PR, id est per constructionem vt GH ad HI, id est ex hypothesi vt E ad F; & ZM ad XK, tota ad totam, reciprocè, vt MN ad KN, id est per constructionem vt E ad F, id est ex hypothesi vt GH ad HI. c 19. Quinti.

Iisdem positis: Dico addi non posse lineas in ratione E ad F, vt composita sit ad compositam, in ratione GH ad HI ordinatè; id est vt vtriusque rationis antecedentes sint in eadem linea: addantur enim secundùm rationem E ad F, lineæ BK, DL; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI: erit igitur vt AK ad CL sic BK ad DL, (quia ex hypothesi ratio E ad F, eadem est cum ratione GH ad HI) adeoque & AB ad CD, vt AK ad CL, id est vt GH ad HI; quod est contra Suppositum: nam ratio AB ad CD maior ponitur, ratione GH ad HI: quare ordinata additio non continget.

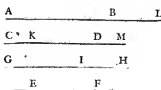


Sed neque hoc casu detractio ordinata, aut reciproca continget. Detrahantur enim ordinatim lineæ BM, DN, in ratione E ad F; & si fieri possit, sit AM ad CN, vt GH ad HI. Quoniam igitur AB ad CD, maiorem habet rationem, quàm BM ad DN, id est E ad F, erit AM reliqua a ad reliquam CN, in maiori ratione quàm AB ad CD; adeoque multò maiore quàm E ad F, id est GH ad HI; quod est contra hypothesim, cum ponatur eadem cum ratione GH ad HI: quare ordinata detractio nulla fiet. a 33. Quinti.

De reciproca detractione sic constabit: fiat vt E ad F sic LD ad KB; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. Cum igitur ratio AB ad CD, ex hypothesi maior sit ratione AK ad CL, id est GH ad HI, fiat AK ad CM, vt AB ad CD; eritque CM linea, b minor ipsa CL: quare cùm sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit quoque c KB ad MD, residua ad residuam vt AB ad CD; adeoque KB maior, quàm MD, & multo maior quàm LD. Quod est contra hypothesim; non igitur detractio reciproca continget. b 10. quinti. c 19. Quinti.



B 3 10. Sint



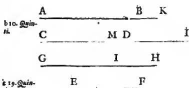
10. Sint AB CB lineæ inæquales, & ratio E ad F, eadem cum ratione GH ad HI, quæ maior sit ratione AB ad CD.

Dico additionem, neque ordinatam, neque reciprocam fieri posse. Addantur enim ordinatim in ratione E ad F, lineæ BL, DM. & si fieri possit, sit AL ad CM, vt GH ad HI. Quoniam est BL ad DM, vt AL ad CM, igitur erit quoque a ratio AB ad CD, eadem cum BL ad DM, hoc est E ad F, vel GH ad HI. quod est contra suppositum; ponitur enim ratio AB ad CD minor ratione E ad F. sed neque reciproca additio continget: fiat enim vt E ad F, sic DL ad BK, addita ad additam, & si fieri possit, sit AK ad CL vt GH ad HI. Fiatq; vt GH ad HI, sic AB ad CM b erit CM minor quàm CD, quia ratio AB ad CD minor est ratione GH ad HI, id est AB ad CM. igitur cùm sit vt AK ad CL, id est GH ad HI, sic AB ad CM, erit c BK ad ML, residuum ad residuum vt AB ad CM; adeoq; BK maior ipsa ML, & multo maior quàm LD. Quod est contra hypothesin: quare nec additio reciproca continget.

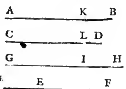
a Ibid.

b 10. Quinti.

c 19. Quinti.

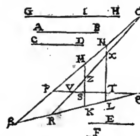


Iisdem positis, neque ordinata detractio continget: detrahantur enim in ratione E ad F, lineæ KB LD, & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; Quoniam igitur ratio AB ad CD, ex hypothesi minor est ratione E ad F, id est KB ad LB, ablatæ ad ablatam, erit d ratio AK ad CL, reliquæ ad reliquam, minor ratione AB ad CD, adeoque multo minor ratione KB ad LD, id est GH ad HI: quod est cōtra suppositum: quare detractio ordinata non continget.



d 33. quinti.

Continget verò detractio reciproca hoc modo. Erigantur duæ parallelæ KM, LN, æquales ipsis AB CD; iunctisque punctis MN, KL fiat vt E ad F, sic MO ad NO, & NP ad MP, item vt GH ad HI, sic KQ ad LQ, & LR ad KR: cadent R & P intra concursum linearum OP, QR, vt ostendam: quare rectæ ducantur RO, PQ; & PQ quidem secet lineas KM, NL in S & T. RO verò lineam PQ in V, & rectas MK, LN in Z & X conueniant OP. RQ lineæ in β. Quoniam ratio AB ad CD, id est per constructionem MK ad NL, id est Nβ ad Mβ, minor est ratione E ad F, id est per constructionem PN ad MP, erit diuidendo, e quoque ratio NM ad Mβ, minor ratione NM ad MP; adeoque MP linea f minor quam Mβ: eodem modo ostenditur KR linea minor quàm Kβ: quare iunctæ RO, PQ secabunt lineas MK, NL, vt dictum est: vnde NT est ad MS, ablata ad ablatam, vt NP ad MP, id est E ad F, & SK est ad TL, reliqua ad reliquam, vt SQ ad TQ, id est GH ad HI: similiter erit MZ ad NX, ablata ad ablatam, vt MO ad



e 19. Quinti.

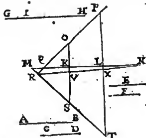
f 10. Quinti.

ad

ad NO; id est E ad F, & XL ad ZK, reliqua ad reliquam, vt LR ad KR, id est GH ad HI.

11 Sint iterum AB CD lineæ inæquales, & ratio GH ad HI minor ratione AB ad CD; ratio autem E ad F minor ratione GH ad HI:

Dico tam ordinatim quàm reciprocè addi posse lineas, in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI. fiat enim vt E ad F sic LM ad KM, & KN ad LN: erectisque ex K & L parallelis KQ, LP, quæ rectis AB CD, sint æquales, iunganturque puncta PO, fiatque vt GH ad HI, sic PR ad OR; occurrat autem PO recta ipsi LM in Q, erit OR maior rectâ OQ, & LQ minor ipsa LM: vt ostendam: quare ductâ ex M per R linea M, occurret OK, PL lineis in S & T: iunctaque RN, easdem secabit in V & X. Quoniam ergo ratio LM ad KM, id est per constructionē ratio E ad F minor est ratione LQ ad KQ, id est LP ad OK, id est AB ad CD, erit diuidendo, a quoque ratio LK ad KM, minor ratione LK ad KQ, adeoque LM linea, b maior recta LK: eodem modo ostenditur OR recta maior rectâ OQ. Vnde LT ad KS, ordinatim addita ad additam est vt LM ad KM, id est E ad F; & TP est ad SO, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est GH ad HI. igitur ordinatim lineas adiecimus, &c.

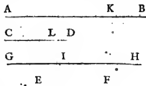


a 29. Quinti.

b 10. Quinti.

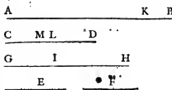
Reciprocè verò posse rectas adiici, in ratione E ad F, &c. sic ostendo. VK est ad LX addita ad additam, vt KN ad LN, id est per constructionem vt E ad F; & XP est ad OV tota ad totam, vt PR ad OR; id est GH ad HI: igitur, &c.

Iisdem positis: Dico detractionem tam ordinatam, quàm reciprocam fieri non posse. Detrahantur enim ordinatim lineæ KB LD, in ratione E ad F: & si fieri possit, sit AK ad LC, vt GH ad HI: Quoniam igitur ratio AB ad CD maior ponitur ratione E ad F, id est KB ad LD, erit quoque ratio AK ad CL residui ad residuum, c maior ratione AB ad CD, quod est contra hypothesim; cùm ratio AK ad CL id est GH ad HI, minor ponatur ratione AB ad CD. quare ordinata detractio non continget.



c 33. Quinti.

De reciproca detractione sic constabit. Detrahantur reciprocè LD KB, in ratione E ad F: & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; fiat deinde vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit recta CM minor quàm CL, quia ratio AB ad CD, id est AK ad CM, maior ponitur ratione GH ad HI, id est AK ad CL. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, ablata ad ablatam, erit KB ad MD, d reliqua ad reliquam, vt AK ad CM: & KB linea, maior lineâ MD: adeoque multo maior rectâ LD. Quod est contra hypothesim: quare detractio reciproca non continget.

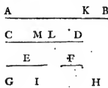


d 19. Quinti.

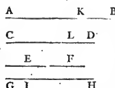
12. Sint AB CD lineæ inæquales, & ratio E ad F minor ratione AB ad CD, maior verò ratione GH ad HI:

Dico neque ordinatim, nec reciprocè lineas posse detrahi, in ratione E ad F, vt reliquæ obtineant rationem GH ad HI: demâtur enim reciprocè in ratione E ad F,

rectæ



rectæ LD KB, & si fieri possit, sit AK ad CL vt GH ad HI, fiatque vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit CM minor ipsa CL, quia ratio AB ad CD, id est AK ad CM, maior est ratione GH ad HI, id est AK ad CL, cùm igitur sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit & KB ad MD, residuum ad residuum, vt AK ad CM; adeoque KB maior ipsa MD, & multo maior recta LD. Quod est contra hypothesi n: quare detractio reciproca non continget. Sed neque ordinata detractio, casu hoc continget.

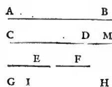


Detrahantur enim in ratione E ad F, lineæ KB LD; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. cùm igitur ratio AB ad CD, maior ponatur ratione E ad F, id est KB ad LD, erit & [a] ratio AK ad CL, a maior ratione AB ad CD: adeoque multo maior ratione GH ad HI, id est AK ad CL. Quod est contra hypothesim. Igitur neque ordinata detractio fieri potest.

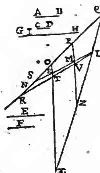
a 13. Quinti.

Iisdem positis, neque additio ordinata continget. Addantur enim in ratione E ad F, lineæ BL, DM: & si fieri possit, sit AL ad CM, vt GH ad HI. Quoniam igitur ratio AL ad CM, id est GH ad HI, minor ponitur ratione E ad F, id est BL ad DM, erit b ratio AB ad CD, minor ratione AL ad CM, id est GH ad HI. Quod est contra hypothesim; quare nec ordinata additio continget.

b Ibid.

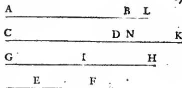


Iisdem positis additio reciproca fieri poterit: fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, & MN ad KN, erectisque ex M & K parallelis KO, MP, quæ rectis AB, CD sint æquales, iungantur OP, & fiat OQ ad PQ, item PR ad OR, vt GH ad HI, occurratque PR linea, rectæ MN in S; patet ex sæpè dictis, SO lineam minorem esse rectâ OR, & SK minorem ipsa KN; quia ratio AB ad CD, id est MP ad OK, id est PS ad OS, maior est ratione GH ad HI, id est PR ad OR; item MS ad KS, maior ratione MN ad KN, id est E ad F. Quare iuncta RL secabit rectas, OK PM, in T & V. Vnde KT est ad MV, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & PV ad OT, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est per constructionem GH ad HI.

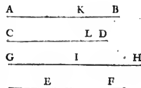


Addi iterum poterunt lineæ in ratione E ad F, vt OK minor vtriusque rationis antecedentes habeat: ducatur enim in eadem figura, ex Q per L recta; occurret illa lineis PV OT in Z, & X; quia ratio OQ ad PQ, id est GH ad HI, minor ponitur ratione KL ad LM, id est E ad F; nam si LQ linea non concurreret cum PV, OT lineis, sed illis æquidistaret, esset ratio KL ad ML, eadem cum ratione OQ ad PQ. Quod est contra hypothesim: occurret igitur LQ linea, rectis PV, OT in Z & X. Vnde KX est ad MZ, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F. & OX ad PZ, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.

13 Sint AB CD lineæ inæquales; ratio verò GH ad HI, minor ratione E ad F; quæ maior sit ratione AB ad CD. fieri non poterit additio reciproca. addantur enim DK, BL in ratione E ad F. & si fieri possit, sit AL ad CK vt GH ad HI: dein fiat vt AB ad CD, ita BL ad DN; erit DN linea minor recta



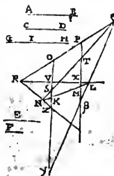
recta DK, cum ipsa BL minor ponatur rectâ DK, adeoque tota CN minor, CK. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic BL ad DN, & componendo, vt AB ad CD, sic AL ad CN, erit ratio AL ad CN, minor ratione GH ad HI, id est per constructionem ratione AL ad CK. quod fieri non potest; cùm CN linea minor sit recta CK: quare additio reciproca non continget.



Neque etiam ordinata detractio fieri poterit: demantur enim lineæ KB, LD in ratione E ad F, & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; Quoniam igitur ratio AB ad CD, minor ponitur ratione KB ad LD, siue E ad F, erit ratio AK ad CL, id est GH ad HI;[a] minor ratione AB ad CD, quod est contra Suppositum: quare ordinata detractio non continger.

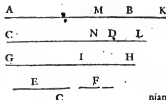
[a] 33. Quinti.

Detrahi tamen poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ reciproce habeant rationem GH ad HI. Fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, & MN ad KN; erectisque ex K & M parallelis KO, MP, quæ rectis AB, CD, sint æquales, iungantur OP; & fiat vt GH ad HI, sic OQ ad PQ, & PR ad OR: ostendetur vt in casu decimo huius propositionis puncta N & R, esse intra concursum linearum LN, QR, quare ductæ RL, NQ secabunt lineas OK, PM: & NQ quidem illas secet in S, T, recta verò RL eisdem occurrat in V & X. patet TM esse ad SK, ablatam ad ablatam, vt MN ad KN, id est per constructionem vt E ad F, & SO esse ad PT, residuam ad residuam, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.



Addi etiam poterunt ordinatim lineæ in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI, agatur enim ex R per N linea RN, occurret illa rectis OK, PM: quod sæpius ostensum est, cùm ratio XR ad VR, id est PR ad OR, id est per constructionem GH ad HI, minor ponatur ratione E ad F, id est MN ad KN. occurrat igitur in Z & α. erit Mα ad KZ, addita ad additam, vt MN ad KN; id est E ad F, & Tα ad OK, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est GH ad HI.

Rursum addi possunt lineæ vt minor OK, vtriusque rationis, habeat antecedentes; ducatur enim ex Q per L recta, quæ cùm OK, PM lineis conueniet vt ostensum sæpius; quia ratio OQ ad PQ minor est ratione KL ad ML: conueniat igitur in β & γ erit Kγ ad Mβ, addita ad additam, vt KL ad ML, id est per constructionem vt E ad F, & Oγ ad Pβ, tota ad totam, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.

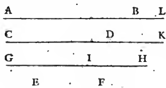


14 Sint iterum rectæ AB, CD inæquales, ratio verò E ad F maior ratione AB ad CD; quæ eadem sit, cum ratione GH ad HI: neque addi, neque demi ordinatim poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt compositæ vel reliquæ, rationem habeant GH ad HI. addantur enim ordinatim lineæ BK, DL, in ratione E ad F; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. Quoniam

C

a 19. Quinti. niam igitur A K est ad C L, vt A B ad C D; erit a reliqua B K ad D L reliquam, id est E ad F, vt A K ad C L, id est ex hypothesi G H ad H I. Quod est contra Suppositũ. Quare ordinatim addi non poterunt lineæ, &c. Neque demi possunt lineæ in ratione E ad F vt residuæ rationem obtineant G H ad H I, auferantur enim lineæ M B, N D in ratione E ad F, & si fieri possit, sit vt G H ad H I, sic A M ad C N, cũ igitur sit vt A B ad C D, sic G H ad H I, id est per constructionẽ A M ad C N, erit b M B reliqua ad reliquam N D; vt A B ad C D; Quod est contra hypothesin. Quare neque ordinatim demi poterunt lineę, &c.

b 19. Quinti.



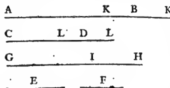
Iisdem positis; neque additio reciproca fieri poterit. addantur enim lineę D K, B L, secundùm rationem E ad F, & si fieri possit, sit A L ad C K vt G H ad H I. erit igitur A L ad C K, vt A B ad C D, & B L reliqua ad reliquam D K, vt A B ad C D: quare B L maior quàm D K. Quod est contra hypothesin. Vnde additio reciproca fieri non poterit.

Poterunt tamen detrahi reciprocè lineæ in ratione E ad F, vt reliquę rationem obtineant G H ad H I. fiat enim K L ad M L, vt G H ad H I, erectisque ex K & M parallelis K O M N, quæ æquales sint lineis A B, C D, ducatur recta O N; occurret illa lineę K L in L; quia O L est ad N L, vt O K ad N M, id est vt A B ad C D, id est G H ad H I, id est per constructionem vt K L ad M L: dein O P facta ęquali ipsi N L fiat vt E ad F, sic K Q ad M Q, ducaturque recta Q P: occurret illa lineis O K, N M, quia ratio O L ad N L, id est G H ad H I, id est ratio K L ad M L, minor ponitur ratione E ad F; id est K Q ad M Q: adeoque M Q linea c minor rectâ M L: secet igitur P Q linea, rectas O K, N M in V & X: patet V M esse ad X K ablatam ad ablatam, vt K Q ad M Q, id est E ad F: & N V esse ad O X, residuum ad residuum, vt N P ad O P id est G H ad H I.

c 10. Quinti.

Addi etiam poterunt lineæ in ratione E ad F, vt minor vtriusque rationis habeat antecedentes. Factâ enim K R æquali ipsi M Q, ducatur recta P R: occurret illa lineis O K, N M in S & T: quia ratio M R ad K R, id est E ad F, maior ponitur ratione G H ad H I, id est N P ad O P. Vnde patet M T esse ad K S, additã ad additam vt M R ad K R, id est E ad F, & N T esse ad O S, compositam ad compositam, vt N P ad O P, id est G H ad H I.

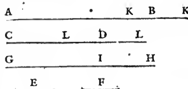
15 Sit iterum ratio A B ad C D, eadem cum ratione G H ad H I, quæ maior sit ratione E ad F; dico ordinatim addi, nec demi posse lineas, in ratione E ad F, vt compositę, vel reliquę, rationem habeant G H ad H I; addantur enim lineæ B K, D L in ratione E ad F, & si fieri possit, sit A K ad C L, vt G H ad H I: erit igitur vt A K ad C L, sic A B ad C D; vnde & B K ad D L, id est per constructionem E ad F, vt A K ad C L, id est G H ad H I: Quod est contra hypothesim: igitur ordinata additio non continget.



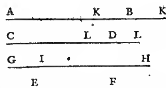
Eodem modo detrahantur ordinatim B K, L D, in ratione E ad F; & si fieri possit sit A K ad C L, vt G H ad H I; erit igitur A K ad C L, vt A B ad B C, quare & B K ad L D, id est E ad F, vt A B ad C D, quod est contra hypothesim. igitur, &c.

Neque

Neque etiam addi, vel demi reciprocè poterunt lineæ in ratione E ad F, vt residuæ vel compositæ rationem habeant GH ad HI. addantur enim DL, BK in ratione E ad F, & si fieri possit sit AK ad CL, vt GH ad HI: erit igitur vt AK ad CL, sic AB ad CD, quare & BK ad DL, est vt AB ad CD, adeoque BK maior ipsa DL; Quod est contra hypothesim: ergo, &c. eodem modo ostenditur detractionem reciprocam fieri non posse.

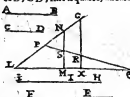


16 Sit ratio E ad F eadem cum ratione AB ad CD, minor autem ratione GH ad HI: dico ordinatim addi nec demi posse lineas in ratione E ad F, sic vt compositæ vel reliquæ, rationem habeant GH ad HI. addantur enim BK, DL in ratione E ad F, & si fieri possit sit AK ad CL, vt GH ad HI: erit igitur ratio AK ad CL, id est GH ad HI, maior ratione BK ad CL, id est E ad F, quare & ratio AB ad CD a maior ratione AK ad CK, id est GH ad HI, Quod est contra hypothesim: igitur ordinata additio non continget. a 33. Quinti.

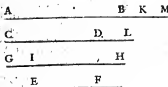


Eodem plane modo ostenditur, ordinatam detractionem fieri non posse.

Detrahi tamen reciprocè poterunt lineæ in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant GH ad HI. Fiat enim vt E ad F, sic XL ad ML & MQ ad XQ, erectisque ex X & M, parallelis XO, MN, quæ lineis AB, CD, sint æquales; ducatur ON linea, quæ occurret XL lineæ in L, quia OX est ad NM, id est AB ad CD, vt XL ad ML, id est E ad F; dein fiat vt GH ad HI, sic OP ad NP, erit NP linea minor lineâ NL, quia ratio OP ad NP, id est GH ad HI, maior ponitur ratione OL ad NL, id est XL ad ML, id est E ad F vt sæpiùs ostensum: quare iuncta PQ secabit lineas OX, NM in R & S: eritque SM ad RX ablata ad ablatam, vt MQ ad XQ, id est E ad F, & reciprocè OR ad NS, vt OP ad NP, id est GH ad HI.

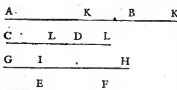


Addi verò reciprocè lineæ non poterunt in ratione E ad F, &c. addantur enim lineæ DL BK in ratione E ad F, & si fieri possit, sit AK ad CL vt GH ad HI. Fiatque vt AB ad CD, ita BM ad DL, erit BM maior quàm DL, adeoque multo maior ipsa BK. cùm igitur sit vt AB ad CD, sic BM ad DL, & componendo, AM ad CL vt BM ad DL, id est AB ad CD, erit ratio AM ad CL minor ratione AK ad CL, id est GH ad HI; Quod fieri non potest, cùm AM tota maior sit rectâ AK. quare reciproca additio non continget.



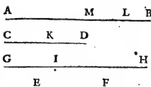
17 Sit iterum ratio E ad F inæqualitatis, & eadem cum ratione AB ad CD, quæ maior sit ratione GH ad HI, dico ordinatim lineas in ratione E ad F demi vel addi non posse, vt reliquæ vel compositæ rationem habeant GH ad HI.

C 2 deman-



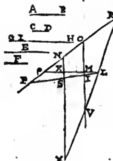
demantur enim in ratione E ad F, lineæ BKLD, fitque si fieri possit AK ad CL, vt GH ad HI; cùm igitur sit vt AB ad CD, sic E ad F, id est KB ad LD, ablata ad ablatam; erit & AK ad CL reliqua ad reliquam, vt AB ad CD; quod est contra hypothesim: cùm ratio AK ad CL, id est per constructionem GH ad HI, minor ponatur ratione AB ad CD. Quare ordinata detractio non continget.

Eodem modo probatur ordinatam additionem fieri non posse.



Sed neque detractio reciproca continget: demantur enim in ratione E ad F, lineæ KD, LB; & si fieri possit, sit vt GH ad HI, sic AL ad CK: fiat dein vt AB ad CD, sic MB ad KD, erit MB maior, quàm KD, adeoque multo maior rectâ LB. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic MB ad KD, erit & AM ad CK, vt AB ad CD, sed ratio AM [a] ad CK, minor est ratione AL ad CK, igitur & ratio AB ad CD minor est ratione AL ad CK, id est GH ad HI: Quod est contra hypothesim. quare nec reciprocè lineæ detrahi poterunt in ratione E ad F, &c.

a 13. Quinti.



Poterit tamen fieri additio reciproca, &c. Fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, erectisque ex K & M parallelis KN, MO, quæ AB, CD lineis sint æquales; ducatur recta ON, fiatque OP ad NP, item NR ad OR, vt GH ad HI: occurratque OP linea rectæ KM in Q; erit NQ linea minor rectâ NP, quia ratio OP ad NP, id est GH ad HI, minor est ratione OQ ad NQ, id est OM ad NK, siue AB ad CD: quare & iuncta PL secabit lineas NK, OM, in S & T. Vnde KS est ad MT, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & OT ad NS, vt OP ad NP, id est GH ad HI.

Addi etiam sic poterunt lineæ in ratione E ad F, vt NK minor vtriusque rationis habeat antecedentes. ducatur enim recta RL: occurret illa lineis OM NK in V & X, quia ratio KL ad ML id est E ad F maior ponitur ratione NR ad RO. Vnde erit KX ad MV, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & NX, ad OV, composita ad compositam, vt NR ad RO, id est GH ad HI.

Scholion.

Possent in hac propositione plures casus determinari, & aliqui etiam, quibus propositio absolui non potest; sed ne tædium Lectori adferam, consulto abstinui; satis esse ducens, viam ad reliquas determinationes Geometriæ studioso aperuisse.

PARS

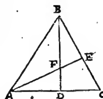
PARS SECVNDA.

De Triangulis, eorumq; proprietatibus.

PROPOSITIO XIX.

Esto ABC triangulum Isosceles, habens AB, AC, latera æqualia; ducanturq; ex A & B normales AE, BD, ad opposita latera, occurrentes sibi mutuo in F.

Dico esse AF ad BC, vt AD ad DB.



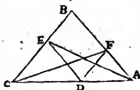
Demonstratio.

QVoniam anguli AEB, BDC, per constructionem recti sunt, & angulus EBF, communis triangulis EBF, DBC, erunt EBF, DBC triangula inter se similia. Eodem modo ostenditur triangulum AFD, simile triangulo DBC: vnde vt AD ad DB, sic AF ad BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

EX quouis puncto baseos trianguli ABC Isoscelis eductæ DF, DE exhibeant angulos æquales EDC, FDA, iunganturque AE, CF.

Dico AED, CFD triangula esse inter se æqualia.



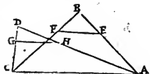
Demonstratio.

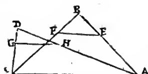
CVm enim tam angulus FDA, angulo EDC per constructionem, quàm angulus FAD, angulo ECD æqualis sit, erunt AFD, CED triangula inter se similia. Quare vt AD, ad DC, sic FD ad ED. Rursum cum angulus FDA, æquetur angulo EDC, addito communi angulo EDF, erit angulus EDA, æqualis angulo CDF. Vnde cùm & latera, æquales angulos continentia, reciprocè sint proportionalia, [a] erunt AED, CFD triangula inter se æqualia. Quod erat demonstrandum. [a] 15. Sexti.

PROPOSITIO XXI.

SInt duo triangula Isoperimetra ABC, ADC, super eadem basi AC constituta; diuisisq; AB, CD lateribus proportionaliter in E & G, ducantur EF, GH parallelæ basi AC:

Dico Isoperimetra quoque fore EBF, DGH triangula.

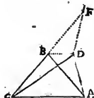




Demonstratio.

QVoniam in triangulis ABC, ADC proportionaliter sectæ sunt lineæ super basi erectæ erunt vt ABC simul sumptæ, ad EBF simul sumptas, ita ADC simul sumptæ ad HDG simul sumptas, & permutãdo vt ABC latera ad latera ADC, sic EFB ad HDG simul sumpta; sed ex suppositione æquales sunt lineæ ABC, rectis ADC: Ergo etiam EBF, rectis HDG. Sed & recta FE æqualis est lineæ GH. Igitur Isoperimetra quoque sunt triangula EBF & HDG. Quod fuit demonstrandum.

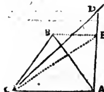
PROPOSITIO XXII.



TRiangulorum Isoperimetrorum super eadem basi constitutorum, maximam habet altitudinem Isoscelium.

Demonstratio.

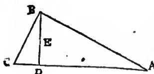
SInt ABC, ADC triangula isoperimetra, & ABC quidem isoscelium; dico ABC maioris esse altitudinis quàm sit ADC. Habeat enim si fieri possit triangulum ADC, eandem cum ABC triangulo altitudinem: producatur CB in E, vt BE linea sit æqualis lineæ CB iunganturque BD, ED. Quoniam AC, BD lineæ ex suppositione sunt parallelę, erit angulus ABD, æqualis angulo CAB, id est angulo ACB, id est angulo EBD; sunt autem latera duo BE, BD, duobus AB, BD lateribus æqualia; igitur triangulũ ABD æquale triangulo EBD, & AD latus, lateri ED æquale. Sed ED, DC latera simul sumpta, maiora sunt latere EC, hoc est lateribus AB, BC simul sumptis; igitur & AD, DC latera simul sumpta, maiora sunt lateribus AB, BC. Quod est cõtra hypothesin. vnde triangulum ADC, eandẽ non habet altitudinẽ cum triangulo ABC.



Habeat iam ADC triangulum, maiorem altitudinem quàm ABC; ducatur ex B linea BE, parallela basi AC, occurrens AD lateri in E; iunganturq; CE. Quoniam AEC triangulum, eandem habet altitudinem cũ triangulo ABC, & ABC sit Isoscelium; erunt AE, CE latera simul sumpta, maiora lateribus AB, BC simul sumptis per primam partem huius propositionis; sed AD, DC latera maiora sunt lateribus AE, EC; cùm E cadat infra D, igitur & latera AD, DC, multo maiora sunt lateribus AB, BC. Quod est contra hypothesim. igitur triangulum ADC, maiorem non habet altitudinem triangulo ABC; sed neque æqualem habet; igitur triangulorum isoperimetrorum super eadem basi constitutorum, &c. Quod erat demonstrandum.

Propositio hæc aliter demonstratur libro nostro de Ellipsi.

PROPOSITIO XXIII.



ESto ABC triangulum rectangulum, & ex B, ad AC basim, demissa normalis BD.

Dico ABC triangulum, ad tria laterum quadrata, eam habere rationem, quam BD linea ad quadruplum lineæ AC.

Demon-

Demonſtratio.

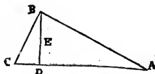
QVoniam Angulus ABC ponitur rectus, & BD normalis, erunt ABD, ABC triangula ſimilia, & AB ad BD, vt AC ad CB, vnde ABC [a] rectangulum æquale rectangulo AC, BD, ſed AC, BD rectangulum, eſt ad quadratum AC, vt BD linea ad lineam [b] AC; igitur & ABC rectangulum, eſt ad quadratum AC, vt BD linea ad lineam AC: eſt autem quadratum AC, æquale quadratis [c] AB, BC, igitur rectangulum ABC, eſt ad tria laterum AB, BC, CA quadrata vt idem rectangulum, ad quadratum AC bis ſumptum; id eſt vt BD linea ad AC lineam bis ſumptam. ſed ABC triangulum, dimidium eſt rectanguli ABC, igitur triangulum ABC, ad AC quadratum bis ſumptum, id eſt ad tria laterum quadrata, illam habet rationem, quam BD linea, ad quadruplum lineæ AC. Quod erat demonſtrandum.

a 17. Sexti.
b 1. Sexti.
c 47. Primi.

PROPOSITIO XXIV.

IIſdem poſitis, diuidatur BD biſariam in E.

Dico ABC triangulum, ad quadrarum BC, eam habere rationem, quam haber ED linea, ad lineam DC.

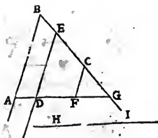


Demonſtratio.

QVoniam BD linea in E diuiſa eſt biſariam, erit ABC triangulum, æquale rectangulo ACDE; nam in præcedenti propoſitione oſtenſum eſt, rectangulum ABC, æquale rectangulo ſuper AC & BD: rurſum cùm ABC angulus ſit rectus, & BD normalis, erit ACD rectangulo, æquale quadratum BC: quare ABC triangulum, eſt ad quadratum BC, vt ACDE rectangulum, ad rectangulum ACD, id eſt vt ED linea, ad lineam DC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

LAteri AB, anguli ABC, æquidiſter DE. oportet per F punctum intra angulum DEC, rectam ponere AG, vt AD ad FG, datam habeat rationem H ad I.

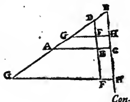


Conſtructio, & demonſtratio.

DVcatur FC, quæ æquidiſtet ipſi AB; & fiat vt H ad I, ſic BE ad CG: dein ponatur GFA. Dico factũ quod requiritur. cùm enim ſit tam EB ad AD quàm CG ad FG, vt EG ad DG, (ob AB, ED, CF parallelas) erit EB ad AD, vt CG ad FG; & permutando AD ad FG vt BE ad CG; id eſt per conſtructionem vt H ad I. igitur &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVI.

IN dato triangulo ABC, parallelam vni laterum conſtituere, rectam DE: vt quadratum ED, æquale ſit AEC, rectangulo.



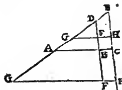
Con-

Constructio & demonstratio.

a Per elementa.

VT AC quadratum, ad CB quadratum, ita fiat linea AE ad a EC: & erigatur ED, quæ æquidistet ipsi BC. Dico ED soluere problema; quoniam enim DE æquidistat rectæ BC, erit quoque quadratum AE, ad ED, vt AC quadratum, ad CB: hoc est vt linea AE, ad EC: igitur sunt tres in continua ratione AE, ED, EC. cum ratio quadrati AE, ad DE quadratum, hoc est ratio AE, ad EC, duplicata sit rationis AE lineæ, ad ED lineam; est igitur quadratum DE, æquale rectangulo AEC. Quod erat exhibendum.

PROPOSITIO XXVII.



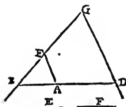
IIsdem positis constituatur GH, quæ æquidistet basi AC.

Dico rectangulo GFH æquari rectangulum FDE.

Demonstratio.

REctangulum GFH, ad FDE rectangulum, rationem habet compositam, ex ratione GF, ad FD, hoc est AE ad ED; & ex ratione FH, ad ED, hoc est EC ad ED; si igitur fiat vt EC, ad ED, ita ED ad aliam, erit illa per præcedentem ipsa AE: igitur vt AE ad AE, ita rectangulum GFH ad FDE: patet igitur æqualia esse rectangula illa inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

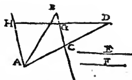


DAto A. puncto, intra angulum BCD, per illud lineam BAD ducere, quæ diuisa sit in A iuxta datam rationem E ad F.

Constructio, & demonstratio.

POnatur AE, æquidistans ipsi DC: & fiat vt E ad F, ita CE ad EB: deinde ex B, per A ducatur recta BAD, quæ pertingat in D. Dico factum quod quæritur: manifestum est ex elementis.

PROPOSITIO XXIX.



A Dato puncto D extra angulum ABC. rectam ponere quæ diuidatur secundùm datam rationem à lineis angulum constituentibus.

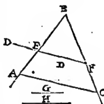
Constructio & demonstratio.

SIt data ratio E ad F, & ex D puncto ducatur quæuis GH: Ita vt sit DG ad GH vt E ad F: quo facto ponatur HA parallela ipsi BG. & ducatur DA, occurrens BG productæ in C. Dico DC ad CA, eandem rationem continere, quæ reperitur inter datas E, F. Cùm enim æquidistent AH, CG. erunt in eadem ratione DC, CA, cum rectis DG GH: hoc est E & F. præstitimus igitur quod requisitum fuit.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Dato angulo ABC, & D puncto extra lineas datas: rectam DF ponere quæ rectas EB BF auferat, in data ratione G ad H.



Constructio & demonstratio.

Fiat vt G ad H, ita BA ad BC. iunctæque AC ducatur DF æquidistans: patet ex elementis factum esse quod petitur.

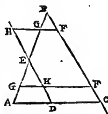
PROPOSITIO XXXI.

Esto ABC trianguli basis AC; quâ diuisâ in D, vt DE recta æquidistans lateri BC, media quoque sit, inter AD, DC: ducatur quæuis GF, parallela basi AC, occurrens ED lineæ in H.

Dico GHF rectangulum, æquari rectangulo DEH.

Demonstratio.

Est enim vt AD ad DE, sic GH ad HE: quia AD, GH lineæ æquidistant; sed vt AD ad DE, sic DE est ad DC, ex hypothesi; ergo etiam vt GH ad HE, sic DE ad DC: est autem HF ipsi DC [a] æqualis, igitur vt GH ad HE, sic DE ad HF: & GHF rectangulum, [b] æquale rectangulo DEH. Quod fuit demonstrandum.



a 34. Primi.

b 17 Sexti.

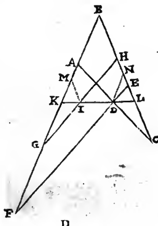
PROPOSITIO XXXII.

Esto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D; actâque per D lineâ EF, occurrente trianguli ABC lateribus, in E & F, ducatur quædam HG parallela rectæ EF, vt HI illius dimidia, media quoque sit inter ED & DF;

Dico GBH triangulum, æquale esse triangulo ABC.

Demonstratio.

Actâ per D & I, lineâ KL, eriganturex I & D lineę IM, DN: & IM quidem lateri CB; DN verò AB lateri parallela. Vt FD ad GI, sic GI est ad DE per hypothesim, sed vt FD ad GI, sic DK est ad IK, & vt IH ad DE, sic IL ad DL, igitur vt DK ad IK, sic IL ad DL, & diuidendo vt DI ad IK, sic DI ad DL: quare IK, DL lineæ sunt inter [c] se æquales. ac proinde cùm (vt ex constructione patet,) triangula KMI, DNL, singula triangulo KBL similia sint, erunt & inter se similia, adeoque (cùm IK, DL rectæ æquentur) erunt & inter se æqualia; latusque KM,



c 9. Quinti.

lateri D N, & M I latus, N L lateri æquale: Rurſum eſt vt K I ad I L, ſic K M ad M B, & vt L D ad D K, ſic L N ad N B. ſed vt K I ad I L, ſic L D ad D K, (ex antè dictis) igitur vt K M ſiue D N ad M B, ſic L N ſiue I M ad N B: ſed quia *C A dupla ponitur ipſius C D, erit & *A B ipſius D N, & C B ipſius C N, id eſt rectæ N B dupla: ſimiliter quia G H linea, ipſius G I dupla eſt, erit quoque B H dupla lineæ M I; vti & G B ipſius M B; ſunt autem D N, M B, I M, N B oſtenſæ proportionales, ergo & A B, B G, B H, B C illarum duplæ quoque ſunt proportionales: & A B C, G B H triangula inter ſe æqualia, cùm circa communem angulum A B C, latera habeant reciprocè proportionalia. Quod fuit demonſtrandum.

a 15. Sexti.

PROPOSITIO XXXIII.

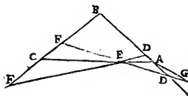
Iiſdem poſitis quæ ſuprà: ſi H B G triangulum æquale fuerit triangulo A B C: Dico quadratum G I, dimidiæ ſcilicet ipſius G H, æquale eſſe rectangulo F D E.

Demonſtratio.

IVngantur puncta A H, G C. Quoniam A B C triangulum per hypotheſin æquale eſt triangulo G B H, ablato communi triangulo A B H, æqualia remanent triangula A G H, A C H, vnde & A H, G C lineæ b ſibi mutuò æquidiſtant. & cùm L K linea, biſariam ſecet rectas A C, H G, ex hypotheſi erit & L K, ipſi A H parallela, & I K recta, æqualis rectæ D L; quare vt D I ad I K ſic I D ad D L, & componendo vt D K ad I K. ſic I L ad D L: ſed eſt vt D K ad I K, ſic F D ad I G, & vt I L ad D L ſic I H ad D E; igitur vt F D ad G I, ſic H I ſiue G I ad D E: adeoque F D E rectangulum æquale quadrato G I. Quod erat demonſtrandum.

b 40. Primi.

PROPOSITIO XXXIV.



DAto angulo A B C, & intra illum puncto E, oportet per E rectam ducere, occurrentem vtrimque anguli lateribus, cuius ſegmenta minimum contineant rectangulorũ quod ſegmentis cuiuſuis lineæ per E ductæ contineri poteſt.

Conſtructio & demonſtratio.

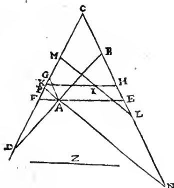
COnſtituat recta A C, per E ducta Iſoſcelem A B C, dico factum eſſe quod petitur; agatur enim per E recta quæuis alia F E D, & ſi C E A rectangulum non ſit minimũ, ſit D E F rectangulũ, vel æquale rectangulo A E C, vel minus: primo ſit æquale. Quoniam igitur A E C, D E F rectangula ſunt inter ſe æqualia, erit vt D E c ad A E, ſic E C ad E C, ſunt autem anguli ad E oppoſiti inter ſe æquales; igitur triangula A E D, F E C ſunt inter ſe ſimilia; adeoque angulus *D A E, id eſt B C A externus, æqualis angulo interno C F E. Quod d fieri non poteſt: quare D E F rectangulum, æquale non eſt rectangulo A E C.

c 14. Sexti. x 5. Primi. d 16. Primi.

Sit igitur D E F rectangulum minus rectangulo A E C. producatur F D linea in G, vt

PROPOSITIO XXXV.

Dato puncto A intra angulum B C D; per A rectam ducere pertingentem ad latera B C, C D, vt rectangulum quod sub segmentis continetur, æquale sit quadrato dato Z: quod oportet esse non minus minimo rectangulorum quæ segmentis linearum per A ductarum continentur.



Constructio & demonstratio.

Quadratum Z vel æquale est minimo rectangulorum quæ sub segmentis linearum per A describi possunt, vel maius. Si æquale, agatur per A linea E F exhibens E C F triangulum isosceles; patet per præcedentem E A F rectāgulum æquari quadrato Z. sit igitur quadratum Z maius minimo rectangulorum. Ducatur per A linea D B vt in A diuisa sit bifariam (quod fiet si ducta ex A linea A G parallela lateri C B, fiat D G linea æqualis lineæ G C: & ex D per A recta ducatur D B) dein ducatur linea H K, parallela rectæ E F, [a] triangulum auferens H C K [a 32. Huius.] æquale triangulo B C D, eritq; H C K quoque isosceles, & H I quadratum [b] quod [b 33. Huius] fit à dimidia lineæ H K, æquale rectangulo E A F: quod per hypothesim minus est quadrato Z. dupla igitur rectæ Z maior erit lineâ H K, poteritque auferre triangulum isosceles sub angulo C, maius triangulo H C K. Ducatur ergo L M, dupla rectæ Z, auferens [c] triangulum L C M æquale triangulo H C K: & per A recta agatur N P, parallela lineæ L M. [c 32. Huius.] Dico factum esse quod petitur. cùm enim recta B D in A diuisa sit bifariam, & per A ducta quædam N P, cuius parallela L M, triangulum aufert æquale triangulo H C K, id est per constructionem æquale triangulo B C D; [d 33. Huius.] erit N A P rectangulum æquale [d] quadrato dimidiæ ipsius L M, id est per constructionem quadrato Z. duximus igitur per A lineam, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXXVI.

Esto A B C triangulum scalenum ductâq; ex C, lineâ C D, ad oppositum latus, quæ angulum A C D æqualem faciat angulo A B C, ducatur ex D linea D E, parallela ipsi C B; quam in H secent rectæ quotcunque F G, parallelæ ipsi C D, occurrentes C A D trianguli lateribus in F, & G.



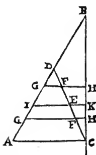
Dico D H E rectangula, æquari rectangulis F H G.

Demonstratio.

Angulus A G F, id est A C D, per constructionem est æqualis angulo A B C, id est A D E: sunt autem & anguli F H D, E H G ad verticem oppositi inter se

æquales, igitur DFH, HEG triangula sunt similia. Vnde FH ad HD, vt HE ad
a 17. Sexti. HG, adeoque DHE a rectangula, æqualia rectangulis FHG. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.



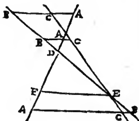
Esto ABC triangulum, ducaturque ex C, recta quæuis CD, secans AB latus oppositum in D; diuisa autem CD bifariam in E, agatur per E linea IK, parallela basi AC, cui & alia quęuis GH, ducatur æquidistans, occurrens CD lineæ, in F.

Dico IEK rectangulum, maius esse rectangulo GFH.

Demonstratio.

b 23. Sexti. Ratio IEK rectanguli, ad rectangulum GFH, b composita est ex ratione IE ad GF, id est DE ad DF, & ex ratione EK ad FH, id est EC ad FC: sed ex
c Ibid. iisdem quoque c composita est ratio rectanguli DEC, ad rectangulum DFC. Igitur vt DEC rectangulum, ad rectangulum DFC, sic IEK rectangulum, est ad re-
d Papp. l. 7. Prop. 13. ctangulum GFH. est autem DEC rectangulum maius rectangulo d DFC (cùm DC in E diuisa sit bifariam) igitur & IEK rectangulum maius est rectangulo GFH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.



Occurrant AB lineæ quotcunque inter se parallelæ, rectis EBD, EC, EF: quas omnes secet linea FAD.

Dico ABC rectangulum, ad rectangulum ABC, eam habere rationem, quam habet DBE rectangulum, ad rectangulum DBE.

Demonstratio.

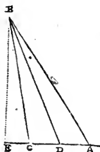
e 23. Sexti. Ratio rectanguli ABC, ad rectangulum ABC, e componitur ex ratione AB ad AB, id est DB ad DB, & ex ratione BC ad BC, id est BE ad BE, sed ex iisdem composita est ratio rectanguli DBE, ad rectangulum DBE, igitur rectangulum ABC, ad ABC rectangulum, eam habet rationem, quam DBE rectangulum, ad rectangulum DBE. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

Esto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D, & recta ducta BD.

Dico

Dico quadrata AB, BC simul sumpta, æqualia esse quadratis AD, DB bis sumptis.



Demonstratio.

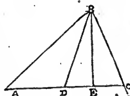
Demittatur ex B linea BE, normalis ad basim AC; & BE quidem 1. cadat extra triangulum ABC: Quoniam igitur BE normalis, cadit extra triangulum ABC formans angulum AEB rectum, patet angulos BAE, BDE, BCE acutos esse; quare AB quadratum superat[a] quadrata AD, DB, rectangulo ADE bis sumpto. & BC[b] quadratum ab iisdem deficit rectangulo CDE, id est ADE bis sumpto: addendo igitur ad quadratum BC, excessum quo AB quadratum, superat quadrata AD, DB, fit vt AB, BC quadrata simul sumpta æqualia sint quadratis AD, DB bis sumptis.

a 13. Secundi.
b 12. Secundi.



Sit iam EB normalis, eadem cum latere BC, adeoque angulus ACB rectus; quadratum AB, superat[c] quadrata AD, DB, rectangulo ADC bis sumpto. id est quadratum AB, est æquale quadratis AD, DB, & DC quadrato bis sumpto: sed BC quadratum, deficit[d] à quadrato BD, quadrato DC; igitur si quadratum DC, id est dimidium excessus quo AB quadratum superat quadrata AD, DB, addatur quadrato BC; patet AB, BC quadrata, æquari quadratis AD, DB bis sumptis.

c Ibid.
d 13. Secundi.

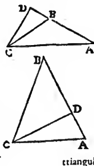


Cadat BE normalis, inter BC & BD lineas; Quoniam anguli AEB, CEB sunt recti, erunt AB, BC quadrata, æqualia quadrato BE bis sumpto, vna cum quadratis AE, EC: sed AE, EC quadrata,[e] dupla sunt quadratorum AD, DE; igitur quadrata AB, BC, æqualia sunt, quadratis BE, AD, DE bis sumptis; est autem BD quadratum bis sumptum, æquale quadratis DE, BE bis sumptis; igitur quadrata AB, BC simul sumpta, sunt æqualia quadratis AD, DB bis sumptis. Quod erat demonstrandum.

e 9. Secundi.

Est hæc Pappi Lib. 7. Prop. 122.

PROPOSITIO XL.



Esto ABC triangulum isosceles, & ex C, alterutro angulorum æqualium, ducta normalis CD, ad latus oppositum;

Dico quadrata tria laterum trianguli, ABC æquari quadrato AD semel; quadrato DB bis, & DC quadrato ter sumpto.

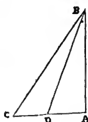
Demonstratio.

Quoniam angulus CDB per constructionem rectus est, erit CB quadratum, æquale quadratis CD, DB: sed AB linea ex constructione est æqualis lineæ CB; igitur & quadratum AB, æquale est quadratis CD, BD. Rursum quadratum AC, æquale est quadratis CD, DA: igitur tria laterum

 trianguli

trianguli A B C quadrata, sunt æqualia quadrato A D semel, quadrato D B bis, & C D quadrato ter sumpto. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.



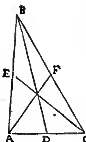
Esto A B C triangulum rectangulum, & ex B recta demittatur quævis B D, ad oppositum latus A C.

Dico A D, B C quadrata simul sumpta, æquari quadratis A C, B D simul sumptis.

Demonstratio.

Quoniam angulus B A C rectus ponitur, erit B C quadratum, vna cum quadrato A D, æquale tribus quadratis A B, A C, A D: sed ijsdem æquale est quadratum B D vna cum quadrato A C, igitur A D, B C quadrata, æqualia sunt quadratis A C B D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLII.



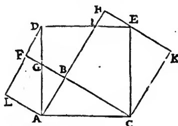
Esto A B C triangulum, & ex singulis angulis ductæ lineæ B D, A F, C E secent latera opposita bifariam in D, E, F.

Dico A F, E C, B D, quadrata, ad quadrata tria laterum trianguli A B C, eam habere rationem, quam tria ad quatuor.

Demonstratio.

a 39. Huius. Quadrata A B, B C simul sumpta, æqualia sunt quadratis B D, a A D bis sumptis; & A C, B C quadrata, æqualia sunt quadratis E C, A E bis sumptis; quadrata verò A B, A C æquantur quadratis A F, C F bis sumptis; igitur quadrata A B, B C, C A semel sumpta, æqualia sunt quadratis A F, C E, B D, A D, A E, C F semel sumptis. Sed A D, A E, C F quadrata, sunt quarta pars quadratorum A B, B C, A C; igitur quadrata reliqua A F, C E B D, tres habent quartas, quadratorum A B, B C, A C. Quod erat demonstrandum.

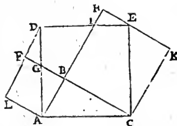
PROPOSITIO XLIII.



In triangulis rectāgulis quadratum, quod fit à latere rectum angulum subtendente, æquale est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus, describuntur quadratis.

Demonstratio.

Sit A B C triangulum rectangulum, & laterum quadrata sint A E, A F, C H, & F B linea secet A D in G. Quoniam anguli K C B E C A sunt inter se æquales dempto communi angulo E C B, erunt anguli A C B, E C K reliqui, inter



inter se æquales: sunt autem E C, K C duo latera, æqualia duobus lateribus A C, C B: igitur reliquum latus trianguli C K E, reliquo lateri trianguli A B C est æquale: vnde punctum E est in recta H K, & E K C triangulum, æquale triangulo A B C. Eodem modo ostenditur triangulum A B C æquale triangulo D L A, & punctum D esse in directum cum L F producta. Rursum cùm D L latus, æquale sit lateri C K, hoc est K H, & F L æquale ipsi A B, id est E K; erit reliquum latus E H, æquale reliquo D F: est autem angulus F G D (ob B F, L A parallelas) æqualis angulo D A L, id est I A C, id est angulo E I H: & angulus E H I, æqualis angulo D F G, igitur D F G, E H I triangula, & D G, I E latera sunt inter se æqualia. Iterum cùm anguli A D I, G A C sint inter se æquales, & A C, A G latera, æqualia lateribus A D, D I, erit I D A triangulum, æquale triangulo G A C; vnde dempto communi triangulo A B G, erit A B C triangulum, æquale Trapezio I B G D I. Igitur cùm triangulum A B C, id est E K C æquale sit trapezio I B G D I, & D F G triangulum, æquale triangulo E H I, reliqua verò sint communia, erit A E quadratum, lateris rectum angulum subtendentis, æquale quadratis A F, C H, laterum rectum angulum continentium. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

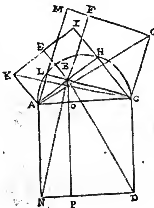
Demonstrat hanc Clauius ad 47. primi Element. triplici aliâ methodo: secus quàm Peletarius fieri posse existimauit: copiæ tamen, non necessitatis ergo, etiam nos illam, aliâ viâ demonstrandam assumpsimus, maximè occasione sequentium duarum propositionum.

PROPOSITIO XLIV.

Esto A B C triangulum amblygonium, & laterum quadrata A D, A E, C F. ducaturq; ex C linea C H secans orthogonaliter in H & I, lineas A B, K E.

Dico A D quadratum, superare quadrata A E, C F, rectangulo A B H bis sumpto.

Demonstratio.



Ducatur ex A linea A M, secans in L & M orthogonaliter lineas C B G F, & super A C vt diametro describatur semicirculus A H C; a trâsibit is per H & L. Iunganturq; puncta A G, C K, B D, B N, dein ex B, recta demittatur B O, secans orthogonaliter in O P, lineas A C. D N. Quoniam A M, C G lineæ, per constructionem æquidistant, erit A G C triangulum æquale dimidio rectanguli G L: eodem modo triangulum C A K, æquale est dimidio rectanguli A I; Rursum cùm anguli A B, K C A N, per constructionem recti sint, addito communi angulo B A C, erunt anguli B A N, C A K inter se æquales: sunt autem A B, A N late- a 31. Tertij.

ra,

ra, æqualia duobus lateribus A C, A K; igitur triangulum N A B, æquale est triangulo C A K, & A I rectangulũ, æquale rectangulo A P: eodem modo ostenditur rectangulum C M, æquari rectangulo C P. Vnde A D quadratum, æquale est rectangulis A I, C M simul sumptis. Sed A I rectangulum, superat quadratum A E, rectangulo B I, id est rectangulo A B H, & C M rectangulum, superat quadratum C F, rectangulo B M, id est rectangulo C B L, id est A B H rectangulo; igitur quadratum A D, superat quadrata A E, C F, rectangulo A B H bis sumpto. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

Propositionem hanc, uti & sequentem, licèt demonstret Euclides Lib. 2. prop. 12. & 13. non iniucundum tamen fore putaui, si vtramque eo discursu quo Pythagoras 47. primi Element. hoc loco demonstrarem.

PROPOSITIO XLV.

ESTo A B C triangulum oxygonium, & laterum quadrata A D, C E, A F. Ducaturque ex A linea A G, secans orthogonaliter in H, & G, lineas C B, I E.

Dico A D quadratum deficere à quadratis C E, A F, rectangulo H B C bis sumpto.

Demonstratio.

Dvcatur ex C linea, secans orthogonaliter in L & K lineas A B, F M, iunganturque puncta A I, C M, B D, B N. descripto dein super A C vt diametro, semicirculo A H C, (qui transibit per a H & K) demittatur ex B, linea B O, secans orthogonaliter in O & P, lineas A C, D N. Quoniam A M, L C lineæ æquidistant, erit M A C triangulum, æquale dimidio rectanguli A K, eodemq; modo triangulũ A I C,

a 31. Tertij.

æquale dimidio rectanguli C G. rursum cùm anguli M A B, C A N per constructionem sint æquales, addito communi angulo B A C erunt anguli M A C, B A N quoque inter se æquales, sunt autem & latera A M, A C æqualia duobus lateribus A B, A N, igitur triangulum M A C, æquale triangulo B A N, & A K rectangulum, æquale rectangulo A P: duplo nimirum trianguli B A N. Eodem modo ostenditur rectangulum C G, æquale esse rectangulo C P: quare A D quadratum, æquale est rectangulis C G, A K. sed C G rectangulum deficit à quadrato C E, rectangulo H E: id est rectangulo H B C; & A K rectangulum, deficit à quadrato A F, rectangulo L F, id est rectangulo A B L, id est rectangulo H B C; igitur quadratum A D, deficit à quadratis C E, A F, rectangulo H B C, bis sumpto. Quod erat demonstrandũ.

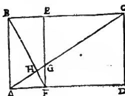
PRO-

PROPOSITIO XLVI.

Parallelogrammi ABC, diametrum AC, secet EF, æquidistans ipsi AB in G. ponatur insuper BF.

Dico GH, HA, HC. tres esse in continua ratione.

Demonstratio.



Similia namque sunt triangula, AHF, BHC, quemadmodum & triangula GHF, AHB: quare vt CH ad HA, hoc est BH ad HF, ita HA ad HG. Quod erat demonstrandum.

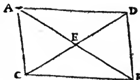
AHB

PROPOSITIO XLVII.

Sint AB CD cuiuscumque parallelogrammi, diametri AB, CD.

Dico diametrorum quadrata simul sumpta, æqualia esse quadratis laterum figuræ.

Demonstratio.



Per trigesimam nonam huius, quadrata AC, AD æquantur quadratis EC, EA bis sumptis: & per eandem quadrata CB, BD æqualia sunt iisdem; scilicet quadratis EC, EB bis sumptis, sed quadratum CD a æquatur EC quadrato quater sumpto, & AB quadratum, quadrato EA quater sumpto: patet ergo veritas propositionis.

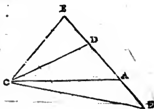
a 4. Secundi.

PROPOSITIO XLVIII.

Esto ABC triangulum isosceles, ductâque ex C, alterutro angulorum æqualium, vtcunque lineâ CD, quæ AB lateri, occurrat in D, fiat ipsi CD æqualis DE, iunganturque EC.

Dico angulum BCD, duplum esse anguli ACE.

Demonstratio.



Angulus DAC æqualis b est duobus angulis DEC, ACE, id est per constructionem, angulo DCE vnà cum angulo ACE, id est angulo DCA vnà cum angulo ACE bis sumpto. Sed angulo DAC æquatur angulus BCA, cùm ABC sit isosceles; igitur angulus BCA, æquatur angulo DCA, vnà cum angulo ACE bis sumpto, dempto igitur communi angulo DCA, manet angulus BCD, æqualis angulo ACE bis sumpto. Quod erat demonstrandum.

b 16. Primi.

PROPOSITIO XLIX.

ESto ABC triangulum obtusangulum, oporteat AB latus subtensum angulo obtuso ita secare in E, vt AE, EB quadrata, æqualia sint quadratis AC, CB.

Constructio, & demonstratio.

PRoductâ AC in F, vt AC, CF lineæ sint inter se æquales, iungantur FB, producaturque AB in G vt GB, BF lineæ sint æquales: tum AG bifariam secetur in E: Dico factum esse quod petitur: Quoniam AC, CF lineę sunt inter se æquales, erūt ABC, CBF triangula æqualia, & quia angulus ACB obtusus est, erit AB latus, subtensum angulo ACB, maius latere BF, id est per constructionem, latere GB. quare punctum E cadet inter A & B. igitur cùm AG linea diuisa sit bifariam in E, & non bifariam in B, erunt AB, BG quadrata dupla [a] quadratorum AE, EB: sed & AB, BG quadrata, id est AB, BF, dupla [b] sunt quadratorum AC, CB, igitur quadrata AE, EB, æqualia sunt quadratis AC, CB. diuisimus igitur latus AB, &c. Quod erat faciendum.

a 9. Secundi. b 19. Huius.

Aliter.

DEmittatur ex B linea BD, normalis ad rectam AC, seceturque AB in E vt AEB rectangulum æquetur rectangulo ACD (quod fieri posse ex eo constat, quod AB linea maior sit lineâ AD.) Dico factum esse quod petitur. Quadratum AB æquale est quadratis AC, CB & ACD [c] rectangulo bis sumpto, sed & AB quadratum æquale [d] est quadratis AE, EB & AEB rectangulo bis sumpto, igitur quadrata AC, CB, vnà cum rectangulo ACD æqualia sunt quadratis AE, EB, vnà cum rectangulo AEB: sunt autem ACD, AEB rectangula inter se per constructionem æqualia, igitur & quadrata AC, CB, æqualia sunt quadratis AE, EB. diuisimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

c 12. Secundi. d 4. Secundi.

PROPOSITIO L.

DAtis duobus triangulis ABC, CDE inæqualis altitudinis, super eadem, vel æquali basi in directum constitutis, lineam ducere, parallelam basi AC, quæ auferat triangula in data ratione M ad N.

Constructio & demonstratio.

DVcatur ex D linea DK, parallela basi AC, occurrens ABC trianguli lateribus, in K & L: dein fiat vt M ad N, sic LBK triangulum, ad triangulū OPQ, quod simile sit triangulo CDE. tum quędam ducatur FG, parallela basi AC, occurrens ABC trianguli lateribus in F & G, & CDE trianguli lateribus in H & I, vt [e] FG sit ad HI, sicut LK ad PQ. Dico factum esse quod petitur. Quoniam FG est ad HI, vt LK ad PQ, erit permutando inuertendo vt LK ad FG, sic PQ ad HI: sed LBK triangulum, est ad triangulum FBG, in duplicata [f] ratione eius, quam habet LK linea, ad lineam FG, & POQ triangulum est ad triangulum CDE in duplicata [g] ratione lineę PQ ad

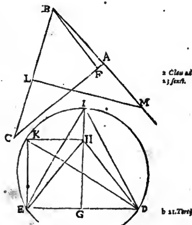
e 16 Huius. f 19. Sexti. g Ibid.

ad HI, quia P O Q, H D I triangula sunt similia; igitur vt triangulum L B K ad triangulum F B G, ita est triangulum P O Q, ad triangulum H D I, & permutando vt L B K triangulum, ad triangulum P O Q, sic F B G triangulum, est ad triangulum H D I: sed L B K triangulum, per constructionem est ad triangulum P O Q vt M ad N, igitur vt M ad N sic F B G triangulum est ad triangulum H D I. Duximus igitur lineam, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LI.

DAto triangulo A B C, lineâ D E, & angulo A B C. Oporteat in eodem angulo A B C rectam subtendere L M, datæ D E æqualem, quæ auferat triangulum, dato A B C triangulo æquale. Oportet autem A B C triangulum, non esse maius isosceli, quod super D E poni potest, habens ad verticem angulum, dato A B C æqualem.

Constructio & demonstratio.



SVper D E linea segmentum fiat circuli, continens angulum, A B C æqualem. Diuisaque D E bifariam in G, erigatur recta G I, normalis ad lineam A C, iunganturque puncta D I, I E. Dein ex B demittatur linea B F, normalis ad basim A C: fiatque vt D E ad A C, ita B F ad H G, erunt A B C, D H E [a] triangula inter se æqualia, & H punctum non cadet supra I, quia A B C triangulum per constructionem non est maius, triangulo D I E: tum recta ducatur H K, parallela basi D E, occurrens circulo in K. Iunctisque punctis D K, E K, fiat B M æqualis ipsi D K, & B L æqualis ipsi K E, iunganturque L M. Dico L B M triangulum satisfacere petitioni: Quoniam H K, D E lineæ sunt parallelæ, erit E K D triangulum æquale triangulo D H E, id est per constructionem triangulo A B C; est autem angulus A B C, æqualis angulo D I E, id est angulo [b] D K E, & D K, K E latera per constructionem æqualia lateribus L B, B M, igitur triangulum L B M æquale est triangulo D K E, id est triangulo A B C, & M L latus æquale lateri D E. igitur angulo A B C rectam subtendimus, &c. Quod erat faciendum.

[a] *Clau ad 15 sext.*

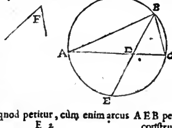
[b] *21. Tert.*

PROPOSITIO LII.

DAtâ rectâ A B, vtcunque diuisa in D; super A B triangulum constituere A C B, habens ad C verticem, angulum dato F, æqualem; quem recta ex C per D acta, diuidat bifariam.

In hac propositione ubi est B, debet. [handwritten marginal note, partly illegible]

Constructio & demonstratio.



SVper A B recta segmentum describatur circuli, continens angulum B C A æqualem dato F; perfectoque circulo A C B, secetur arcus A E B bifariam in E, & ex E per D linea agatur E C, occurrens circuli peripheriæ in C: iunganturque puncta A C, C B. Dico factum esse quod petitur, cùm enim arcus A E B per

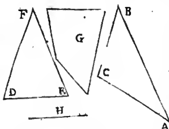
 constru-

27. Tertij. constructionem bifariam in E fit diuisus, erunt A C E, B C E anguli inter se a æquales, adeoque angulus A C B bifariam diuisus, sed angulus A C B per constructionem est æqualis angulo dato F; igitur super A B recta triangulum constituimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LIII.

Dato Angulo A B C, rectam subtendere, quæ A B C triangulum æquale constituat, figuræ rectilineæ G; sic vt A B, B C laterum, differentia sit æqualis datæ rectæ H.

Constructio, & demonstratio.



Fiat E F D triangulum isosceles æquale figuræ rectilineæ G, habens angulum ad verticem æqualē angulo A B C: habitâ dein mediâ D F, & excessu extremarum H, b inueniantur extremæ A B, B C iunganturque puncta A C. Dico factum esse quod petitur. Quoniam angulo A B C, per constructionem æqualis est angulus E F D, fit autem vt A B ad D F sic D F ad B C per constructionem, id est E F ad B C; erit A B C triangulum c æquale triangulo D F E: id est per constructionem, figuræ rectilineæ G: est autem H differentia laterum A B, B C; igitur angulo A B C rectam subtendimus, &c. Quod erat faciendum.

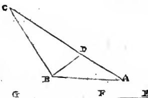
b Per Andersonium & alios.

c 15. Sexti.

PROPOSITIO LIV.

Dato Angulo A B C, rectam subtendere A C, vt ex B in A C, demissa linea B D, angulum producat A D B, æqualem angulo A B C; abscindatq; rectam C D, ad quam A B linea, datam habeat rationem H ad I.

Constructio & Demonstratio.



Fiat vt H ad I, sic A B linea ad lineam F G. dataque A B mediâ, & F G extremarum differentia, inueniantur extremæ E G, E F: erit E G maior rectâ A B. Ducatur igitur ex A linea A C æqualis rectæ E G, occurrens B C lateri in C, sumptaque C D æquali ipsi F G, iungantur puncta D B. Dico factum esse quod petitur. Quoniam tam A C, E G lineæ, quàm D C, F G sunt inter se æquales, erit A D reliqua, æqualis reliquæ E F. Quare A D est ad A B, vt A B ad A C: est autem angulus C A B, communis triangulis A D B, A C B; igitur triangula A D B, A C B sunt d inter se similia: angulusque A D B æqualis angulo A B C. Rursum cùm D C per constructionem sit æqualis ipsi F G, erit vt A B ad F G, sic A B ad D C, sed A B est ad F G per constructionem vt H ad I, igitur vt H ad I, sic A B est ad D C; vnde angulo A B C rectam subtendimus &c. Quod erat faciendum.

d 23. Sexti.

PARS

PARS TERTIA.

De rectangulorum inter se proportione.

PROPOSITIO LV.

SI AB linea, diuisa fuerit vtcunque in C & D: Dico ACB, CDB rectangula, æqualia esse rectangulis BDA, DCA.

A C D B

Demonstratio.

QVadratum AB, æquale est BA quadrato; sed AB [a] quadratum æquatur quadratis AC, CD, DB, vnà cum rectangulis ACB, CDB, bis sumptis, & BA quadratum æquatur quadratis BD, CD, CA, vnà cum rectangulis BDA, DCA bis sumptis: Igitur ablatis communibus quadratis AC, CD, DB, remanent ACB, CDB rectangula, æqualia rectangulis BDA, DCA. [a] 4. secundi.

Corollarium.

PRopositio hæc quoque vera est, si AB linea, vtcumque & quotcumque punctis diuidatur. Eademque est methodus progrediendi, & demonstrandi, qua in propositione vsi sumus.

PROPOSITIO LVI.

SI fuerit vt AB ad BC, sic AD ad DF, & BC lineæ æqualis EF: Dico ABDE, rectangulum æquale esse rectangulo CBD.

A B C D E F

Demonstratio.

QVoniam per constructionem est, vt AB ad BC, sic AD ad DF, erit permutando, inuertendo, vt AD ad AB, sic DF ad FE, id est ad BC: & diuidendo, vt AB ad BD, sic FE ad DE, id est BC ad DE: quare ABDE rectangulum, æquale est rectangulo CBD. Quod erat demonstrandum.

A B C E F
D

PROPOSITIO LVII.

SI fuerit AB recta diuisa in C & D vt AC DB, lineæ sint inter se æquales;

A C D B

Dico CB quadratum, æquari quadrato AC vnà cum rectangulo ABCD.

Demonstratio.

QVadratum [a] AB, æquale est quadratis AC, CB, vnà cum ACB rectangulo bis sumpto: sed [b] AC quadratum, vnà cum rectangulo ACB, æquale est rectangulo [a] 4. secundi [b] 3. secundi

ctangulo CAB, igitur quadratum AB, æquale est quadrato CB, vnà cum rectangulis ACB, CAB. Rursum c AB quadratum, æquale est rectangulis AB CD, CAB; DBA; igitur quadratum CB, vnà cum rectangulis ACB, CAB, æquale est rectangulis AB CD, CAB; DBA. quare dempto communi rectangulo CAB; æqualia remanent CB quadratum, vnà cum rectangulo ACB, rectangulis ABCD, DBA, id est rectangulis ABCD, BDA, vnà cum quadrato DB: ablatis igitur æqualibus rectangulis BDA, ACB, manet CB quadratum, æquale quadrato DB, id est AC, vnà cum rectangulo ABCD. Quod fuit demonstrandum.

c 2. Secundi.

PROPOSITIO LVIII.

A B E C D

SI fuerit AD linea, diuisa in B & C, vt AB CD lineæ sint æquales, sumatur autem inter B & C, punctum quoduis E;

Dico AED rectangulum, æquale esse rectangulis CEA, EBA, vnà cum quadrato AB.

Demonstratio.

a 1. Secundi.
b Ibid.

REctangulum AED, æquale est reectangulis a ABEC, BEC; BECD, vnà cum quadrato AB: sed iisdem, æqualia sunt rectangula AEC, ABE, vnà cum quadrato AB; (quia AEC, b æquatur rectangulis ABEC, BEC) igitur AED rectangulum, æquale est rectangulis CEA, EBA, vnà cum quadrato AB, Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

SI fuerit AC linea, vtcunque diuisa in D, B, E;

Dico rectangula ADC, AEC, DBE; æqualia esse rectangulis ABC, ADB, BEC, ADEC.

A D B E C

Demonstratio.

c Ibid.
d Ibid.

REctangulum ADC, æquale est reectangulis ADB, c ADBE. ADEC: & AEC rectangulum, d æquale est rectangulis, CEB, CEBD, CEDA; quare addito rectangulo DBE, erunt ADC, AEC, DBE rectangula, æqualia rectangulis ADB, ADBE, ADEC, CEB, CEBD, CEDA, DBE. sed & ABC rectangulum, æquale est reectangulis DBE, ADBE, CEBD, CEDA; additis igitur rectangulis ADB, BEC, ADEC, erunt ABC, ADB, BEC, ADEC rectangula, æqualia rectangulis ADB, ADBE; ADEC, CEB, CEBD, CEDA, DBE: sed & iisdem reectangulis, ostensa sunt æqualia, reectangula ADC, AEC, DBE; Igitur reectangula ADC, AEC, DBE, æqualia sunt rectangulis ABC, ADB. BEC, ADEC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LX.

SI fuerit AB linea, diuisa in quinque partes ęquales, punctis C, D, E, F. & ei quęuis in directum adijciatur G A.

Dico GD quadratum, ęquale esse quadrato AG, vnà cum rectangulo GCB.

G A C D E F B

Demon-

Demonstratio.

QVadratum GD, æquale est quadratis AG, AD vnà cum [a] rectangulo GAD bis sumpto: sed AD quadratum, æquale est quadratis AC, CD, vnà cum rectangulo ACD bis [b] sumpto; id est vnà cum quadratis DE, EF; & GAD rectangulum bis sumptum, æquale est rectangulis, GACE, GAEB, id est rectangulo GACB (ob CE, EB lineas æquales lineæ CB) igitur quadratum GD, æquale est, quadratis AG, AC, CD, DE, EF. vnà cum rectangulo GA, CB. Rursum rectangulum GCB. æquale est rectangulis GACB, ACB: sed ACB rectangulum æquale est, rectangulis ACD, ACDE, ACEF, ACFB, id est quadratis AC, CD, DE, EF, vnà cum rectangulo GACB; igitur addito quadrato AG, erit GCB rectangulum, vnà cum quadrato AG, æquale quadrato GD. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. Secundi.
[b] Per eandem.

PROPOSITIO LXI.

SEcetur AB, in quotuis partes vtcunque in C, D, E, &c.,

A C D E B

Dico quadrata AC, CD, DE, EB, simul cum rectangulis ACB, CDB, DEB bis sumptis, æquari quadrato totius AB.

Demonstratio.

QVadratum enim AB, æquatur quadratis AC, CB & rectangulo [c] ACB bis sumpto; eodem modo quadratum CB, æquale est quadratis CD, DB, & rectangulo CDB, bis sumpto; denique & quadratum DB æquale est quadratis DE, EB, & rectangulo DEB bis sumpto. collectis igitur in vnum quadratis AC, CD, DE, EB, & rectangulis ACB, CDB, DEB bis sumptis; exsurget quantitas, quadrato AB æqualis. Quod fuit demonstrandum.

[c] 4. Secundi.

Corollarium.

HInc colligere licet; quod de duabus rectis lineis, quomodocumque diuisis etiam secundùm dissimillimas rationes, iudicium ferre debeamus. Ex discursu enim posito in demonstratione huius propositionis constat; quadrata partium cuiuscumque lineæ, cum rectangulis bis simul sumptis, quę sub partibus fiunt, secundùm tenorem propositione contentum, æqualia esse quadrato totius; vnde eam proportionem habere necessarium est quadrata partium vnius, simul cum rectãgulis bis sumptis, ad quadrata omnia partium alterius, cum rectangulis suis bis sumptis, quam ipsamet quadrata totarum inter se obtinent. Quod admiratione non caret, cùm vna quantitatum, in paucissimas partes possit diuidi, altera verò in quamplurimas.

Hoc etiam quod subiungam, ignorantibus Geometriam maximè, videbitur parùm credibile; si datum numerum verbi gratia 100 quis iubeatur, secum tacitus in plures pro libitu partes partiri, deinde singularum partium quadrata, in vnam summam collecta, seponat; quæ summæ, ex multiplicationibus partium inter se, secundùm sensum propositione contentum, coniuncta, certum quendam numerum sibi computarit. Alter verò Geometrię gnarus, sponsione cum eo facta, certet se diuinaturum eum numerum, quem supputatione facta, in codicillis conscripserit. Vt res etiam tyronum captui magis accommodetur; eam fusiùs nonnihil deduceam.

Ponatur

100

20 30 50

A — C — D — B

400 900 2500

1600 1500

3200 3000

400
900
2500
3000
3200
10000

Ponatur numerus 100. expositus, diuisus in quotuis partes; verbi gratia in AC, CD, DB. sitque AC partium 20: CD, partium 30: residuum igitur partium 50. iubetur singulas partes multiplicare per seipsas; producent hæ multiplicationes tres summas; quarum prima 400. secũda 900. tertia 2500. partes continebit. Vlterius iubetur AC, multiplicare per numerum CB. hoc est 20. per 80. & emergit summa 1600. quæ bis sumpta, excrescit ad summam 3200. Denique hoc facto, etiam numerum CD ducere in DB, & exsurget summa 1500. quæ bis sumpta efficit numerum 3000. tandem colligit hæc producta in vnam massam, cuius summa est 10000. quam Geometra discursu propositionis iam positæ, sola multiplicatione numeri 100. per 100. factam illico manifestam habebit, scilicet 10000.

PROPOSITIO LXII.

A C D B

SI fuerit AB linea, diuisa vtcunque punctis CD. Dico rectangulum sub AB, & composita ex ACDB; vnà cum rectangulo sub CD, & composita ex ACDB; æquale esse rectangulis BCA, DBC, ADB, CAD, simul sumptis.

Demonstratio.

a 1. Secundi. b 4. Secundi. c 1. Secundi. REctangulum super AB, & composita ex ACDB, æquale [a] est rectangulis CAB, DBA; id est rectangulis [b] ACB, ADB, vnà cum quadratis AC, DB; id est æquale rectangulis [c] CDB, ACDB, DCA, BDCA, vnà cum quadratis AC, DB. Rursum rectangulum super CD, & composita ex ACDB, æquale est rectangulis ACD, CDB: igitur rectangulum super AB, & composita ex ACDB, vnà cum rectangulo super CD, & composita ex ACDB, æquale est rectangulis, CDB, ACDB, DCA, BDCA, ACD, CDB, vnà cum quadratis AC, DB. Iterum rectangulum BCA, æquale est rectangulis DCA, BDCA; item DBC rectangulum, æquale est rectangulo BDC, vnà cum quadrato DB; item ADB rectangulum, æquale est rectangulis CDB, ACDB; denique rectangulum, CAD, æquale est rectangulo ACD, vnà cum quadrato AC; igitur rectangula BCA, DBC, ADB, CAD, æqualia sunt rectangulo sub AB, & composita ex ACDB, vnà cum rectangulo sub CD, & composita ex ACDB. Quod erat demonstrandum.

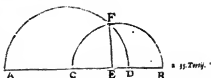
PROPOSITIO LXIII.

REctam AB, diuisam vtcunque in CD, iterum in E diuidere, vt AED rectangulum, æquale sit rectangulo BEC.

Con-

Constructio & demonstratio.

SVper AD, CB vt diametris, circuli describantur, AFD, DFC. qui occurrant sibi mutuo in F: tum ex F recta demittatur FE, normalis ad lineam AB. Dico punctum E, satisfacere petitioni, patet; cùm tam AED, quàm BEC rectangulum æquale a sit quadrato FE. igitur lineam AB, vtcumque in C & D diuisam, iterùm secuimus in E; &c. Quod erat faciendum.



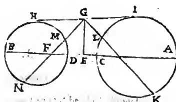
a 35. Tertij.

PROPOSITIO LXIV.

Lineam AB diuisam vtcunque in C, D. iterum diuidere in E, vt CEA rectangulum, æquale sit rectangulo DEB.

Constructio & demonstratio.

DEscribantur super AC, DB lineis, vt diametris, circuli AIC, BHD: quos in H & I contingat linea HI; quâ bifariam in G diuisa, demittatur ex G linea GE, normalis ad rectam AB. Dico punctum E, esse quod quæritur. secetur BE linea in F, vt EF quadratum sit æquale rectangulo DEB. & per F, ex G ducatur recta GN, occurrens circulo DHB in M, & N. & ex G ducatur altera GK, occurrens circulo AIC in L & K, factâ constructione vt priùs. Quoniam per constructionem, EF quadratum, æquale ponitur rectangulo DEB; & HG recta est tangens, erit FG quadratum, æquale b rectangulo MGN; sed FG quadratum æquale est quadratis EG, EF, igitur & MGN rectangulum æquale est quadratis, EG, EF: id est quadrato EG, vnà cum rectangulo DEB; eodem modo ostendetur LGK rectangulum, æquari quadrato EG, vnà cum rectangulo AEC. Vnde, cùm æqualia sint rectangula LGK, MGN, dempto communi quadrato EG, erunt AEC, DEB rectangula, inter se æqualia. Diuisimus igitur lineam AB in E, &c. Quod erat faciendum.



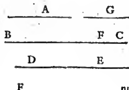
b Pappi L. 7. pr. 159.

PROPOSITIO LXV.

DAtæ sint duæ lineæ A & BF. oportet BF lineæ, quandam FC adijcere, vt quadratum A ad BCF rectangulum datam habeat rationem D ad E.

Constructio & demonstratio.

FIat vt D ad E, sic A quadratum, ad quadratum G; dein FB lineæ quædam adiungatur FC, vt BC, G, FC, tres sint incontinua analogia: quod fiet si data differentia extremarum BF. & media G. inueniantur extremæ FC, CB per Andersonium & alios. Dico factum esse quod petitur. Quoniam BC, G, FC lineæ sunt conti-



F nuæ

nuæ proportionales, erit B C F rectangulum, æquale quadrato G: igitur quadratum A est ad rectangulum B C F vt A quadratum, ad quadratum G; id est per constructionem vt D ad E. Igitur rectæ B F quandam addidimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXVI.

DAtæ lineæ A B, inæqualiter in C diuisæ, quandam B D adiicere, vt B D A rectangulum, æquale sit quadrato C D.

Constructio & demonstratio.

A E C B D

FIat A E æqualis C B. & fiat quadrato C B æquale rectangulum E C B D. Dico factum esse quod petitur. Sunt enim per constructionem continuæ D B, B C, C E, & quia A E æqualis est C B, erunt & B D, D C, D A [a] continuæ proportionales; vnde C D quadrato æquale est rectangulum B D A. addidimus igitur rectam. Quod erat faciendum.

[a] 25. Huius.

PROPOSITIO LXVII.

A B C D
E F G H

SI fuerit A ad B, vt C ad D, & E ad F, vt G ad H. Dico A H rectangulum, ad rectangulum B G, eam habere rationem, quam habet C F rectangulum, ad rectangulum D E.

Demonstratio.

RAtio rectanguli A H, ad B G rectangulum, est composita ex ratione A ad [b] B, & ex H ad G. Sed etiam ratio C F rectanguli, ad rectangulum D E, composita est ex ratione C ad D, id est per constructionem A ad B; & ex F ad E, id est H ad G. igitur rectangulum A H, ad rectangulum B G, eam habet rationem, quam C F rectangulum, ad rectangulum D E. Quod erat demonstrandum.

[b] 23. Sexti.

PROPOSITIO LXVIII.

A B C D
E F G H

SI A, B, C, D lineæ fuerint in continua ratione, sint autem & aliæ quatuor E, F, G, H in continua analogia;

Dico A H rectangulum, ad rectangulum D E, rationem habere triplicatam eius, quam habet B G rectangulum, ad rectangulum C F.

Demonstratio.

RAtio rectanguli A H, ad rectangulum E D, [c] composita est ex ratione A ad D, id est, ex triplicata [d] ratione B ad C, quia A, B, C, D continuæ sunt proportionales & ex H ad E, id est ex triplicata ratione G ad F; sed B G rectangulum, ad rectangulum C F, rationem habet compositam ex [e] B ad C, & ex G ad F; igitur rectangulum A H, ad rectangulum D E, rationem habet triplicatam, eius quam habet D E rectangulum, ad rectangulum C F. Quod erat demonstrandum.

[c] Ibid.
[d] 10. Defin. Quinti.
[e] 23. Sexti.

PRO-

PROPOSITIO LXVII.

SI AB, AC, AD lineæ fuerint continuæ, quibus æquales fiant AE, AF, AG, in directum;

Dico DCG rectangulum, ad CBF rectangulum, esse vt DA ad BA.

Demonstratio.



CEntro A, interuallis AC, AD, semicirculi describantur DHG, CKF; erectâque ex C normali CH, ducatur recta AH, occurrens circulo CKF in K, iunganturque BK, vt AC ad AD, sic AK ad AH, sed vt AC ad AD sic AB est ad AC per constructionem: igitur vt AB ad AC, sic AK ad AH; adeoque BK, HC lineæ sunt parallelæ, & BK recta, normalis ad lineam AC: quare DCG rectangulum, est ad rectangulum CBF, vt HC quadratum, ad quadratum KB, id est in duplicata ratione lineæ HC ad KB, id est AC ad AB, id est vt AD, linea ad lineam AB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

SI fuerint quotcunque lineæ continuæ proportionales AB, CB, DB, EB, FB, GB.

A C D E F G B

Dico rectangula ABDE, CBDE, CBEF, DBEF, DBFG, EBFG in continua esse analogia; & quidem in ratione AB ad CB.

Demonstratio.

REctangulum enim ABDE, ad rectangulum CBDE, est vt AB [a] linea, ad lineam CB; & CBDE rectangulum ad rectangulum CBEF, est vt [b] DE ad EF, id est, vt AB ad CB; Rursum rectangulum CBEF, ad rectangulum DBEF, est vt CB ad DB, id est AB ad CB. (quia AB, CB, DB, &c. ponuntur continuæ,& DBEF rectangulum, ad rectangulum DBFG, est vt EF ad FG, id est iterum AB ad CB; & sic de ceteris. Igitur rectangula ABDE, CBDE, CBEF, &c. in continua sunt analogia, & quidem in ratione AB ad CB. Quod erat demonstrandum. a 1. Sexti. b ibid.

PROPOSITIO LXIX.

SI fuerint tres ordines continuè proportionalium A, B, C, D. E, F, G, H. I, K, L, M. & AF rectangulo æquale fiat quadratum N: & R quadratum æquale rectangulo EK; sit autem & IF rectangulo, æquale quadratum O, & EB rectangulo, quadratum S. dein & rectangulo CH, æquale quadratum P; & T quadratum, æquale rectangulo GM; denique rectangulo LH, æquale quadratum Q, & GD rectangulo, quadratum V;

Dico quadratum N esse ad quadratum P, vt est quadratum S, ad quadratum V: & R quadratum, ad quadratum T, vt O quadratum ad quadratum Q.

Demonstratio.

A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	H.
I.	K.	L.	M.
N.	P.	S.	V.
R.	T.	O.	Q.

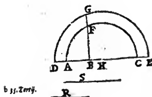
QVadratum enim N ad quadratum P, id eſt per conſtructionem, A F rectangulum, ad rectangulum C H, rationem habet [a] compoſitam, ex A ad C, id eſt per hypotheſim ex duplicata ratione A ad B; & ex F ad H, id eſt duplicata ratione E ad F; ſed ratio quadrati S ad quadratum V, id eſt per hypotheſim rectanguli E B, ad rectangulum G D, etiam componitur ex ratione B ad D, id eſt duplicata ratione A ad B, & ex ratione E ad G, id eſt duplicata ratione E ad F, igitur vt quadratum N ad quadratum P: ſic quadratum S ad quadratum V. Eodem modo oſtenditur quadratum R, ad quadratum T eſſe, vt quadratum O, ad quadratum Q. Quod erat demonſtrandum.

[a] 23. Sexti.

PROPOSITIO LXX.

SIt A C linea diuiſa inæqualiter in B, oportet vtrimque rectas æquales adijcere A D, C E, vt A B C rectangulum, ad rectangulum D B E, datam habeat rationem, R ad S.

Conſtructio & demonſtratio.



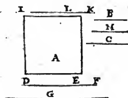
DEſcripto ſuper A C, vt diametro, ſemicirculo A F C, erigatur ex B, normalis B F; & fiat vt R linea ad S. lineam, ita B F quadratum, ad quadratum B G, tum centro communi H, interuallo H G, deſcribatur ſemicirculus D G E occurrens A C lineæ productæ in D & E. Dico A D, C E, lineas ſatisfacere petitioni. Rectangulum enim A B C, æquale eſt quadrato [b] F B, & G B quadrato, æquale eſt rectangulum D B E: igitur rectangulum A B C, eſt ad rectangulum D B E, vt F B quadratum, ad quadratum B G, id eſt linea R ad lineam S per conſtructionem. datæ igitur lineæ A C rectas æquales vtrimque adiecimus; &c. Quod erat præſtandum.

[b] 35. Tertij.

PROPOSITIO LXXI.

DAto quadrato A, & lineâ D F, vtcunque in E diuiſâ, exhibere rectam, quæ diuiſa ſecundùm rationem D E ad E F, exhibeat quadratum ſub tota, vnà cum rectangulo ſub ſegmentis, ad quadratum A, in data ratione B ad C.

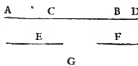
Conſtructio & demonſtratio.



INuentâ M, mediâ inter B & C, fiat vt quadratum B ad quadratum M, ita D F quadratum vnà cum rectangulo D E F, ad quadratum G, dein vt G linea, ad D F lineam, ſic latus quadrati, A fiat ad quandam I K; quæ ita ſecetur in L, vt D F eſt diuiſa in E. Dico I K lineam eſſe quæſitam. Quoniam eſt vt G linea, ad lineam D F, ſic latus quadrati A ad rectam I K, erit inuertendo, permutando, D F ad I K, vt G ad latus quadrati A. Rurſum cùm I K, D F lineæ proportionaliter ſint diuiſæ,

diuisæ, erit vt IK ad DF sic LK ad EF. Est autem ratio rectanguli ILK ad rectangulum DEF, [a] composita ex ratione IL ad DE, & LK ad EF, id est ex duplicata ratione IK ad DF, item quadratum IK ad quadratum DF, duplicatam habet rationem, eius quam habet IK linea, ad lineam DF; igitur, erit ILK rectangulum vnà cum quadrato IK ad rectangulum DEF vnà cum quadrato DF, in duplicata ratione IK ad DF. & quia est vt DF ad G sic IK ad latus quadrati A, erit vt rectangulum DEF vnà cum quadrato DF, ad quadratum G, sic ILK rectangulum vnà cum quadrato IK, ad quadratum A. sed per constructionem est DEF rectangulum vna cum quadrato DF, ad quadratum G, vt quadratum B ad quadratum M, id est vt linea B ad lineam C, igitur rectangulum ILK vnà cum quadrato IK, est ad quadratum A, vt B ad C. Vnde dato quadrato A, &c. Quod erat faciendum. [a 23. Sexti.]

PROPOSITIO LXXII.



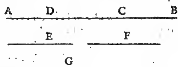
Esto AB linea diuisa vtcunque in C, oportet eam augere rectâ BD, vt ACB rectangulum, ad rectangulum ADB, datam habeat rationem E ad F.

Constructio & demonstratio.

Fiat vt E ad F, sic ACB rectangulum ad G quadratum; deinde datâ media G, & excessu extremarum AB, inueniantur extremæ AD, DB per Andersonium & alios. Dico factum esse quod petitur: est enim vt E ad F, sic ACB rectangulum, ad quadratum G. sed quadrato G, per constructionem æquale est rectangulum ADB, igitur vt E ad F, sic ACB rectangulum, ad rectangulum ADB: datæ igitur lineæ AB, quandam adiecimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXXIII.

Datam rectam AB diuisam in C vtcunque, iterum in D secare, vt DAB rectangulum, ad rectangulum DCB, datam habeat rationem E ad F.



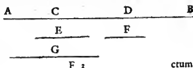
Constructio & demonstratio.

Fiat vt E ad F, sic AB linea ad lineam G, dein AB secetur in D, vt AD sit ad DC, sicut CB est ad G. Dico factum esse quod petitur.

Ratio DAB rectanguli, ad rectangulum DCB, composita est ex ratione AB ad CB, & AD ad DC, id est per constructionem CB ad G. sed etiam ratio [b] AB ad G, id est E ad F, componitur ex ratione AB ad CB, & CB ad G, igitur rectangulum DAB ad rectangulum DCB, eam habet rationem quam AB linea ad G, id est E ad F; rectam igitur AB in D secuimus, &c. Quod erat faciendum. [b Defin. 5. sexti.]

PROPOSITIO LXXIV.

Rectam AB diuisam vtcunque in C, iterum secare in D, vt ABD rectangulum, ad quadratum CD, datam habeat rationem E ad F.



Constructio & demonstratio.

Fiat vt E ad F, sic AB ad G. dein AB secetur in D, vt DB, DC, & G lineæ sint continuæ. Dico fa-

ctum esse quod iubetur. Ratio enim rectanguli A B D, ad quadratum C D, componitur ex ratione A B ad C D, & D B ad C D, id est ex ratione C D ad G. sed & ratio lineæ A B ad G (id est E ad F per constructionem) composita est ex ratione a A B ad C D, & ex C D ad G, igitur A B D rectangulum ad quadratum C D, eam habet rationem, quam E ad F. diuisimus ergo A B lineam in D, &c. Quod erat faciendum.

a 5. Defin. sexti.

PROPOSITIO LXXV.

Lineam A B diuisam vtcunque in C & D, iterum diuidere in E, vt E A C rectangulum ad rectangulum E B D, datam habeat rationem F ad G.

A C E D B

F G

H

Constructio, & demonstratio.

Fiat vt A C ad D B, sic F ad H, & A E ad E B, vt H ad G. Dico factum esse quod iubetur. Ratio lineæ F ad G b composita est ex ratione F ad H, & H ad G; sed ratio E A C rectanguli, ad rectangulum E B D, composita est ex c ratione A C ad D B, id est per constructionem F ad H, & ex A E ad E B, id est H ad G, igitur vt F ad G, sic E A C rectangulum, ad rectangulum E B D. Diuisimus igitur lineam A B in E, &c. Quod erat faciendum.

b 5. Defin. sexti.

c 23. Sexti.

PROPOSITIO LXXVI.

A E F B

C G H I D

Sint A B, C D, diuisæ quomodocunque; Dico quadrata partium A B, vnà cum rectangulis A E B, E F B bis sumptis, ad quadrata partium lineæ C D, vnà cum rectangulis C G D, G H D, H I D bis sumptis, eam habere rationem quam A B quadratum ad quadratum C D.

Demonstratio.

Demonstratum est A B d quadratum æquari quadratis partium lineæ A B vnà cum rectangulis A E B, E F B bis sumptis, quemadmodum etiam de quadratis partium C D eiusque rectangulis C G D, G H D, H I D bis sumptis; patet ergo ea inter se illam obtinere rationem quæ inter quadrata A B C D reperitur.

d 61. Huius

PROPOSITIO LXXVII.

Datarum duarum alteram ita secare, vt sectæ partes cum insecta, in continua sint analogia:

Propositionem hanc demonstratam inuenies in libro nostro de progressionibus geometricis propos. 36. duplici methodo: lubet aliâ tamen praxi hic eandem expedire.

Con-

Constructio & Demonstratio.

Sint AB, BC lineæ quarum alteram BC, ita oporteat partiri in D. vt sint in continua ratione, AB, BD, DC: diuisâ AB bifariam in E, fiat rectangulo super datis ABC contento, vna cum quadrato dimidiæ, EB æquale quadratum ED, cadet punctum D, inter C & B, cùm EC quadratum sit æquale [a] quadrato BE vnà cum rectangulo ACB, quod maius est rectangulo ABC: adeoque & EC quadratum maius quadrato ED. Dico itaque peractum quod postulatur: constituto enim super AB semicirculo AFB, ducatur tangens FD, iungaturque FE ad centrum; erit itaque quadratum DE, quadrato DF, hoc est [b] rectangulo BDA; vnà cum quadrato EB, hoc est quadrato EF æquale. Adeoque rectangulum ADB, vnà cum quadrato EB, ipsi ABC cum eodem quadrato æquabitur, ablato igitur communi quadrato BE remanet ADB rectangulum, æquale ABC rectangulo, quare AD est ad AB, vt est BC ad DB. & vt AB ad BD, ita DB ad DC; sunt igitur CD, DB, BA in continua ratione; igitur datarum duarum alteram ita secuimus, &c. Quod erat faciendum.

[a] 6. Secundi.
[b] 36. Tertij.



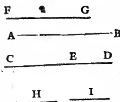
PROPOSITIO LXXVIII.

Datarum duarum alteram ita partiri, vt rectangulum sub indiuisa & altera parte diuisæ, ad quadratum residuæ, datam habeat rationem.

Constructio, & demonstratio.

Propositionem quam priùs particularem soluimus in ratione æqualitatis, conabimur quoque vniuersaliter soluere.

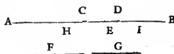
Sint igitur, AB, CD, lineæ, oportetque diuidere CD, in E. vt rectangulum AB DE, ad quadratum CE, rationem habeat datam H, ad I. Fiat vt H ad I, sic AB ad FG: dein CD diuidatur in E, vt ED, EC, FG sint continuæ per præcedentẽ. Dico factum esse quod petitur. erit enim rectangulum super ABED, ad quadratum CE, vt idem ABED rectangulum, ad rectangulum FG ED, idest vt AB, ad FG, id est per constructionem vt H ad I. Diuisimus igitur lineam CD, &c. Quod erat faciendum.



Huius Propositionis aliam inuenies demonstrationem in libro nostro de progressionibus. Propos. 37.

PROPOSITIO LXXIX.

Datam AB sectam in C & D, ita secare in E puncto, inter C & D constituto, vt rectangulum AED, ad CEB rectangulum; datam obtineat rationem quadrati F, ad G quadratum.



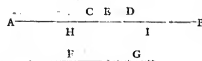
Con-

Constructio & demonstratio.

Diuidatur AD in H; & CB in I bifariam; & recta HI diuisa sit in E vt sit HE ad EI, sicut est F ad G. Dico rectangulum AED, ad CEB rectangulum habere rationem quadrati F, ad G, quadratum.

Huius rei demonstrationem reperies libro de parabola. Ex cuius proprietatibus est eruta.

PROPOSITIO LXXX.



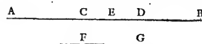
Datam iterum AB, sectam vtcunque in C & D, denuo partiri in E, vt rectangulũ AEC ad BED datam rationem cõtineat quadrati F, ad G.

Constructio & demonstratio.

Diuidantur vt priùs rectæ AD, CB, in H, & I punctis bifariam; quo facto diuidatur HI recta in E, secundùm proportionem G, ad F. Dico rectangulum AEC, ad BED rectangulum, datam habere rationem quadrati F, ad G quadratum.

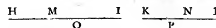
Huius quoque demonstrationem inuenies eodem libro de parabola.

PROPOSITIO LXXXI.



Datam denuo AB, diuisam vtcunque in C & D, iterum diuidere in E, vt rectangulum ACE, ad BDE rectangulum, datam obtineat rationem quadrati F ad G.

Constructio & demonstratio.



Fiat vt AC ad DB, ita HI, ad KL; & vt F ad G, ita IM ad KN, tandem fiant in continuata analogia HI, MI, OI; & similiter KL, NK, PK: denique diuidatur CD in E, secundùm rationem IO ad KP; Dico factum quod requiritur. Rectangulum ACE, ad BDE, a habet rationem compositam ex AC, ad DB, hoc est HI, ad KL, & ex ratione CE ad ED, hoc est OI, ad KP. Igitur rectangulum ACE, ad BDE eandem obtinet rationem, quam rectangulum HIO ad LKP; sed HIO ad LKP, eandem habet rationem, quam quadratum IM ad KN, (ex constructione enim sint tres in continua analogia tam IO, IM, IH, quàm KP, KN, KL.) hoc est quàm quadratum F, ad G, quadratum; Igitur rectangulum ACE, ad BDE, eandem rationem continet, quam F quadratum, ad G quadratum. Perfecimus igitur quod imperatum fuit.

a 23. Sexti.

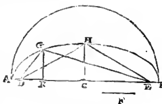
PROPOSITIO LXXXII.

Datâ basi, aggregato laterum, & altitudine trianguli, exhibere triangulum.

Con-

Constructio & demonstratio.

DAto laterum aggregato, æqualis ponatur AB; quâ bifariam diuisâ in C, fiat DE æqualis basi trianguli, bifariam diuisæ in C, & altitudini æqualis ponatur F; ex lateribus AC, CB, DE, fiat triangulum DHE; nam AC, CB simul sumptæ maiores sunt DE. erit igitur DHE Isosceles: deinde fiat vt HC quadratum, ad quadratum F, sic ACB rectangulum, ad rectangulum AKB, & erigatur KG æqualis ipsi F, parallela HC, iunganturque DG, GE. Dico DGE triangulum esse quæsitum.



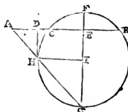
Demonstrationem huius inuenies libro de ellipsi Propos. 121.

PROPOSITIO LXXXIII.

DAtam AB sectam in C, diuidere in D, vt quadratum AD, æquale sit CDB. rectangulo.

Constructio & demonstratio.

DIuisa CB in E bifariam, ponatur ex E normalis EG, æqualis ipsi AE; iunctisque AG, describatur per C, B, G, puncta circulus CBG, occurrens EG lineæ in F: diuisâque FG bifariam in I, agatur per I recta IH parallela ipsi CB, occurrens AG lineæ in H puncto; ex quo normalis erigatur HD, occurrens CB lineæ in D. Dico factum esse quod petitur: cùm enim HI parallela sit ipsi AE, ponanturque AE, EG lineæ æquales, erunt & HI, IG quoque inter se æquales, & H communis intersectio linearum HI, HG cum circulo. Vnde & HD eundem contingit in H: estque CDB, rectangulum æquale quadrato HD, id est AD. Diuisimus igitur AB lineam, &c. Quod erat faciendum. a 36. Tertij.

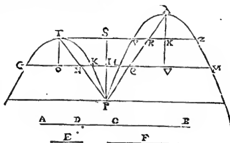


PROPOSITIO LXXXIV.

DAtam rectam AB sectam in C, denuo partiri in D, vt quadratum AD, ad rectangulum BDC, datam obtineat rationem.

Constructio & demonstratio.

DAta sit ratio E ad F, & fiat rectangulũ aliquod GIK, quod ad rectangulum LIM rationem eandem eũ ratione E ad F contineat; hoc facto ponatur quædam IS, orthogonalis ad GM, & inuentâ IN mediâ inter KI, IG; diuidatur KG bifariam in O, & erigatur OT parallela IS, donec concurrat cum TS, quæ æquidistet GM, in T: & iungatur TN, quæ SI productæ occurrat in P. Deinde inuentâ mediâ IQ inter LI, & IM, ducatur recta PQ, occurrens



rens T S protractæ in R. tandem diuidatur L M bifariam in V, & erigatur V X æquidistans T O, concurrens cum P Q in λ; & fiat vt V λ quadratum, ad quadratum X λ, ita quadratum V L, ad X γ quadratum: Dico T Z lineam diuisam esse in S, γ, secundùm rationem postulatam; vnde si diuidatur A B in D, & C. vt est diuisa T Z, in S, & γ; habebitur ratio quadrati A D, ad C D B rectangulum, in ratione E ad F. quod fuit postulatum. Vlterius non pergo in demonstratione huius rei, cùm non sit huius loci; sed eam reperies libro de parabola Geometricè tractatam, & perfectam.

Libri primi finis.



QV A-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER SECVNDVS

DE PROGRESSIONIBVS GEOMETRICIS.

AD LECTOREM.

PRæſens liber, quem de progreſſionibus Geometricis inſcribimus, omnino neceſſarius eſt ad ſternendam viam, quam inimus circulo ad quadratum reducendo: non ita tamen hoc velim intelligas, vt omnes omnino propoſitiones, quę in toto eius decurſu reperiuntur, ad eum finem requiri credas; ſed quod ſine vſu huius libri, quoad partes maximè principales, difficulter ad ſcopum peruenire quis poſſit: exigebat autem libri argumentum, ad doctrinæ formam vel leuiter ſaltem concinnari, & cognatis materijs exornari, ne fætum imperfectum ederemus. Idem de ſequentibus libris iudicium ferre dignabere.

ARGVMENTVM.

PLurimi de hoc argumento Speculationes non tantùm Theorematicas, verùm etiam Problematicas conſcripſerunt: ſed omnes, prout ex libris huc vſque conſcriptis cognoſcere potui, Arithmeticas materias concernentes, in medium attulerunt: quas authoribus ſuis omnino intactas relinquo; mei enim inſtituti eſt progreſſiones tractare Geometricas, non Arithmeticas: & per illas cognoſcere quantitatum omnis ſpeciei magnitudines, ſiue illæ in lineis, ſiue ſuperficiebus, vel etiam ſolidis exhiberi debeant. Occaſionem huic conſiderationi ſubminiſtrarunt nonnulla, cùm in Archimede, tum in Euclide loca, quæ iubent in conſtructione Geometrica, auferri (verbi gratia,) ab aliqua quantitate dimidium, & huius iterum dimidij dimidium, & pro clauſula adſertur, & hoc ſemper fiat. *Titillauit me hæc particula, & coëgit moroſiore cogitatione circa hæc verſari: tandem poſt longas vexas intellectus, ea quæ mihi inciderũt, tibi benigne Lector communico, vt quæ huic materiæ deſunt ſupplere digneris. Illam etenim ſolùm direxi ad cognoſcendas quantitates, quas inſtituto meo neceſſarias eſſe arbitratus ſum: communi enim Geometriâ, quam à vete-*

ribus accepimus, non existimaui posse quempiam viam sibi sternere, ad problemata soluenda, quæ à Mathematicis per tot sæcula desiderantur: vnde nouas artes & methodos nouas iudicaui excogitandas, quæ supplerent Geometriæ antiquæ defectus; dignaberis itaque benignè Lector, boni hæc consulere, & cùm aduerteris, multa hîc esse quæ incudi reddi debeant, vtpote malè tornata; memineris velim ita scientias in orbem esse ingressas; primò mutilas & inconcinnas, quas multorum tandem manus ad perfectum nitorem reduxerunt; facili etenim negotio inuentis quidpiam addi potest, plura quippe vident oculi, quàm oculus; qui domini sui iussu certis terminis se continere cogitur.

In quatuor partes partimur hunc tractatum, quo distinctiùs procedamus, & captui tyronum magis inseruiamus.

Prima inseruiet contemplationi progressionum inchoatarum, siue necdum terminatarum, quod terminus progressionum nondum in considerationem adducatur. quid autem sit Progressio Geometrica, quis eius terminus, & his similia, patebit ex sequentibus. Sed tribus verbis conabimur præsentis partis nomenclaturam explicare.

A	B	C	
D	E	F	G

Detur quæuis ratio A ad B; & petatur tertia proportionalis ad has duas quantitates, exhibeaturque tertia C: continuatio trium horum terminorum dicetur esse progressionis interminatæ; eo quod possit vlteriùs procedi in eadem serie: nam si dentur tres quantitates D, E, F, & addatur quarta G, quæ continuet eandem rationem D ad E, progressio terminorum D, E, F, G, vlterius est producta, quàm sit progressio terminorum A, B, C: cùm hæc consistat in duabus rationibus; illa verò in tribus. Porro hac methodo procedendo, continuò auctis rationibus, augetur progressio; manet interim semper interminata. Hæc igitur pars prima non perget vlterius, & sistet in sola consideratione Progressionis huius, quam vocamus interminatam, ad distinctionem alterius, quæ tota exhaurietur, ac proinde terminabitur seipsâ. varijs igitur proprietatibus inchoatæ progressionis in medium allatis, subsequitur

Secunda pars, quæ tota versabitur circa progressionem terminatam, absolutam, siue exhaustam; atque hoc vniuersim in quocunque genere quantitatis: indagando scilicet cuiuscunque rationis, si in infinitù censeatur continuata, magnitudinem, seu quantitatem. neque velim quis in animum inducat, nos materiam ingredi, quæ placitis philosophorum contradicat: imò ostendemus luce clarius, hâc nostrâ methodo dissolui etiam grauissimas difficultates, quibus in Gymnasijs & Philosophorum Licæis solent in materia quantitatis inuicem esse molesti. Quod vt exemplo vno manifestiùs explicetur, subeat memoria argumenti, quod Achilles Zenonis nominatur, quo omnem motum eliminare ex orbe se posse contendebat: omnibusque studebat persuadere, falli oculos, dum quid loco moueri arbitrarentur; argumento ad id formato duorum, quæ mouerentur; Achillis scilicet velocissimè currentis, & testudinis tardissimè reptantis.

A B D E C

Ponatur, inquiebat ille, Achilles cursor pernicissimus, ex A puncto, testudinem pergentem per semitam BC tardissimo motu, velle assequi suo cursu: Quo tempore Achilles tendit ex A in B, mota est testudo ad aliquod spatium, perueniens in D; igitur necdum Achilles assecutus est testudinem: iterum quo tempore

re

re ex B. Achilles currit, vt assequatur testudinem existentem in D, mota est testudo perueniens ad E punctum; igitur nondum assecutus est testudinem, atque hoc in infinitum continget; igitur nunquam assequetur Achilles testudinem. Argumentum hoc Zenonis facillimè expedietur per ea, quæ secundâ huius libri parte adferemus; nam ex doctrina illius partis, non solùm manifestum fiet, Achillem peruenturum ad testudinem, sed ipsum punctum assignabitur in quo apprehensio testudinis futura est.

Tertia Pars huius libri versabitur circa progressiones terminatas, planorum præsertim similium, quæ commodiora sunt vt ad doctrinæ seriem reducantur: vt si datis duobus quadratis in ratione maioris inæqualitatis, quis requirat superficiem exhiberi, quæ æqualis existat magnitudini, quam tota illa series quadratorum produceret, orta ex progressione rationis primi quadrati ad secundum, & huius secundi ad tertium, & sic in infinitum: atque vt idipsum familiariùs exponam, ponatur quis equum generosissimum velle à quopiam mercari, qui vulgi opinione mille aureis æstimatur: cumque mille aurei eidem non sint ad manum, hac sponsione contrahit, se post mensem centum aureos ei donaturum; post secundum verò mensem quinquaginta, post tertium verò viginti quinque, atque ita deinceps; post singulos menses, perpetuo censu dimidium dimidij pretij pendat eius, quod postremo mense creditori persoluerit: tandem pertæsus molestiarum, conetur pacisci cum eodem, offerendo ducentos aureos pro residuo, vt ab illo censu sese expediat, quis horum duorum tali contractu decipitur; emptorne an venditor? huius & similium quæstionum solutiones, doctrina tertiæ partis huius libri, liquidissimè expediet: & assignabit, quæ post singulos menses summa sit residuè debiti; imò & si quis postularet nosse qualis summa residua esset futura, post centesimum, imò millesimum mensem, Geometricâ certitudine ex præsentis Partis scientia cognoscet.

Quarta Pars totam doctrinam prioribus partibus explicatam corporibus solidisque applicabit: spero huius tractatus argumentum non fore illis ingratum, qui communi Geometria exculti sunt; admiranda enim Theoremata huius libri notitiâ eruuntur, & Problemata (quæ communi Geometria difficili methodo soluuntur) praxi commodissimâ expediuntur: sine adminiculo enim huius libri nulla esset huius operis lucubrationum certitudo, quæ maxima ex parte huic fulcimento innixa est.

DEFINITIO PRIMA.

GEometricam feriem voco quantitatem finitam, diuifam fecundùm continuationem cuiufcunque rationis datæ.

Explicatio.

QVamuis fenfus,quem verba indicant obfcurus non videatur, nihilominus mentem meam circa definitionem præfentem cenfui apponendam: ponatur itaque linea quæuis A B, diuifa in C, fecundùm quamcumque proportionem: & fiat quemadmodum eft tota A B ad C B, ita C B ad D B, & denuo vt C B ad D B, ita

A C D E F G B

D B ad E B, & hoc femper fiat. Oritur in hac ratione procedendi duplex confideratio; prima, rationis A B ad C B, & C B ad D B, & vlterius D B ad E B, atque ita deinceps: altera rationis A C ad C D, & C D ad D E, iterum D E ad E F, & ita confequenter; & licet hæ confiderationes videantur diuerfæ, in vnum tamen fcopum collimant: nam cùm ratio A B ad C B, & C B ad D B, eadem fit cum ratione A C ad C D, & C D ad D E, atque ita vlterius, fi fiat recta A C æqualis H I & hæc H I,

H K L M I

diuidatur in punctis K, L, M, fecundùm rationem A B ad C B, & C B ad D B, &c. tunc apparebit ratio, qua duæ iftæ confiderationes in vnam coalefcunt; fi quis igitur petat, quid velim intelligi nomine feriei? refpondeo me nomine feriei, totam illam continuationem linearum intelligere, quarum prima eft A,C, fecunda C D, ita vt ratio A C ad C D, eadem fit cum illa quam obtinet C D ad D E, atque ita deinceps terminatam eodem termino, quo terminatur ratio A B ad C B, &c. Et quia in definitione, particula adiuncta eft *finitam*; hinc hoc loco explicare cogor feriem per rationes A B ad C B, & C B ad D B, & ita confequenter, cùm necdum demonftratum fit quo puncto lineæ A C D terminus exiftat feriei rationis A C ad C D. nam plufquam notum eft, apud philofophos, nunquam perueniri poffe ad terminum continuationis, per partes proportionales A C ad C D, & C D ad D E, cùm refidua femper remaneat quantitas diuidenda, fecundùm eafdem rationes; quare terminus, hoc tenore progrediendi acquiri nequit: fed fi quis procedat iuxta confiderationem continuationis A B ad C B, & C B ad D B, & fic in infinitum, femper includit terminum, ad quem per continuationem rationis A C ad C D, perueniri nequit: feriem itaque voco, quantitatem finitam A B, diuifam fecundùm continuationem rationis A C ad C D, & C D ad D E. quæ eadem femper exiftit cum ea quæ fit continuando rationes A B ad C B. Quotiefcunque igitur occurret mentionem fieri continuationis alicuius feriei A C ad C D, & C D ad D E; fubeat animo continuationem hanc finitam effe, & totam illam terminorum infinitorum collectionem, alibi terminatam effe: quę collectio feries alicuius rationis Geometricæ nuncupatur.

DEFINITIO SECVNDA.

PRogreffio Geometrica eft quotcunque terminorum fecundùm eandem rationem continuatio.

Explicatio.

ESt itaque omnis progreffio pars feriei, cùm vt explicatum eft, omnis feries fit continuatio alicuius rationis eoufque producta, donec ampliùs protrahi nequeat, modo priùs explicato; Progreffio verò prout differt à ferie, propriè interminata eft; ac proinde eius pars: vbi tamen inueneris in contextu fequentium, agi de tota progreffione rationis alicuius continuata, de ferie agi memineris, neque enim hæc magis

fetu-

scrupulosè obseruari volo, quàm à Geometris omnibus seruatur nomenclatura proportionis, vel rationis; quarum licet altera in duobus terminis consistat, altera in pluribus, nihilominus, pro arbitratu scribentis, passim confunduntur. Sint igitur hæc præmissa, si non exactarum definitionum loco, saltem vberioris explicationis supplemento. Datis itaque A & B: vel ratio A ad B est maioris inæqualitatis, vel prorsus æqualitatis, vel minoris inæqualitatis: quod si fiant cõtinuæ proportionales A B C D. huiusmodi continuatio progresio vocetur, quotcunque tandem termini exstant.

A B C D

A B C D

A B C D

Progresio verò Geometrica iam explicata duplex est; alia continua, alia discreta. Continua est cùm omnes termini rationem connectentes, habent rationem antecedentis, & consequentis; vt in schemate rationum explicatarum, si fuerit quemadmodum A ad B, ita B ad C; & quemadmodum B ad C, ita C ad D, atque ita in quouis tandem numero terminorum; huiusmodi progresionem continuam voco.

Discreta progresio est similium rationum secundùm aliquam continuationem positio, vt consequentes non fiant antecedentes. exempli causa; si fiat quemadmodum A est ad B, ita C ad D. & B fuerit minor quam A, vel C, talem progresionem in quotlibet tandem terminis constitutam sit, voco discretam; etiam in his terminis 1.2. 5,10. 3,6, 8,16. Vbi discreta ratio valde intertupta est, quia est continuatio similium rationum.

A B C D

DEFINITIO TERTIA.

Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur; sed quouis interuallo dato propiùs ad eum accedere poterit.

Explicatio.

A C D E F G B

Ponatur recta AB, diuisa in CD E F G. vt continuent eandem rationem AB, CB, DB, EB, FB, GB. Cùm sit eadem ratio AC ad CD, & CD ad DE, atque ita deinceps, cum ea, quæ reperitur inter lineas AB, CB, DB, &c. similis quoque erit eiusdem rationis progresio AC ad CD, cum progresione AB, ad CB. terminus autem rationis AC ad CD, dicitur punctum B, siue illum intrinsecum velis, siue extrinsecum, per me licet; nam de re nobis est hîc quæstio, non de verbo: ad quod punctum nulla progresio pertingere valet, eùm omnis progresio interminata pars seriei existat: nihilominus tamen, poterit ad illum progressio per continuationem magis ac magis accedere, ita vt vicinior vltimus terminus progresionis interminatæ existat ipsi termino seriei, quàm sit distantia quæcunque proposita.

An autem talis detur terminus progresionis, & quo pacto inuestigari debeat, libro secundo huius tractatus disceptabitur, illud interim insinuatũ hoc loco desidero, huiusmodi terminum solùm reperiri in ijs progresionibus, quę proportionem maioris inæqualitatis continuant, nam earum progresionum quæ vel terminis semper æqualibus constant, vel certè terminis minoris inæqualitatis, nullum asignari posse terminum, manifestum nimis est, quàm vt explicatione indigeat; quandoquidem dictæ progresiones, si continuentur, magnitudinem quauis data maiorem exhibere natæ sint. Itaque secundo libro, tertio, & quarto, in quibus progresiones iam terminatæ consi-

considerantur, nullæ proponentur, præter eas, quæ maioris erunt inæqualitatis: in primo verò, quoniam illic à termino adhuc abstrahitur, etiam progressiones æqualitatis, & minoris æqualitatis contemplabimur. Terminus igitur progressionis talis est, quemadmodum explicuimus, cùm scilicet aggregatum, siue summa terminorum progressionis, quantumuis continuatæ, numquam excedit quandam magnitudinem; excedit verò omne minus illa magnitudine, atque ita posset etiam dici productum siue quantitas totiùs, datæ progressionis, & magnitudo illa æqualis dicetur toti progressioni datæ; hoc est omnibus terminis proportionalibus simul sumptis. Idem igitur quoad rem erit, siue terminum quærere progressionis, siue magnitudinem toti progressioni parem, siue ipsammet integram seriem progressionis exhibere. sed hæc meliùs propositione quinta, secundæ partis, huius libri, percipi poterunt. Si quid prætereà pertinebit ad terminorum explanationem, in decursu operis exponetur.

PRO-

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM
PARS PRIMA

Progressiones considerat indeterminatas.

PROPOSITIO PRIMA.


Ontinuè proportionalium differentiæ sunt in continua analogia eiusdem rationis suorum integrorum

A B C D E F G

Sint magnitudines continuæ proportionales A G, B G, C G, D G, E G, F G. ostendendum est A B, B C, C D, D E, E F differentias in continua esse analogia suorum integrorum, & contrà si A B, B C, C D, &c. fuerint continuæ, & F G addatur vt A G, B G, A B, B C sint proportionales; Dico & A G, B G, C G, &c. esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVoniam AG est ad BG, vt BG ad CG: erit diuidendo vt AB ad BG, sic BC ad CG: & permutando AB ad BC, vt BG ad CG, siue vt AG ad BG. Similiter BG est ad CG, vt CG ad DG: & diuidendo BC ad CG vt CD ad DG, & permutando BC est ad CD, vt CG ad DG, id est vt BG ad CG, id est vt AG ad BG. atqui erat vt AG ad BG, sic AB ad BC, ergo BC est ad CD vt AB ad BC. Continuæ sunt igitur proportionales AB, BC, CD, & quidem in analogia suorum integrorum AG, BG. simili ratione ostendam reliquas cum his tribus esse continuas: quod erat primum.

Sint iam AB, BC, CD, &c. continuæ, quibus addita sit FG, sic vt AG sit ad BG vt AB ad BC. Dico omnes AG, BG, CG, DG, &c. esse in continua analogia differentiarum. Quia vt AB ad BC, sic AG ad BG, ergo permutando & diuidendo, & rursum permutando vt AB ad BC, hoc est ex datis vt AG ad BG, sic BG ad CG. quoniam autem iam BG est ad CG, vt AG ad BG, hoc est ex datis vt AB ad BC, hoc est rursum ex datis vt BC ad CD, eodem planè discursu ostendemus BG, CG, DG esse continuas, & quidem in ratione BC ad CD, hoc est AB ad BC. Quare cùm etiam AG, BG, CD sint in eadem ratione continuæ, omnes quatuor AG, BG, CG, DG erunt in ratione AB ad BC continuæ. similiter ostendemus & reliquas cum iisdem esse continuas. Patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO II.

SI quatuor fuerint quantitates in continuata analogia, erunt aggregata ex prima & secunda, ex secunda & tertia, ex tertia & quarta, in continua proportione.

A B C D E

Demonstratio.

SVnto quatuor in continua analogia AB, BC, CD, DE. Dico etiam AC, BD, CE, esse continuè proportionales. cùm enim sit vt AB ad BC, ita BC ad CD,

 erit

a 12. Quinti. erit[a] vtraque antecedens A C, ad vtramque consequentem B D, vt A B ad B C, vnà antecedens, ad vnam consequentium: similiter modo quia B C ad C D, est vt C D ad D E, erit vtraque antecedens B D, ad C E vtramque consequentem, vt B C ad C D, id est vt A B ad B C, hoc est vt A C ad B D. Sunt igitur A C, B D, C E in continua analogia, quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO III.

A C D B
E

Sit A B diuisa in C & D. vt ratio A B ad A C duplicata sit eius, quam habet B D ad D C. Dico A C, A D, A B. tres esse in continua ratione.

Demonstratio.

Ponatur A E, media inter A B, & A C; igitur tres erunt continuæ quantitates A C, A E, A B. quare per primam huius erit ratio A B ad A E, eadem cum ratione B E ad E C. sed ratio A B ad A C, duplicata est rationis A B ad A E, igitur & ratio A B ad A C duplicata est rationis B E ad E C. quare diuisa est C B in E, vt diuisa est eadem C B in D: ac proinde punctum D, vnum idemq; est cum puncto E. Vnde cùm sint tres continuæ proportionales A C, A E, A B, ex constructione, erunt quoque in continuata ratione A C, A D, A B. Quod demonstrandum fuit.

PROPOSITIO IV.

Qvod si A B, A C, A D, sint quantitates proportionales: Dico A D ad A B, rationem eius habere duplicatam, quam habet D C ad C B.

A B C D

Demonstratio.

Ratio enim A D ad A B, duplicata est rationis A D ad A C, sed per primam huius vt A D ad A C, ita quoque est D C ad C B, igitur ratio A D ad A B duplicata est rationis D C ad C B. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

A D
B E
C F

Sint tres continuæ proportionales A, B, C; sit autem ratio A ad B, triplicata eius, quam habet D ad E: ratio quoque B ad C, triplicata rationis E ad F. Dico D, E, F quantitates, in continua fore analogia.

Demonstratio.

Cvm ratio A ad B, sit eadem cum ratione B ad C; igitur etiam ratio B ad C triplicata est rationis D ad E. est autem & ratio B ad C ex suppositione triplicata eius quam habet E ad F; igitur ratio D ad E, est eadem cum ratione E ad F. Sunt igitur in continuata proportione D, E, F. Quod demonstrandum fuit.

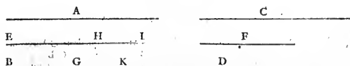
PRO-

PROPOSITIO VI.

Sit A ad B K in minore ratione, quàm C ad D.

Dico A ad E I mediam proportionalem inter A & B K, esse in minori ratione, quàm sit C ad F mediam inter C & D.

Demonstratio.



Fiat enim A ad B G in ratione C ad D, erit[a] B G minor quàm B K. Et fiat inter A & B G media E H, erit quoque E H minor quàm E I. Rursum quia A ad B G, duplicatam habet rationem A ad E H, & C ad D eamdem ex constructione habet rationem, quam A ad B G; habebit etiam C ad D rationem duplicatam eius, quam habet A ad E H: sed & C ad D duplicatam habet eius, quam C ad F; igitur ratio C ad F, eadem est cum ratione A ad E H: sed E I ostensa est maior quàm E H, igitur A ad E I [b] minorem habet rationem, quàm A ad E H, id est quàm C ad F. Quod erat ostendendum. [a] 10. Quin. [b] 8. Quinti.

Corollarium.

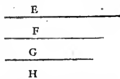
Simili modo demonstrabitur si plures mediæ inter primam & secundam, & inter tertiam & quartam ponantur, fueritque in prioribus maior proportio vel minor primæ ad secundam, quàm in posterioribus tertiæ ad quartam; fore etiam in prioribus primæ ad primam mediarum, vel secundam, aliamque quamcumque maiorem vel minorem proportionem, quàm tertiæ ad similem ordine mediam inter posteriores.

PROPOSITIO VII.

Sint duo ordines continuè proportionalium A, B, C, D, & E, F, G, H: & maior sit ratio A ad B, quàm E ad F.



Dico maiorem quoque esse rationem A ad C tertiam, vel D quartam, quàm E ad G tertiam, vel H quartam.



Demonstratio.

Cum enim sit eadem ratio A ad B, quæ B ad C, & C ad D; Similiter F ad G ratio, & G ad H eadem, quæ est E ad F, sitque A ad B maior ratio, quàm E ad F: erit etiam tam B ad C quàm C ad D maior ratio, quàm F ad G, aut G ad H: & proinde erit A ad [c] C maior ratio, quàm E ad G: & similiter B ad D maior ratio, quàm F ad H; & A ad D maior quàm E ad H: quæ erant demonstranda. [c] 11. Quinti.

PROPOSITIO VIII.

Sint tres magnitudines AC, AB, AF; & FE æqualis sit CB.

Dico si AC minima trium, & CB minor differentia, & BE, vtriusque differentiæ, differentia sint continuè proportionales, ipsas quoque magnitudines AC, AB, AF esse in continua ratione.

A C B E F

Demonstratio.

a 3. Secundi. Rectangulum FAC [a] æquatur rectangulo FCA vnà cum quadrato CA, rectan-
b 1. Secundi. gulum autem FCA æquatur [b] rectangulo ACB, & rectangulo AC BE (id est
c 17. Sexti. [c] quadrato CB, cum AC, CB, BE ponantur continuæ) ac præterea rectangulo AC
EF; id est ACB, quia æquales sunt CB, EF; igitur rectangulum FAC æquatur
d 4. Secundi. quadratis AC, CB, & rectangulo ACB bis, hoc est quadrato [d] AB; sunt [e] igitur
e 17. Sexti. tres proportionales magnitudines AC, AB, AF. Quod erat demonstrandum.

Aliter.

Vt BC ad CA, sic EB ad BC, id est EF: igitur componendo vt BA ad CA, sic BF ad EF, hoc est BF ad BC: ergo permutando & componendo FA ad BA, vt BA ad CA. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

A C B E F

Si autem AC, CB, EF fuerunt proportionales, & BE æqualis CB minori differentiæ, erunt rursum AC, AB, AF continuæ proportionales. Demonstratio eadem est, quę propositionis iam positæ.

PROPOSITIO IX.

Sint in continua analogia AB, AC, AD, & minori differentiæ BC, æqualis sit ED.

Dico minimam AB, & minorem differentiam BC, deinde & CE, vtriusque differentiæ differentiam, esse proportionales.

A B C E D

Demonstratio.

f 3. Secundi. Rectangulum DAB [f] æquatur rectangulo DBA, & quadrato AB: rectangulum
g 1. Secundi. autem DBA [g] æquatur rectangulis ABC, & AB ED, id est rursus rectangulo ABC (sunt enim ED, BC lineæ æquales) & rectangulo AB CE: ergo rectangulum DAB, æquatur quadrato AB, & rectangulo ABC bis, & prætereà rectangulo ABCE; quadratum verò AC, æquatur quadrato AB, rectangulo ABC bis, & quadrato BC: Atqui cùm AB, AC, AD ponantur continuæ proportionales,
h 17. Sexti. erit rectangulum [h] DAB æquale quadrato AC; ergo quadratum AB, rectangulum ABC bis, & rectangulum ABCE simul sumpta, æquantur quadrato AB, rectangulo ABC bis, & quadrato BC simul sumptis. Itaque demptis communibus quadrato AB, & rectangulo ABC bis, æqualia remanent quadratum BC, & rectan-
i Ibidem. gulum ABCE; quare AB, [i] BC, CE, sunt tres continuæ proportionales. quod erat demonstandum.

Aliter.

Aliter.

QVoniam D A, C A, B A ponuntur proportionales, ergo per primam huius D C ad C B eſt vt C A ad B A: quare (cùm æquales ſint D E, B C ex hypotheſi) vt C D ad E D, ſic C A ad B A, ergo diuidendo C E ad E D, hoc eſt, C B, vt C B ad B A. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

A B C E D

QVod ſi poſitis continuè proportionalibus A B, A C, A D, ſumatur C E, æqualis minori differentiæ B C, erunt A B, B C, E D in continua analogia: quod demonſtrabitur prorſus eodem modo quo propoſitio iam poſita.

PROPOSITIO X.

SInt tres magnitudines A B, A C, A D, in continua analogia; ponantur autem maxima trium A D, & maior differentia C D, dein & tertia quæpiam E D, continuæ proportionales.

Dico B C, C E, æquales eſſe lineas.

A B C D
E

Demonſtratio.

CVm tres ponantur continuæ A B, A C, A D, erit D C ad [a] C B, vt D A ad C A: quare [b] rectangulum D C A rectangulo D A B C, æquale eſt. Similiter cùm ponantur continuæ A D, C D, E D, eſt A C ad C E, [c] vt A D ad C D: ergo rectangulum idem A C D æquatur etiam rectangulo A D C E. rectangula ergo A D B C, A D, C E, inter ſe æquantur; vnde B C, [d] C E æquales ſunt. quod erat demonſtrandũ.

[a] 1. Huius. [b] 16. Sexti. [c] 1. Huius. [d] 1. Sexti.

Aliter.

QVandoquidem ponantur continuæ A B, A C, A D, ergo per primam huius vt D A ad C A, ſic D C ad C B. Iterùm quoniam ponuntur continuæ A D, C D, E D; per primam huius vt A D ad C D, ſic A C ad C E; & permutando vt A D ad A C, ſic C D ad C E. Sed vt A D ad A C, ſic oſtendi eſſe C D ad B C; ergo C D eſt ad C E, vt C D eſt ad B C. æquales igitur ſunt B C, C E. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

A B C E D

SImili planè modo, ſi poſitis continuis A B, A C, A D, etiam A D trium maxima, C D maior differentia, & tertia quæpiam C E fuerint continuæ proportionales. Dico B C, E D æquales eſſe. Demonſtratio eadem eſt quę propoſitionis decimæ.

PROPOSITIO XI.

SInt A B, A C, A D in continua analogia, & minori differentiæ B C æqualis ſit C E.

Dico E D, C D, A D in continua quoque analogia eſſe.

A B C E D

Demonstratio.

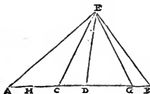
A B C E D

a 3. Secundi b 1. Secūdi. REctangulum A D E æquatur [a] rectangulo A E D cum quadrato E D: rectangulum autem A E D, æquatur rectangulo [b] D E C, & D E C B, hoc est rursus rectangulo D E C (cùm C E, C B sint æquales) & rectangulo D E B A. Sed per corollarium nonæ huius, A B, B C, E D sunt continuę, ergo rectangulum E D A B æquale est quadrato B C, hoc est quadrato E C. rectangulum igitur A E D æquatur rectangulo D E C bis, & quadrato E C. quare rectangulum A D E æquatur rectangulo c 4. Secundi. D E C bis, & quadratis E C, E D, hoc est [c] quadrato C D. Vnde A D, C D, E D sunt tres continuæ proportionales, quod erat demonstrandum.

Aliter.

QVoniam D A, C A, B A ponuntur continuæ, erit per primam huius D A ad C A, sicut D C ad C B, id est C E: quia æquales sunt ex datis B C, C E: Itaque diuidendo vt D C ad C A, sic D E ad E C: & inuertendo vt A C ad C D, ita C E ad E D, & componendo vt A D ad C D, sic C D ad E D. Quod erat demõstrandum.

Corollarium.



EX hac propositione deducitur hoc Theorema. Sint A B, C B, D B proportionales, erigatur autem ad angulũ quemcunque recta B E, æqualis ipsi C B, iunganturque puncta A E, C E, D E. Dico A E C, C E D angulos esse æquales: & si A E C, C E D anguli fuerint æquales, & C B linea æquetur rectę B E, dico A B, C B, D B esse proportionales: si verò A E C, C E D anguli æquentur, & A B, C B, D B sint proportionales; dico C B, E B lineas esse æquales.

Demonstratio.

d 7. Sexti. QVoniam ponitur vt A B ad C B, hoc est B E, sic B E ad D B, & angulus A B E sit communis, erit D E B [d] triangulum, A E B triangulo simile, adeoque angulus D E B angulo E A B æqualis. Rursum cùm C B, E B latera æquentur, erunt e 32. Primi. anguli C E B, E C B æquales; est autem angulus E C B, æqualis [e] duobus angulis E A C, A E C, igitur angulus C E B ęquatur duobus angulis A E C, E A C: sed D E B æqualis ostensus est angulo E A C; demptis igitur æqualibus E A C, D E B, manent A E C, C E D reliqui æquales.

Sint iam anguli A E C, C E D & C B, B E lineæ æquales, dico A B, C B, D B f Ibid. esse continuas. Quoniam angulus E C B hoc est C E B ęquetur angulis E A C, [f] A E C; & C E D ponatur æqualis ipsi A E C, erit D E B reliquus reliquo E A C æqualis: est autem angulus A B E communis; ergo tertius tertio ęquatur, adeoque & A E B, D E B triangula similia: vnde vt A B ad E B hoc est C B, ita E B siue C B ad D B. Quod erat secundum.

Iam verò sint A E C, C E D anguli ęquales, & A B, C B, D B tres continuę proportionales: dico C B, E B lineas æquari: si enim non sint ęquales, sit C B maior, fiatque C G ipsi B E æqualis. erunt igitur per secundã partem huius propos. A G, C G, D G g 11. Huius. continuę proportionales. vnde si fiat H C æqualis ipsi C D, erunt tam [g] A G, A C, A H; quàm A B, A C, A H continuę proportionales; igitur tam A G A H rectangulum, quàm A B A H rectangulum, æquale quadrato A C medię communi: quare h 14. Sexti. A G A H, A B A H rectangula æquantur inter se. Vnde vt A H, ad A H [h] sic A B ad A G: sed A H sunt æquales, ergo A G, A B rectæ ęquantur, & G punctum idem est quod punctum B: & C B, C G, id est B E lineæ æquales. eodem modo ostenditur C B non esse minorem ipsâ B E.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Dentur tres lineæ in continua ratione AB, BC, CD, ita vt BC sit maior AC, & fiat rectæ AC æqualis BE.

Dico AB, BE, ED esse proportionales.

A C E D B

Demonstratio.

Cum ponantur in continua analogia AB, BC, CD, igitur erit vt BC[a] ad CD ita AC, hoc est ex constructione BE ad BD. Ergo diuidendo vt BD ad DC, ita ED ad DB: & inuertendo vti CD ad BD, ita se habet BD ad DE. Quare [b] BD quadratum æquatur EDC rectangulo; quadratum autem [c] BE æquale est quadratis BD, DE, & rectangulo EDB bis sumpto: atqui rectangulum ABED æquatur iisdem: nam rectangulum ABED, æquatur EDC [d] rectangulo (hoc est, vt ostendi, quadrato BD) & rectangulo EDAC (hoc est rectangulo BED, id est rursum [e] quadrato ED cum rectangulo EDB, & rectangulo insuper EDB, rectangulum itaque ABED, cum iisdem æquale sit, æquabitur BE quadrato: patet igitur AB, [f] BE, BD esse in continua analogia. quod demonstrandum fuit.

[a] 1. Huius. [b] 17. Sexti. [c] 4. Secundi. [d] 1. Secundi. [e] 3. Secundi. [f] 17. Sexti.

PROPOSITIO XIII.

Ponantur AB, BC, CD; tres lineæ in continua proportione; & fiat BC æqualis DE.

Dico AE, EC, CD, esse in continua analogia.

Demonstratio.

Quandoquidem ponuntur esse continuæ proportionales lineæ AB, BC, CD, etiam erunt continuæ proportionales AB, DE, CD: & BC mediæ æqualis DE erit quadratum DE rectangulo ABCD æquale, quadratū autem [g] CE æquatur CD,

A B C D E

DE quadratis, & rectangulo CDE bis sumpto: quibus etiam æquatur rectangulum AECD nam rectangulum AECD æquatur ECD rectangulo (hoc est quadrato [h] CD cum rectangulo CDE) & rectangulo DCB, hoc est (quia ex constructione BC, DE æquantur) iterum rectangulo CDE & rectangulo insuper ABCD, (id est, vt modò ostendimus, quadrato DE) quare rectangulum AECD cùm iisdem æquale sit, quadrato CE æquari necesse est: adeoque CD, CE, EA esse in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

[g] 4. Secundi. [h] 3. Secundi.

PROPOSITIO XIV.

Sint AB, AC, AD, in continua analogia; & fiat vt AB ad BC, ita BC ad E lineam; & vt AD ad DC, sic DC fiat ad F.

Dico E & F esse inter se æquales.

Demonstratio.

A B C G D

E F

Quoniam supponuntur continuæ AB, AC, AD, si fiat DG æqualis BC, erunt continuæ [i] AB, BC, CG, ergo cùm ex datis etiam sint in continua ratione, AB, BC,

[i] 9. Huius.

A B, B C, & E, erit linea E æqualis C G: deinde quia continuæ sunt A B, A C, A D, si fiat B C æqualis G D, erunt quoque in continua analogia [a] C G, D C, D A: ponuntur autem continuæ A D, D C & F; erunt igitur continuæ F, D C, A D; est igitur F æqualis C G: vnde F & E quoque sunt æquales, vtpote ipsi C G æquales. Quod erat propositum demonstrare.

a 11. Huius.

Lemma.

DAti sint duo ordines trium quantitatum C A, B A, D A & C F, E F, G F; & sit vt C A ad D A, sic C F ad G F, sitque item vt B A ad D A, sic C F ad E F. Dico etiam esse C A ad B A, vt E F est ad G F.

Z

A D B C E G F

Demonstratio.

SI enim non est C A ad B A, vt E F ad G F, erit ergo aliqua maior vel minor, quàm C A, nempe Z ad B A, vt E F est ad G F; quoniam ergo vt C F prima ad E F secundam, ita in altero ordine B A secunda est ad D A tertiam, & vt E F secunda ad G F tertiam, ita in ordine altero Z prima, est ad B A secundam; ergo ex æquo in proportione perturbata, vt C F ad G F, ita Z [b] ad D A: atqui ex hypothesi etiam C A erat ad D A, vt C F ad G F, ergo vt C A ad D A, sic Z (maior vel minor quàm C A) est ad D A, quod est [c] absurdum; non est igitur C A ad B A, in alia proportione, quàm E F ad G F.

b 23. Quinti.

c 8. Quinti.

PROPOSITIO XV.

SInt proportionales A B, A C, A D; & linea B D composita ex vtraque differentia B C, C D, diuidatur bifariam in F, ac mediæ proportionali A C, æqualis sit producta A G.

Dico F C, F B, F G in continuata esse proportione.

G A B C D
F

Demonstratio.

CVm enim G C bisecta sit in A, & B D in F, erit C G ad A C, vt B D ad F D. præterea cùm A B, A C, A D ponantur continuæ, erit per primam huius B C ad C D, vt A B ad A C, id est A G; & componendo vt B G ad A G, ita B D ad C D: sed ante ostenderamus esse vt C G ad A G, ita B D ad F D. Quare per lemma præcedens etiam erit vt C G ad B G; ita C D ad B F, hoc est F D; & diuidendo C B ad B G, vt C F ad F D, hoc est F B; Itaque inuertendo, permutando, & componendo erit vt G F ad B F, ita B F ad C F; ergo G F, B F, C F sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

G A E B C D F

EX hac propositione hoc Theorema deducimus. Sint tres proportionales A B, B C, C D, diuisaque sit A B bifariam in E. Dico A E, E C & compositam ex A E & lineis B C, C D bis sumptis, esse proportionales, & si A E, E C, & composita ex A E & B C, C D lineis bis sumptis, sint continuæ; dico A B, B C, C D esse in continua analogia.

Demon-

Demonstratio.

PRoducatur CD in F, vt DF linea æquetur BD compositæ: BA verò producatur in G, vt GA, BC æquentur. Quoniam GA, BC lineæ sunt æquales, erunt [a] DC, DB, DG continuæ proportionales. Rursum cùm GA æquetur rectæ BC, & AE ipsi EB sit æqualis, erit GC in E bifariam quoque diuisa: est autem DF æqualis ipsi BD per constructionem: ergo EB, EC, [b] EF, hoc est AE, EC, & composita ex AE & BC CD bis sumptis, sunt continuæ proportionales. quod erat primum. a 8. Huius. b 15. Huius.

2. Quoniam EB, EC, EF sunt continuæ, & EC lineæ æquatur EG. & BF linea ex construc. sit in D bifariam diuisa, erunt DC, DB, [c] DG continuæ: quare & AB, BC, CD tres erunt [d] continuæ proportionales. quod erat demonstrandum. c Ibid. d 9. Huius.

PROPOSITIO XVI.

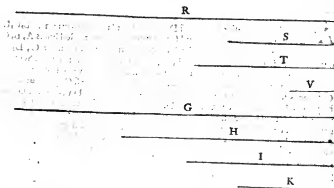
SI sit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam, erit vt prima cum secunda ad tertiam, ita omnes quatuor ad primam cum tertia; vel vt prima cum secunda ad secundam, ita omnes quatuor ad secundam cum quarta.

Demonstratio.



ESto AB ad BC, vt DE ad EF, dico esse AC ad AB, vt aggregatum ex AC & DF ad aggregatum ex AB, DE. Cùm enim sit AB ad BC, vt DE ad EF, erit inuertendo & componendo AC ad AB, vt DF ad DE: quapropter erit etiam vtraque antecedens AC, DF [e] ad vtramque consequentem AB, DE, vt vna antecedens AC ad AB vnam consequentem. quod erat propositum. e 12. Quinti.

Corollarium.



SI igitur ex quatuor proportionalibus fiat vna æqualis omnibus quatuor, verbi gratiâ R: & fiat altera S æqualis primæ, ac tertiæ, & tandẽ recta T exhibeatur æqualis primæ & secundæ: denique si ponatur V æqualis primæ, erit R ad S, vt T ad V: similiter si omnibus quatuor fiat æqualis G, & secundæ cum quarta, æqualis H, & primæ cum secunda æqualis I, & secundæ æqualis K, erit vt G ad H, sic I ad K. res hæc à

Pappo lib. tertio propositione decimaseptima in tribus continuè proportionalibus proposita fuit; quæ cùm vniuersalis sit, censuimus etiam hoc ipsum verbo indicandum ad ampliorem vsum.

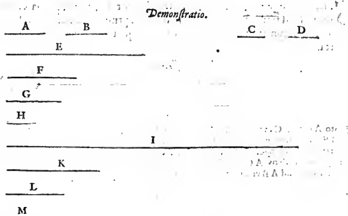
PROPOSITIO XVII.

Sit A æqualis B, & C æqualis D; omnibus autem A, B, C, D, ponatur æqualis E; duabus verò B, D, ponatur æqualis F: similiter duabus C, D, æqualis G; & rectæ D, æqualis H.

Dico rationem E ad F, & G ad H esse duplam. Quod si rectis E, F, G, H, æqualis ponatur I, & duabus F & H, æqualis statuatur K; & lineis G, H, æqualis ponatur L, denique residuæ H, fiat M æqualis;

Dico rationem I ad K, & L ad M esse triplam.

Demonstratio.



A cum B, dupla est ipsius B; & C cū D, ipsius D dupla est: ergo etiam A, B, C, D simul sumptæ, duarum B, D, simul sumptarum duplæ sunt. Sed lineis A, B, C, D æqualis est E, & lineis B, D, æqualis F, ergo E dupla est F: similiter C, D, simul sumptæ, hoc est G, ipsius D, id est H, sunt duplæ. Quod erat primum. Secundam partem ita expedimus. E continet rectam A bis, & C bis; ipsa verò F continet A semel, & C semel: ipsa tandem G continet C bis; & H æqualis est C; igitur omnes E, F, G, H, hoc est recta I, continet A tertiò, & rectam C sexies: recta verò K, continet ex hypothesi F, & H; sed F continet B & D, hoc est ipsam A semel, & semel rectam C, igitur si addatur H, hoc est C, recta K erit semel A, & C bis sumptam. sed A sumpta semel, cum C bis, est tertia pars A lineæ ter sumptæ, & lineę C sexies sumptæ: ratio ergo I ad K tripla est. Eodem modo ostendemus quod L, sit tripla lineę M, nam L æqualis est G, H; ipsa verò G continet bis C lineam, cui si adiungatur H, ipsi C æqualis, erit G cum H, hoc est L, tripla rectæ C, hoc estH, hoc est M: patet ergo veritas propositione exposita.

Scholion.

Pappus lib.3. propositione 18. tribus continuis quantitatibus applicuit hanc materiam, quæ scilicet eandem continuant rationem; quia verò aduerti non solum continuis rationibus conuenire hanc proportionalium proprietatem, verùm etiam discretissimis, modo rationes similes assumantur: hinc opera pretium duxi, hoc insinuare. Notatu autem dignum existimo, si quis vlterius

terius proportiones ita conuertat, quemadmodum hac propositione fecimus, in infinitum reperiet plures ac plures subdiuisiones rationum, solâ praxis in propositione posita obseruatione.

PROPOSITIO XVIII.

SInt quæcumque & quotcumque magnitudines A, B, C, D, E; ponaturque F omnibus (præter vltimam) bis sumptis, ac vltimæ E semel sumptæ æqualis; G verò æqualis omnibus simul sumptis, denique H æqualis vltimæ E.

Dico F, G, H arithmeticam analogiam continuare.

A B C D E
F
G
H

Demonstratio.

LIneaF, id est A, B, C, D, bis sumptæ, vnà cum E semel, excedit rectâ G, id est A, B, C, D, E semel sumptas, excessu A, B, C, D, semel sumptis. Sed eodem excessu excedit linea G, ipsam H, quæ æqualis ponitur rectæ E, igitur F, G, H lineæ arithmeticam continuant proportionem. Quod erat demonstrandum.

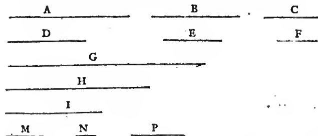
Scholion.

QVare mirum videri non debuit Frederico Commandino, Pappum, cùm lib. 3. ex Geometrica proportione, analogias, ac medietates eruit, Arithmeticas neglexisse; quandoquidem non ex Geometrica tantum sed quacumque quantitatum serie producatur; quod Pappum in cæteris sagacißimum latere potuiße vix credi potest; vel certè oportuisset Commandinum dum Pappi defectum, vt vocat, eodem libro propositione 19. supplere nititur, continuitatem Geometricam aßignare, ex qua, cùm quapiam ratione Arithmeticam analogiam deduxisset, non ideò cæteris non proportionalibus quantitatibus commune esse, posset demonstrari: siquidem à problematici nitoris splendore alienum videtur, certum & determinatum quid in constructionem adhibere, cùm obuium quodlibet fuerit sufficiens. Sed hæc in gratiam antiquitatis dicta sint, quam venerari omnes deberent: illius enim sæculi virorum labores, & ingeniorum partus hucusque non vidi à recentioribus adæquata.

PROPOSITIO XIX.

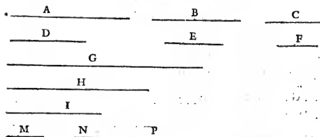
DAtis duabus progressionibus terminorum in continua ratione Arithmetica A, B, C; D, E, F; ex vtriusque seriei terminis A, D, B, E, C F in vnum conflatis constituatur tertia series G, H, I.

Dico etiam G, H, I esse in continua Arithmetica analogia.



 Demon-

Demonstratio.



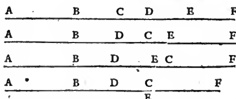
Terminorum seriei A,B,C, mutuus excessus sit M; N, verò excessus alterius: M autem & N sibi additi, faciant P: quoniam igitur A superat B excessu M, & D superat E excessu N, A & D simul sumpti, hoc est G, superabunt B & E simul sumptos, hoc est H, excessibus M & N simul sumptis, hoc est excessu P: similiter ostendemus H superare I excessu P. sunt igitur G, H, I in Arithmetica analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Esto AB ad BC, vt BD ad DE; & fiat ipsi BC æqualis EF, vbicumque tandem cadat punctum E.

Dico esse vt AB ad AC, sic AD ad AF, & BD ad BE.

Demonstratio.



Quoniam est vt AB ad BC, ita BD ad DE, erit componendo, conuertendo vt AB ad AC, ita BD ad BE: vlteriùs, cùm sint EF, BC æquales, erit tota AF æqualis quatuor proportionalibus AB, BC, BD, DE: & AD æqualis primæ & tertiæ, vti & AC primę ac secundæ: quare vt [a] AC ad AB, ita AF ad AD: & inuertendo vt AB ad AC, ita AD ad AF, & vt antè ostendimus, ita BD ad DE: quod erat demonstrandum.

a 16. Huius.

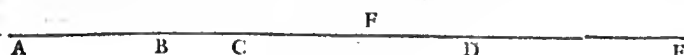
PROPOSITIO XXI.

Datæ sint quatuor proportionales, minima AB, secunda AC, tertia AD, quarta AE.

Dico primò DB differentiam primæ & tertiæ, minorem esse EC, differentiâ secundæ & quartæ:

Secun-

Secundò si BD minori auferatur æqualis EF, ex CE maiori, vt AB ad BD, vel vt AC ad CE, sic BC differentiam primæ & secundæ, fore ad CF differentiam differentiarum BD & CE.



Demonstratio.

CVm ex hypothesi AB sit ad AC, vt AD ad AE: igitur permutando vt AB ad AD, sic AC ad AE; & diuidendo vt AB ad BD, sic AC ad CE: igitur permutando vt AB ad AC, sic BD ad CE: atqui AB minor est quàm AC, igitur & BD minor est quàm CE. Quod erat primum. deinde ex discursu iam facto, vt AB, ad AC, sic est BD ad CE; quare cum EF ex hypothesi sit æqualis ipsi BD, erit etiam AB ad AC, vt EF ad CE; ac diuidendo vt AB ad BC, sic EF ad FC. & permutando vt AB ad EF, id est vt AB ad BD, sic BC ad CF: atqui etiam vt AB ad BD, sic est AC, ad CE, (vt antè ostendi) ergo vt AB ad BD, vel AC ad CE, sic est BC ad CF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.



DAtæ sint quatuor proportionales, minima AB, secunda AC, tertia AD, quarta AE.

Dico primò, differentiam primæ & secundæ BC, minorem esse differentiâ DE, tertiæ & quartæ:

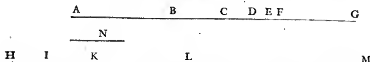
Secundò si ex ED maiori tollatur EF, æqualis minori BC, fore vt AD ad DE, sic BD differentiam primæ & tertiæ, ad DF differentiam differentiarum BC, DE.

Demonstratio.

CVm sit AB ad AC, vt AD ad AE, igitur inuertendo, diuidendo, rursumque inuertendo, vt AB ad BC, sic AD ad DE: Itaque permutando vt AB ad AD, sic BC ad DE. sed AB minor est AD, ergo & BC minor est quàm DE: Quod erat primum.

Deinde cùm modò ostensum sit, esse AB ad AD, vt BC est ad DE; & cùm FE ponatur æqualis BC, etiam AB est ad AD, vt EF ad DE. Itaque inuertendo, ac conuertendo vt AD ad BD, sic DE ad FD: ac demum permutando vt AD ad DE, sic BD ad DF. Atqui etiam vt AD ad DE, sic est AB ad BC, (vt antè ostendi) ergo vt AD ad DE, vel AB ad BC, sic est BD ad DF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.



SInt continui proportionalium processus AB, BC, CD, DE, EF: assumptâ vero quâuis aliâ N, fiat vt AB ad N, sic N ad HI: vtque BC ad N, sic N fiat ad IK, & vt CD ad N, sic N ad KL, & sic deinceps:

Dico HI, IK, KL, &c. esse in continua analogia.

Demonstratio.

EX hypothesi lineæ A B, N, H I, sunt continuæ proportionales; item B C, N, I K:
a 17. Sexti. ergo tam rectangulum A B H I quàm rectangulum B C I K ᵃ æquatur quadrato
b 16. Sexti. N, ac proinde æqualia sunt inter se rectangula; ergo vt A B ad ᵇ B C, sic I K ad H I, similiter rectangula B C I K, & C D K L, æquantur inter se, quia eidem quadrato N, æqualia sunt; igitur vt B C ad C D, sic K L ad K I: atqui ex datis B C est ad C D, vt A B ad B C, hoc est, vt ostendi, sicut I K ad H I, ergo K L, est ad I K, vt I K ad H I: continuæ sunt proportionales igitur H I, I K, K L. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

SI continuè proportionalium rectangulorum bases sint in continua analogia: erunt & altitudines in continuata proportione.



Demonstratio.

SInt A B, B E, E G, G I, I L, insuper & rectangula A B C D, B E D F, E G F H &c.
c 23. Sexti. in continua analogia. Dico etiam C D, D F, F H &c. esse continuè proportionales. Rectanguli enim A B C D proportio ad rectangulum B E D F, ᶜ componitur ex rationibus A B ad B E, & C D ad D F: item rectanguli B E D F proportio ad E G F H rectangulum, componitur ex rationibus B E ad E G, & D F ad F H: quare cùm ex hypothesi rectangulorum A B C D, B E D F, E G F H, æquales siue eędem proportiones sint, erunt quoque rationes A B ad B E, & C D ad D F, simul sumptæ æquales, siue eædem cum rationibus B E ad E G, & D F ad F H simul sumptis. sunt autē ex hypothesi etiam æquales rationes A B ad B E, & B E ad E G; Quare si ab æqualibus rationibus, nempe à composita ex rationibus A B ad B E, & C D ad D F, itemque à composita ex rationibus B E ad E G, & D F ad F H, auferas æquales rationes, A B ad B E, & B E ad E G; patet reliquas proportiones C D ad D F, & D F ad F H fore æquales: vt constat ex definitione compositionis proportionum. continuę sunt igitur proportionales C D, D F, F H. Simili discursu etiam reliquæ H K, K M, &c. cum præcedentibus eandem continuabunt rationem. constat ergo quod propositum erat demonstrare.

Corollarium.

EOdem genere discursus, si rectangula A B C N, B E D N, E G F N, &c. itemque bases A B, B E, E G, &c. sint in continua analogia, demonstrabimus eorum altitudines C N, D N, F N. &c. continuam quoque seruare analogiam.

PROPOSITIO XXV.

POnantur denuo A B, B C, C D proportionales, vti etiam E F, F G, G H; & ratio A B ad E F, continuetur quomodocunque in I, K, P; & similiter ratio B C ad F G producatur in L, M, Q: & ratio C D ad G H, pergat in N, O, R, &c.

Dico etiam I, L, N, & K, M, O, item P, Q, R, continuare suam rationem.

Demon-

Demonstratio.

A	B	C	D
E	F	G	H
I		L	N
K		M	O
P		Q	R

Quadratum enim EF est æquale rectangulo sub AB & I; & quadratum FG, æquale est rectangulo sub BC & L; vti etiam quadratum GH, rectangulo sub CD & N contento: igitur vt quadrata EF, FG, GH inter se sunt, ita etiam rectangula sub lateribus AB & I, sub BC & L, item sub CD, & N contenta: sed quadrata sunt in continuata analogia, (cùm latera super quibus fiunt ex hypothesi sint in continua analogia) igitur etiam rectangula, sub lateribus AB & I, BC & L, CD & N, sunt continuè proportionalia: cùm autem ipsorum bases ponantur in continuata ratione AB, BC, CD; etiam I, L, N, altitudines erunt in continuata analogia per præcedentē. Eodem modo quia ex hypothesi EF, FG, GH, & ex demonstratis modò I, L, N, sunt continuæ; itemque ex hypothesi EF, I, K: & FG, L, M; item G, H, N, O, continuam seruant analogiam: demonstrabimus K, M, O esse continuas. similiter quoque procedetur in lineis P, Q, R, atque ita in infinitum. constat ergo veritas propositionis. a 17. Sexti.

PROPOSITIO XXVI.

Sint series continuæ proportionalium, habentes primum terminum A, communem, A, B, C, D, E, F, & A, M, N, O, P, Q; continuatâ autem serie vtriusque, fiat vt B ad A, ita A ad G, &c. & vt M ad A, ita A ad R, sic vt omnes F, E, D, C, B, A, G, H, I, K, L: item omnes Q, P, O, N, M, A, R, S, T, V, X sint in continuata analogia.

Dico esse B ad M, vt R ad G, & C ad N, vt S ad H, & D ad O, vt T ad I, &c.

X	L
V	K
T	I
S	H
R	G
A	
M	B
N	C
O	D
P	E
Q	F

Demonstratio.

Cvm B, A, G, sint tres continuæ, item M, A, R, erit tam [b] rectangulum BG, quàm rectangulum MR, quadrato A, ideoque & inter se æqualia. Quare vt B ad M, sic [c] R ad G: similiter quoniam C, B, A, G, H, sunt continuæ, ita vt mediam A, æqualis vtrimque proportionalium numerus cingat: patet ex elementis, A esse mediam proportionalem, inter C & H: rectangulum igitur HC æquatur quadrato A; eodem modo rectangulum SN quadrato A æquale erit: ergo inter se æquantur rectangula HC, SN. Quare [d] vt C ad N, sic S ad H, simili discursu erit vt D ad O, sic T ad I, & sic de cæteris: Quod erat demonstrandum.

b 17. Sexti. c 16. Sexti. d ibid.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

L	F
K	E
I	D
H	C
G	B
A	

Sint duo ordines continuè proportionalium eandem habentes primam, A, B, C, D, E, F, & A, G, H, I, K, L.

Dico proportionem H ad C, esse duplicatam proportionis G ad B; & rationem I ad D, rationis G ad B esse triplicatam: & rationem K ad E, quadruplicatam: L verò ad F quintuplicatam eiusdem rationis G ad B: & sic in infinitum.

Demonstrat hanc Eucl. lib. 14. pr. 28. de quatuor continuè proportionalibus. Nos eandem de quotcunq; & aliâ planè methodo demonstrabimus.

Demonstratio.

Quoniam tam A, G, H quàm A, B, C sunt continuæ proportionales, rectangulum H A, quadrato G, & rectangulum C A, quadrato [a] B æquale erit. vnde rectangulum H A, ad rectangulum C A; est vt quadratum G, ad quadratum B: itaque cùm quadrata G, B, sint [b] in duplicata ratione basium G ad B, erit & rectangulorum proportio duplicata, rationis G ad B: sed ratio rectanguli H A, ad rectangulum C A, est ratio [c] H ad C; ergo proportio H ad C est duplicata rationis G ad B. Deinde quoniam tam G, H, I, quàm B, C, D, sunt continuæ, erit rectangulum I G, quadrato H, & rectangulum D B, quadrato C æquale. itaque ratio rectangulorum I G, D B, hoc est ratio [d] composita ex proportionibus laterum I ad D, & G ad B, æqualis est rationi quadrati H, ad C: atqui ratio quadratorum H, C, est quadruplicata rationis G, B; (est enim ratio quadratorum H, C duplicata rationis H ad C, quæ ostensa modò est duplicata rationis G ad B:) ergo proportio composita ex rationibus I ad D, & G ad B, est quadruplicata rationis G ad B. ex quo patet rationem I ad D solam, esse triplicatam rationis G ad B. Simili discursu demonstrabimus rationem K ad E, esse quadruplicatam; & rationem L ad F, quintuplicatam rationis G ad B. constat ergo veritas propositionis.

a 17. Sexti.
b 20. Sexti.
c 1. Sexti.
d 23. Sexti.

PROPOSITIO XXVIII.

Sint duo ordines continuarum A, B, C, D, E; & A, F, G, H, I eandem nacti primam A: ponatur autem tertius ordo continuè proportionalium; K, L, M, N, O, secundo ordini similis; ita tamen vt A & K, sint inæquales. Deinde inter tertias C & G, ponatur media P; & inter quartas D & H, ponantur duæ mediæ Q & R; tandem inter quintas ponantur tres mediæ S, T, V, & ita deinceps.

Dico esse vt L ad B, ita M ad P, & N ad R, vt O ad V, &c.

A	B	C	D	E
			Q	S
		P	R	T
				V
A	F	G	H	I
K	L	M	N	O

Demon-

Demonstratio.

QVoniam vtriusque seriei, primus terminus idem est A, ergo per præcedentem G est ad C, in duplicata ratione F ad B: sed G etiam est ad C, in duplicata ratione G ad P, igitur G est ad P, vt F ad B: sed ex supposito F ad G est vt L ad M; igitur alternando M est ad G, vt L ad F; est igitur ex æquo M ad P, vt L ad B. Simili modo per præcedentem H ad D, triplicatam habet rationem, F ad B; sed etiam H ad D, habet triplicatam eius, quam habet H ad R; ergo vt F ad B, sic H ad R: deinde est F ad H, vt L ad N, vnde alternando, & ex æquo N ad R vt L ad B. Eadem prorsus ratione demonstrabitur esse O ad V, vt est L ad B. Quare patet veritas propositionis.

Hinc etiam patet B, P, R, V esse continuas cum L, M, N, O, sint continuæ, & quidem in eadem analogia in qua sint lineæ A, F, G, H, I. vt patet.

PROPOSITIO XXIX.

POnantur duæ series continuarum; A, B, C, D; & A, E, F, G, communem habentes primam A; & inter secundas B, E, sint quotuis mediæ H, I, K, L; totidemque inter tertias interponantur; M, N, O, P; Similiter inter quartas D & G, ponantur mediæ Q, R, S, T.

Dico A, H, M, Q; item A, I, N, R; & A, K, O, S; & A, L, P, T esse in continua analogia.

Demonstratio.

POnantur enim inter A & M, media proportionalis V; & inter A & N media X; similiter Y, Z, α, mediæ ponantur inter A, O, & A, P, & A, F. Quoniam ergo A, B, C, & A, V, M sunt continuæ proportionales, erit [a] ratio C ad M, duplicata eius, quam habet B ad V. vlterius cùm A, V, M, & A, X, N etiam sint continuæ proportionales, erit ratio [b] M ad N, duplicata eius quam habet V ad X: eodem pacto ostendetur, rationes N ad O, & O ad P, & P ad F, esse duplicatas rationum X ad Y, & Y ad Z, & Z ad α: Quare cùm C, M, N, O, P, F ponantur esse continuæ, etiam B, V, X, Y, Z, α, patet esse continuas. Est igitur ratio B ad α, quintuplicata rationis B ad V, & quia tam α, quàm E, mediæ sunt inter A & F, inter se æquales erunt; ideoque & ratio B ad α, & ratio B ad E, eadem est; ergo ratio B ad E, quintuplicata est rationis B ad V. quia autem B, H, I, K, L, E ponuntur continuæ, etiam ratio B ad E, est quintuplicata rationis B ad H; est igitur B ad V, vt B ad H. vnde æquales sunt H & V. Similiter ostendetur I & X, K & Y, L & Z æquales esse. Quare cùm ex constructione A, V, M; A X N; A Y O; A, Z, P, sint continuæ; etiam A, H, M; A, I, N; A, K, O; A, L, P continuæ erunt. Non alia ratione ostendemus, etiam ipsas A, H, M, Q; item A, I, N, R, &c. esse in continuata analogia;

[a] 17. huius
[b] ibid.

K Si

(Si nempe ipsis A,H, M inueniamus quartam β, & ipsis A ,I,N quartam γ: & ipsis A, K, O quartam δ. & ipsis A, L, P quartam ι, denique ipsis A, E, F quartam ξ) demonstrabimus esse vt priùs ipsas β, γ, δ, ι, ξ, ipsis Q, R. S, T, G equales; ac proinde omnes quatuor A, H, M, Q; A, I, N, R; &c. esse continuas. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXX.

A B C D E F G H I

K L M N O P Q R S

DEntur binæ series continuè proportionalium in diuersis rationibus, A, B, C, D, &c. K, L, M, N, &c. ita tamen vt A K, L B sint etiam continuæ proportionales.

Dico omnes A, K, L, B, N, O: C, Q, R, D, & sic deinceps, (omisso in serie K L tertio quoque termino M, P, S) esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVia A, K, L, B ponuntur continuę, ergo vt K ad L, sic L ad B: sed etiam est ex hypothesi vt K ad L, sic L ad M, ergo L ad B, & M eandem habet rationem; æquales [a] igitur sunt B & M, ideoque rationes [b] B ad C, M ad C æquales sunt. Quoniam autem A, K, L, B sunt quatuor continuę proportionales, erit ratio A ad B, id est ex hypothesi ratio B ad C, id est ex demonstratione ratio M ad C, triplicata rationis A ad K: sed ratio A ad K, ex hypothesi est ratio K ad L, id est ratio M ad N: ergo ratio M ad C, triplicata est rationis M ad N: est autem ratio M ad P, triplicata rationis M ad N, (sunt enim M, N, O, P continuæ) igitur vt M ad C, sic M ad P: vnde & æquales sunt C & P. quare cùm loco M, in serie statuatur illi æqualis B, & loco P, illi æqualis C. erunt A, K, L, B, N, O, C continuę proportionales. similiter ostendemus seriem hanc per terminos Q, R, D, &c. continuari in infinitum. Quod erat demonstrandum.

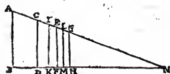
a 9. Quinti.
b 7. Eiusdē.

Corollarium.

HInc sequitur: rationem A ad B, triplicatam esse rationis, K ad L: & B ad C, triplicatam ipsius L ad M: item C ad D, triplicatam ipsius M ad N: & sic de ceteris. nam ratio A ad B continuatur, estque illa triplicata rationis K ad L, quę per reliquos terminos continuatur.

PROPOSITIO XXXI.

IN triangulo quouis A B N quatuor ponantur parallelæ A B, C D, E F, G H, in continua analogia: ac inter A B, G H, media sit IK; inter E F verò & G H, media sit L M:



Dico rationem A B ad I K triplicatam esse rationis L M ad G H.

Demonstratio.

RAtio A B ad G H, duplicata est ex hypothesi, rationis A B ad I K: & ratio E F ad G H, duplicata rationis L M ad G H: ergo cùm iterum, ex hypothesi ratio A B ad G H triplicata sit rationis E F ad G H, erit ratio A B ad I K,

quæ

quæ dimidiata est rationis A B ad G H, triplicatâ rationis L M ad G H, quæ dimidiata est rationis B F ad G H. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

QVantitas ex quotuis continuè proportionalibus composita, ad aliam ex pari numero terminorum eiusdem seriei productæ conflatam, multiplicem rationem habet proportionis primæ ad secundam, ex quot terminis alterutra quantitatum componitur.

Demonstratio.

A D E H BFGI C

POnatur series rationis alicuius, constituere quantitatem A B, & series vlterius producta conficiat quantitatem B C; hoc tamen pacto vt vtraque pari numero constet terminorum continuè proportionalium eiusdem seriei productæ; verbi gratia si numeret A B quantitas terminos octo continuè proportionales, & B C totidem eiusdem seriei productæ; dico A B ad B C, octuplicatam habere rationem eius quã A D ad D E. Cùm enim tota series rationis A D ad D E, pergat vniformiter & continuè ex supposito vsque ad C, & sint tot termini eiusdem seriei in A B, quot sunt in B C; exempli causa in singulis octo; habebit ergo prima A D ad B F, octuplicatam rationem eius, quam habet A D [a] ad D E: similiter ratio D E ad F G, octuplicata est rationis D E ad E H, id est rationis A D ad D E: quare cùm rationes A D ad B F, & D E ad F G; octuplicatæ sint eiusdem rationis A D ad D E, erit vt A D ad B F, sic D E ad F G: eodem modo erit vt D E ad F G, sic E H ad G I, & sic deinceps. Quare omnes [b] antecedentes, id est octo termini qui constituunt A B, se habent ad omnes consequentes, hoc est ad octo terminos qui constituunt B C, vt vna antecedens A D, ad vnam consequentem B F. Quare cùm A D ad B F, rationem habeat octuplicatam rationis A D, ad D E, habebit quoque A B ad B C octuplicatam eius, quam habet A D ad D E. Quod erat demonstrandum.

[a] Defin. 3. sexti.
[b] 12. Quinti.

PROPOSITIO XXXIII.

A F G B H E I C D

INter tres continuè proportionales A D, B D, C D, mediæ sint G D, E D: rursum inter A D, G D, media sit F D, & inter B D, E D, media sit H D: & hoc semper fiat:

Dico esse vt A B ad B C, sic A G ad B E, & A F ad B H, &c.

Demonstratio.

CVm inter tres continuas A D, B D, C D, mediæ sint G D, E D, erunt A D, G D, B D, E D, C D, (vt patet ex elementis) omnes continuæ proportionales: proindeque etiam [c] A G, G B, B E, E C erunt continuæ proportionales; ergo A G ad G B, vt B E ad E C: & componendo ac per conuersionem rationis A B ad A G, vt B C ad B E. Igitur alternando A B ad B C, vt A G ad B E. Deinde quoniam A D, G D, B D, E D, sunt continuæ, A D est ad G D, vt B D ad E D: Quare si inter A D, G D media sit F D, & inter B D, E D; media H D, patet ex elementis esse A D ad F D, vt B D ad H D. atqui cùm A D, F D, G D, sint continuæ, A F est ad F G, vt A D ad F D. per 1. huius. Et cùm B D, H D, E D sint continuæ etiam B H est ad H E, vt B D ad H D, hoc est (sicut iam ostendi) vt A D ad F D, ergo A F est ad F G, vt B H ad H E. Quare componendo ac per con-

[c] 1. Huius.

 uersionem

uersionem rationis vt AG est ad AF; sic BE ad BH; & permutando vt AG ad BE, hoc est (sicut ostendi) vt AB ad BG; sic AF ad BH. Constat ergo propositionis veritas.

PROPOSITIO XXXIV.

A E G I C K H F D B

Sint in continua analogia AB, CB, DB, & inter AB, CB media sit EB; inter CB verò & DB sit media FB; deinde inter EB, CB, ac CB, FB mediæ sint GB, HB: Denique inter GB, CB, & CB, HB sint mediæ IB, KB. & sic deinceps.

Dico rationem AC ad CD, duplicatam esse rationis EC ad CF; quadruplicatam autem rationis GC ad CH; & octuplicatam rationis IC ad CK: atque ita in infinitum.

Demonstratio.

Cum AB, CB, DB sint continuæ proportionales, erit AC ad CD ratio eadem cum ratione AB ad CB: item quia continuæ sunt AB, EB, CB, erit ratio AE ad EC eadem cum ratione AB ad EB: & quia inter tres continuas AB, CB, DB mediæ sunt EB, FB, patet ex elementis AB, EB, CB, FB, DB omnes esse continuè proportionales: quare ratio AB ad CB, id est vt iam ostendi, ratio AC ad CD, duplicata est rationis AB ad EB, id est vt ostendi, rationis AE ad EC. quia autem continuæ proportionales sunt AB, EB, CB, FB, etiam erunt AE, EC, CF continuæ: ergo vt AE ad EC, sic EC ad CF: ergo ratio AC ad CD, etiam duplicata est rationis EC ad CF: quod erat primum. Eodem discurrendi modo demonstrabimus, rationem EC ad CF, duplicatam esse rationis GC ad CH: adeoque rationem AC ad CD, quadruplicatam esse rationis GC ad CH: denique ostendemus etiam simili ratiocinatione, rationem GC ad CH, duplicatam esse rationis IC ad CK. Vnde manifestum est rationem AC ad CD, eiusdem octuplicatam esse. Quæ erant demonstranda.

a Ibid.

b 1. Huius.

PROPOSITIO XXXV.

Datam lineam secare in quotuis continuè proportionales, secundum datam rationem.

Constructio & demonstratio.

A H I K B

C D E F G

Data sit linea AB diuidenda sicut postulat propositio, in quatuor continuas, secundum rationem datam CD ad DE. Continuetur toties ratio CD ad DE, quot continuas numero desideras in linea data AB, nempè CD, DE, EF, FG: tum diuide lineam AB, sicut diuisa est linea CG; in punctis H, I, K. Dico AB, esse diuisam prout exigit propositio; patet demonstratio ex constructione.

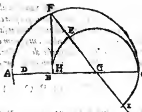
c 10. Sexti.

PROPOSITIO XXXVI.

Datarum linearum alteram ita secare, vt partes lineæ sectæ, cum in secta, sint in continua analogia.

Con-

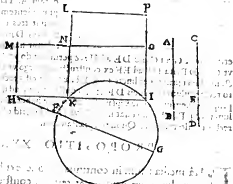
Constructio & demonstratio.



Datæ sint duæ lineæ AB & BC, quarum alteram scilicet AB, oporteat diuidere in D puncto, vt AD, DB, BC sint in cõtinua analogia, pro constructione, super BC diametro describatur circulus, item super linea AC, composita ex duabus datis AB & BC, qui sint BEC & AFC; & ex puncto B erigatur perpendicularis BF, ad rectam AC; ducaturque ex F puncto, linea FI. per centrum minoris circuli G: fiat denique rectæ GE, æqualis GD. Dico factum esse quod imperatum fuit: quoniam quadrato FB tam æquatur rectangulum ABC, quàm [a] EFI, hoc est BDC, erunt BDC, ABC rectangula æqualia inter se: sed ABC rectangulo æquantur rectangula [b] ADBC, DBC; & BDC rectangulo æquatur rectangulum DBC, vnà cum quadrato DB: dempto igitur communi rectangulo DBC, manet DB quadrato, æquale rectangulum ADBC. igitur AD, DB, BC sunt continuæ. a 13. Sexti. a 35. Tertij. b 2. secundi.

Alter.

Datæ sint AB, CD, quarum vna CD, ita secanda sit in E, vt AB, CE, ED sint in analogia continua.



Constructio & demonstratio.

Assumpta FG linea maiori quàm AB, fiat super FG tanquam diametro circulus FIG: deinde (quod ex elementis facilè perficitur) rectangulũ GHF æquale fiat rectangulo ABCD, & ex pũcto H ita ducatur HKI, vt KI æqualis sit AB (quod ab alijs factum, & nos libro nostro de circulis alia atque alia methodo præstabimus) denique ex K erectâ normali KL, æquali ipsi CD, præscindatur ex KL (ostendam enim esse maiorem) linea KN, æqualis ipsi HK. Dico factum quod petebatur.

Nam rectangulum [b] IHK æquatur rectangulo GHF, id est ex constructione rectangulo ABCD, id est rursum ex constructione IKL, ergo vt IH ad KI, ita est reciprocè KL ad KH: atqui IH maior est quàm IK, ergo & LK, quàm KH maior erit, quod assumptum fuerat in constructione: perficiantur iam rectangula IHK, IKL, ductis per N & L parallelis ad HI, & normalibus HM, IOP. Quoniam igitur rectangula IM, IL æqualia sunt, ablato communi KO, reliqua OL, KM æqualia erunt. Quare cum KM (vt ex constructione patet) sit quadratum, erunt NO, KN, LN tres continuæ. Atqui NO est KI, hoc est AB; & KL est CD. Factum igitur est quod petebatur. b 36. Sexti.

Scha-

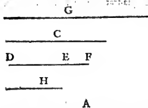
Scholion.

HAnc eandem propositionem nonnulli alij & proposuerunt, & feliciter soluerunt. Vti R. P. Clauius Magister meus (cuius per plures annos familiaris & domesticus auditor fui) Peletarius, & Guido Vbaldus: sed exercitij causa, etiam meo eam Marte expedire volui, ne alienis plumis me exornare velle videar: nusquam enim propositionem statui meis lucubrationibus interserere, quam diuersi discursus demonstratione meam non fecero; vel authoris nomen in publicum non protulero. Rogo benigne Lector huius rei memor esse velis, dum in posterum simile occurret.

PROPOSITIO XXXVII.

DAtarum duarum rectarum alteram ita secare, vt rectangulum sub insecta, & parte lineæ sectæ, ad residuæ lineæ quadratum, datam habeat rationem.

Constructio & demonstratio.



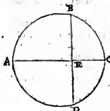
DAta sit ratio A ad B, deinde datæ lineæ sint C & DF, postulat propositio, secari rectam DF in E, vt rectangulum sub C & EF, ad quadratum DE, eam rationem habeat, quam data B ad datam A. Fiat C ad G, vt B ad A, & per præcedentem secetur DF in puncto E, vt sint tres continuæ proportionales lineæ, G, DE, EF. Dico factum quod petebatur. fiat enim vt B ad A, sic H ad DE: erit ergo vt G ad C, sic DE ad H: & permutando vt G ad DE, ita C ad H: sed vt G ad DE, ita DE ad EF ex constructione: ergo vt DE ad EF, ita C ad H: rectangulum igitur super lineis C & EF, æquale est [a] rectangulo sub DE & H. porrò rectangulum sub lineis DE & H constructum, ad quadratum DE, eam habet proportionem quam lineæ ipsæ, scilicet quam habet [b] H ad DE: ergo & rectangulum C & EF, est ad quadratum DE, vt H ad DE: id est vt B ad A: igitur datarum rectarum alteram, &c. Quod fuit præstandum.

a 16. Sexti.
b 1. Sexti.

PROPOSITIO XXXVIII.

DAtâ mediâ trium in continua ratione existentium, & aggregato trium linearum primam & tertiam constituentium, exhibere primam & vltimam.

Constructio & demonstratio.



SVper aggregato tanquam diametro, circulus describatur ABC; in quo recta accommodetur BD, quæ æqualis sit duplæ, datæ mediæ: quod fieri posse cõstat ex datis & ex constructione: dein agatur per centrum linea AC, secans orthogonaliter in E, lineam BD. Dico factum esse quod petitur, est enim AC linea æqualis aggregato, & BE ([c] dimidia ipsius BD) datæ mediæ æqualis: quare cùm AC orthogona sit ad BE, erit AEC [d] rectangulum æquale quadrato EC: igitur datâ mediâ trium continuè proportionalium, illarumque aggregato, exhibuimus primam & tertiam. Quod erat faciendum.

c 3. Tertij.
d 35. Tertij.

Lemma.

Lemma.

SI fuerint tres B A, D A, C A in continua analogia, rectangulum super maxima A B, & excessu C D secundæ supra tertiam, non erit maius quadrato dimidię ipsius A B.

Demonstratio.

A C D B

QVoniam enim B A, D A, C A sunt continuæ proportionales, erit vt B A [a] ad D A, sic B D ad D C. Quare rectangula [b] B A C D, & B D A æquantur. Sed rectangulum B D A, non est maius quadrato dimidiæ A B [c] vt patet. ergo neque rectangulum B A C D maius erit quadrato dimidiæ A B. Quod erat demonstrandū. a 1. Huius. b 16. Sexti. c 5. Secundi.

PROPOSITIO XXXIX.

DAtâ maximâ trium continuarum, & excessu quo media superat minimam, exhibere mediam & minimam.

Constructio & demonstratio.

A C D B

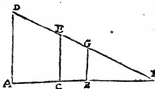
E F G

DAta sit A B linea maxima trium proportionalium, & G æqualis excessui quo media superat minimam: oporteat igitur inuenire mediam & minimam. fiat rectangulo A B G æquale quadratum E F: quoniam ergo per lemma præcedens quadratum E F, id est rectangulum A B G, non maius est quadrato dimidiæ A B. patet ita [d] secari posse A B, vt rectangulum sub partibus, æquale sit quadrato E F. Itaque diuidatur recta A B, in puncto D, vt rectangulum A D B æquale sit quadrato E F. Dico punctum D esse quod, problema soluit: fiat enim rectæ G, æqualis linea D C: erit itaque rectangulum A B C D æquale rectangulo A D B, cùm vtrumque æquale sit quadrato E F; ergo vt A B ad [e] A D, ita est B D ad D C: si iam à rectangulo A B C D, auferas rectangulum B D C, remanebit rectangulum A D C: si verò à rectangulo A D B, auferas idem B D C, reliquum erit rectangulum A C D B: atqui tota A B C D, A D B sunt æqualia, itaque ablato communi, erunt & reliqua rectangula A D C, A C D B æqualia inter se; igitur vt B D ad D C, [f] id est (sicut iam ostendi) vt B A ad D A, sic D A ad C A. Sunt igitur tres in continua analogia A B, A D, A C; & C D æqualis G, est excessus, quo media A D, excedit minimam A C. Factum igitur est quod requirebatur. d 5. Secundi. e 16. Sexti. f 14. Sexti.

PROPOSITIO XL.

DAtis duobus excessibus, trium magnitudinum in continua analogia existentium, exhibere tres continuas.

Constructio & demonstratio.



DAti sint excessus A C, C B, qui ponantur in directum, & erigantur A D, C E parallelæ, quæ inter se eandem rationem seruent quam A C ad C B; & ducta per puncta D & E recta D E, conueniat cum A B producta in puncto quodam F. Dico factum quod postulatur:

nam

nam AD ad CE, eandem habet rationem, quam linea AF ad CF. Sed quam rationem habet DA ad CE, eandem ex constructione habet AC ad CB; igitur quam rationem habet tota AF ad totam CF, eandem habet AC ablata ad CB ablatam. Ergo vt AF tota ad CF totam sic quoque a CF reliqua ad reliquam BF. Quare rectæ AB adiuncta est linea BF, quæ faciat AF, CF, BF in continua proportione; quod petebatur.

a 19. Quinti.

Aliter.

A E B C D

CVm hæc constructio solis lineis conueniat, subiungamus aliam, quæ in omni genere quantitatis locum habeat:

Dati igitur sint excessus AB, BC: fiat AE differentia datorum excessuum, ipsisque AE, AB inueniatur tertia proportionalis continua AD: Dico AD absoluere problema. Cùm enim ex constructione AE sit ad AB, vt AB ad AD, erit diuidendo AE ad EB, vt AB ad BD: & componendo AB erit ad BE, hoc est BC, vt AD ad BD; & permutando AB ad AD, vt BC ad BD; & diuidendo AB ad BD vt BC ad CD; componendo igitur AD, BD, CD sunt continuæ. Fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO XLI.

A B C D E F

DAtam magnitudinem AE semel sectam in C, proportione maioris inæqualitatis, ita in duobus alijs punctis B & D subdiuidere, vt quatuor partes AB, BC, CD, DE sint in continua proportione; quæ dimidiata sit rationis AC ad CE, ex prima diuisione ortæ.

Constructio & demonstratio.

PEr quadragesimam huius addatur EF, vt AF, CF, EF sint proportionales; tum inter AF, CF media ponatur BF: inter CF quoque & EF, media DF. Dico factum quod petebatur. Cùm enim inter tres continuas AF, CF, EF, mediæ sint BF, DF, patet ex elementis omnes AF, BF, CF, DF, EF, esse continuè proportionales. Quare etiam AB, BC, CD, DE, sunt b continuæ, & quidem in ratione AF ad BF, quæ ex constructione dimidiata est rationis AF ad CF, hoc est AC c ad CE. Factum igitur est quod petebatur.

b 1. Huius.
c Ibid.

Aliter.

F G H

A B C D E

INter AC, CE inuentam mediam FH ita diuide, vt FG sit ad GH, vt AC ad FH, seu FH ad CE: fiantque CB, CD ipsis FG, GH æquales. Dico factum quod petitur. cùm enim sit AC ad FH, vt FG ad GH, id est BC ad CD, erit quoque AC ad BD (quæ ex constructione æqualis est FH) vt BC ad CD: & permutando AC ad BC vt BD ad CD: & diuidendo AB ad BC, vt BC ad CD. Sunt igitur AB, BC, CD tres continuæ proportionales in ratione BC ad CD. Similiter cùm FH sit ad CE, ex constructione vt FG ad GH, erit quoque BD ad CE, vt BC ad CD, ac permutando conuertendo BD ad CD, vt CE ad DE: Ideoque diuidendo BC est ad CD, vt CD ad DE. Sunt igitur tres continuæ BC, CD, DE, in ratione BC ad CD: ac proinde omnes quatuor sunt continuæ proportionales in ratione BC ad CD, id est FG ad GH, id est AC ad FH, quæ

ex

ex constructione dimidiata est rationis AC ad CB; fecimus ergo quod fuerat propositum.

Corollarium.

Ex hoc problemate licebit praxim desumere, non solùm subdiuidendi duas in quatuor continuas, sed etiam in sex continuas; imò quotuis datas in duplo plures continuas, & quidem in ratione dimidiata eius, in qua ipsæ existunt.

PROPOSITIO XLII.

A B C D

F E G

Sint AB, BC, CD in continua analogia; deinde secetur quæpiam linea FG in E, vt FE ad EG, eandem habeat rationem, quam AB ad BC.

Dico rectangulum BCFG, æquale esse duobus ABEG & EFCD rectangulis.

Demonstratio.

Cvm enim sit vt AB ad BC, ita FE ad EG, rectangulum BCEF, [a] æquale est rectangulo ABEG. Similiter quia vt BC ad CD, ita FE est ad EG, erit etiam rectangulum BCEG æquale rectangulo CDFE. duo igitur BCEF, BCEG rectangula, id est [b] rectangulum BCFG, æqualia sunt duobus ABEG, CDFE rectangulis. Quod erat ostendendum. a 16. Sexti. b 1. Secūdi.

PROPOSITIO XLIII.

A C D E F B

Si fuerint quotuis continuæ proportionales AB, CB, DB, EB, &c.

Dico rectangula ABEF, CBDE, DBCD, EBAC esse inter se æqualia. Hoc est rectangula sub lineis seriei AB, CB, DB, &c. & sub residuis EF, DE; CD, AC esse inter se æqualia; modò retrogradè coniungantur.

Demonstratio.

Qvoniam est vt AB ad [c] CB, sic DE ad EF, rectangulum ABEF æquatur [d] rectangulo CBDE. similiter quia vt CB ad DB, ita CD est ad DE, erit rectangulum CBDE, æquale rectangulo DBCD. rursus quoniam DB est [e] ad EB vt AC ad CD, rectangulum DBCD æquale erit ipsi EBAC; æqualia sunt igitur omnia inter se. Quod erat demonstrandum. c 1. Huius. d 16. Sexti. e 1. Huius.

PROPOSITIO XLIV.

Iisdem positis:

Dico rectangula EBAC, DBCD, CBDE esse inter se æqualia.

Demonstratio.

Cvm enim vt CB ad DB, ita CD [f] sit ad DE; igitur rectangulum CBDE æquale est [g] rectangulo DBCD. Sed rursum vt DB ad EB, sic AC ad [h] CD, quare etiam rectangulum DBCD, æquale erit rectangulo EBAC; ostensum autem fuit rectangulum CBDE, esse rectangulo DBCD æquale, quare & hæc duo EBAC & CBDE, proindeque omnia tria inter se erunt æqualia. Quod erat demonstrandum. f Ibid. g 16. Sexti. h 1. Huius.

L Pari

Pari ratione si ponatur vlteriùs produci series progressionis, ita vt A B, C B, D B, E B, F B, &c. ponantur continuæ proportionales, demonstrari poterit quatuor rectangula F B A C, E B C D, D B D E & C B E F inter sese æqualia esse.

PROPOSITIO XLV.

A C D E B

Sint A B, C B, D B, E B in continua analogia, &c.

Dico quinque rectangula inter se æqualia esse, quorum primum est illud, quod sub A B, B C tanquam vnâ linea, & sub D E continetur: alterum, quod describitur à C B, & D B tanquam vnâ, ac rectâ C D; tertium, quod à D B & E B tanquam vnâ, & rectâ A C conficitur: quartum, quod ab E C, & C B; denique illud quod ab A D, D B describitur.

Demonstratio.

a 43. Huius. b Ibid. Rectangulum enim A B D E æquale est a rectangulo C B C D; & rectangulum C B D E æquale est rectangulo b D B C D: duo igitur rectangula A B D E, & C B D E, id est rectangulum sub A B C B tanquam vnâ, & D E, æqualia sunt duobus C B C D & D B C D, id est contento sub C B D B tanquam vnâ, & sub rectâ C D: eodem modo ostendam sub D B E B & A C contentum, æquari prioribus; de reliquis quoque idem simili discursu demonstrabitur. Constat ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XLVI.

A C D E B

Sint continuæ proportionales A B, C B, D B, E B, &c.

Dico rectangula A B C E, C B A D, & duo simul sumpta A C B, A C D B, denique trium aggregatum, scilicet quadrati C E, rectanguli A C E, & rectanguli C E B, esse inter se æqualia.

Demonstratio.

c 1. Huius. d 16. Sexti. e 1. Secundi. f 1. Secundi. Quoniam est vt A C ad C D, ita C D ad D E, erit componendo & alternando, vt A D ad C E, sic C D ad D E: sed vt C D ad D E, ita est A B c ad C B: igitur vt A D ad C E, sic est A B ad C B, & rectangulū d A B C E. æquale erit rectangulo C B A D. Insuper quia est vt A B ad C B, ita A C ad C D, erit rectangulum A B C D, æquale rectangulo A C, C B. Quia verò ex æquo etiam est vt A C ad D E, ita A B ad D B, erit quoque rectangulum A C D B, æquale ipsi A B D E: sed rectangulum A B D E, vnà cum A B C D, æqualia e sunt rectangulo A B C E: rectangulum igitur A B C E, æquale etiam est duobus A C B & A C D B. Deinde quia recta A B secta est in C & E, erit f A B C E æquale tribus C E in C A, & C B in C E ducto, (hoc est quadrato C E) & eidem C E in E B ducto: æqualia sunt igitur inter se. Quod fuerat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVII.

G I K L M H

A B C D E F

Sint in continua analogia minoris inæqualitatis, A B, A C, A D, A E, A F, &c. & totidem aliæ maioris inæqualitatis eiusdem seriei, G H, I H, K H, L H, M H, &c.

Dico

Dico rectangula A B G H, A C I H, item A D K H, A E L H, A F M H, &c. esse omnia inter se æqualia.

Demonstratio.

Ex datis vt A B ad A C, sic I H ad G H, ergo rectangulum, [a] A B G H, æquatur rectangulo A C I H. rursum ex datis vt A C ad A D, sic K H ad I H; ergo rectangulum A C I H [b] rectangulo A D K H æquale erit. Simili discursu reliquorum æqualitatem ostendemus, manifestum est igitur quod fuerat demonstrandum. [a] 16. Sexti. [b] Ibid.

Corollarium.

Qvoniam per primam huius positis continuè proportionalibus A B, A C, A D, A E, A F, itemque G H, I H, K H, L H, M H, earum differentiæ F E, E D, D C, &c. G I, I K, K L, &c. sunt etiam in ratione continua, manifestè patet eâdem discurrendi methodo demonstrari rectangula F E L M, D E K L, C D I K, B C G I quoque inter se æqualia esse.

PROPOSITIO XLVIII.

Sint duæ series quotcumque continuarum eiusdem rationis, A, B, C, G, H; D, E, F, I, K: sit autem rectangulum A B, æquale D E rectangulo:

Dico etiam rectangula B C, E F; C G, F I; G H, I K; & sic deinceps æqualia esse.

A	B	C	G	H
D	E	F	I	K

Demonstratio.

Proportio rectanguli A B, ad rectangulum D E, componitur [c] ex rationibus A ad D, & B ad E; sed rectanguli B C, ad rectangulum E F, proportio quoque componitur ex rationibus B ad E, & C ad F, hoc est A ad D (nam cùm ex datis & ex æquo sit A ad C, vt D ad F, erit permutando A ad D, vt C ad F) ergo ex iisdem rationibus componuntur proportiones rectangulorum A B, D E: B C, E F, adeoque eædem sunt. quare cùm ratio rectangulorum A B, D E ponatur æqualitatis, rectangulorum quoque B C, E F æqualitatis proportio erit; eodem modo reliqua reliquis ostendentur æqualia. Quod erat demonstrandum. [c] 23. Sexti.

PROPOSITIO XLXIX.

Si rectangula A B, B C, C G, G H; & D E, E F, F I, I K singula singulis sint æqualia:

Dico esse A ad C, vt D ad F, & B ad G, vt E ad I, & sic deinceps.

A	B	C	G	H
D	E	F	I	K

Demonstratio.

Cvm rectangulum A B, æquale sit rectangulo D E, & rectangulum B C, rectangulo E F; ergo vt rectangulum A B ad D E, sic B C ad E F: & permutando

 vt

vt AB ad BC, sic DE ad EF. atqui rectangulum AB ad BC, est vt A ad C, & DE ad EF est vt D ad F; ergo A ad C, vt D ad F. Eodem discursu erit B ad G, vt E ad I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO L.

SI rectangula AB, BC, CG, GH, &c. rectangulis DE, EF, FI, IK singula singulis æqualia sint:

Dico vtramque laterum seriem A, B, C, G, H; & D, E, F, I, K, si ponantur esse continuæ proportionales, esse quoque continuas eiusdem rationis.

A B C G H

D E F I L

Demonstratio.

PEr præcedentem est A ad C, vt D ad F: quia autem tam A, B, C, quàm D, E, F, sunt continuæ proportionales ex datis, erit tam ratio A ad C, (id est D ad F,) rationis A ad B duplicata; quàm ratio D ad F (id est A ad C) duplicata sit rationis D ad E. Quare vt A ad B, sic D ad E; & B ad C, vt E ad F, &c. sunt igitur A, B, C, G, H, & D, E, F, I, K continuæ eiusdem proportionis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LI.

SI prima A ad secundam B, eamdem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D:

Dico tria rectangula ex hisce facta, esse in continuata proportione; nempe rectangula AB, BC & CD.

Demonstratio.

A B

C D

a 1. Sexti RÉctangulum AB, est ad rectangulum BC, vt A ad a C, sed etiam rectangulum BC, ad CD, (ob eandem rationem) est vt B ad D. cùm igitur sit ratio A ad C eadem cum ratione B ad D; eam quoque rationem habet rectangulum AB, ad BC, quam habet BC ad CD rectangulum: sunt igitur in continuata ratione, prout erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

SI prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D, fiatque vt prima A ad tertiam C, ita tertia C ad quintam E:

Dico rectangula ex his lineis constituta, esse in continuata ratione; nempe rectangula AB, BC, CD, DE.

A

B

C

D

E

Demonstratio.

b 1. Sexti. REctangulum AB ad BC rectangulum, habet eam rationem, b quam A ad C; sed ratio A ad C, eadem

eadem est, cum ratione C ad E ex constructione, igitur ratio rectanguli A B, ad B C, eadem est cum ratione C ad E. sed quoniam vt A est ad B, ita C ad D, erit permutando A ad C, vt B ad D: ergo ratio rectanguli A B ad B C, est ratio B ad D: sed rectangulum B C ad C D, etiam est [a] vt B ad D: ergo ratio A B rectanguli [a Ibid.] ad rectangulum B C, eadem est cum ratione rectanguli B C, ad C D rectangulum. est autem ratio B ad D, hoc est A ad C, eadem quæ est C ad E; vnde etiam ratio rectanguli C D, ad D E rectangulum, eadem est cum ratione rectanguli B C, ad C D rectangulum; quocirca in continua analogia sunt rectangula A B, B C, C D, D E, cum sint in ratione A ad C. Constat igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO LIII.

Sint A, B, C, tres in continua ratione. Sintq; D, E, F, in eadem vel diuersa continuata ratione.

Dico rectangula C D, C E, C F; item B D, B E, B F: item A D, A E, A F esse in continua analogia.

A B C

F E D

Demonstratio.

Rectangulum C D est ad rectangulum C E, vt D [b] linea est ad E: & C E rectangulum est ad rectangulum C F, vt E ad F: sed D, E, F ex hypothesi sunt continuæ proportionales; ergo & rectangula C D, C E, C F sunt in continua analogia. Eodem modo probantur B D, B E, B F rectangula, item A D, A E, A F esse continuè proportionalia. Quod erat demonstrandum. [b 1. Sexti.]

PROPOSITIO LIV.

Sit A prima ad B secundam, vt C tertia ad D quartam.

Dico quadratum sub prima, rectangulum sub secunda & tertia, & quadratum quartæ, in continua esse analogia.

A B

C D

Demonstratio.

Ratio quadrati A, ad rectangulum C B, [c] componitur ex ratione A ad B (hoc est C ad D,) & ex ratione A ad C. Sed ratio rectanguli B C, ad D quadratum, composita est ex iisdem rationibus: nam ratio rectanguli B C, ad D quadratum, componitur ex ratione B ad D, hoc est A ad C, & ex ratione C ad D, hoc est A ad B: ergo sunt tres continuæ quantitates, quadratum A, rectangulum B C, & quadratum D. Quod erat demonstrandum. [c 23. Sexti.]

PROPOSITIO LV.

Sint tres lineæ A B, B C, C D in continua analogia.

Dico A B quadratum primæ, rectangulum A B C, sub prima & secunda; quadratum B C sub secunda; rectangulum B C D sub secunda ac tertia; denique C D quadratum tertiæ, esse in continuata serie eiusdem rationis A B ad B C.

A B C D

Demonstratio.

A B C D

a 21 Sexti. b ibid. QVadrarum AB [a] est ad reerangulum ABC, vt AB ad BC: & reerangujum ABC est ad quadrarum BC, vt AB ad BC. Rursum quadrarum BC [b] est ad reerangulum BCD, vt BC ad CD, id est ex datis, vt AB ad BC; & rectangulum BCD est ad quadrarum CD, vt BC ad CD, hoc est iterum vt AB ad BC, ergo quinque illæ figuræ sunt in continuata serie rationis AB ad BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVI.

A B M C M

D E F

G H I

K L

LIneæ GI, DF, AC ita sint diuisæ in H, E, B, vt ratio DE, ad EF duplicata sit rationis GH ad HI; & ratio AB, ad BC triplicata rationis GH ad HI: sintque præterea GH, DE, AB, in contiqua analogia.

Dico & rectangula GHI, DEF, ABC, in continua esse analogia.

Demonstratio.

FIat vt DE ad GH, sic GH ad K, & vt EF ad HI, sic HI ad L: igitur rectangulum sub DE & K, quadraro GH, & reetangulum sub EF & L, quadrato c 17. Sexti. HI, [c] æquale est; ergo reerangulum DEK, est ad reetangulum EFL, vt quadrarum GH ad quadrarum HI. ex hyporhesi aurem DE est ad EF, in duplicata ratione GH ad HI, hoc est, DE est ad EF, vt quadratum GH, ad quadratũ HI: ergo recrangulum sub DE & K, est ad recrangulum sub EF & L, vt DE ad EF. Ergo d ibid. [d] K & L lineę sunt æquales: quia autem ex hypothesi GH, DE, AB, & ex construerione K, GH, DE, sunt continuæ; pater omnes quatuor K, GH, DE, AB esse continuas. Iam alias quoque lineas L, HI, EF, BC, dieo esse conrinuas; si enim non sinr, fiat tribus lineis L, HI, EF, quæ ex constructione sunt continuæ, quarra continuè proporrionalis, quæuis BM, maior vel minor quàm BC. habemus ergo duas continuarum series K, GH, DE, AB; L, HI, EF, BM quæ incipiant ab ęqua- e 17. huius. libus terminis K & L. quare rario AB ad [e] BM, erir triplicata rationis GH ad HI: Atqui ex hyporhesi etiam ratio AB ad BC, erat rriplicata rationis GH ad HI, est ergo vt AB ad BC, ira AB ad BM, quod est absurdum. ergo L, HI, EF, BC etiam sunt continuæ. Itaque rario composita ex rationibus GH ad DE, & HI ad EF, f 23. Sexti. hoc est, ratio reeranguli GHI [f] ad reetangulum DEF, eadem est cum ratione composita ex rarionibus DE ad AB, & EF ad BC, hoc est eum ratione reeranguli DEF, ad reerangulum ABC. rectangula igitur GHI, DEF, ABC sunt in conrinua analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVII.

SIt ratio A ad B, eadem cum ratione C ad D; & inter vtramque tam A, B quàm C, D interponantur quæuis lineæ: E quidem inter A, B; F verò inter C, D.

Dico

Dico rectangulum AE, ad EB rectangulum, eandem habere rationem, quam habet rectangulum CF ad FD rectangulum.

Demonstratio.

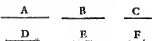


Ratio rectanguli AE ad EB rectangulum, est ea [a] quam habet A ad B; sed vt A ad B, ita ponitur C ad D, ergo rectangulum AE ad EB, est vt C ad D: sed rectangulum CF, ad FD rectangulum, etiam est vt linea [b] C ad D, igitur rectangulum AE, ad EB rectangulum, eandem habet rationem, quam habet CF ad FD rectangulum. Quod demonstrare oportebat. a 1. Sexti. b Ibid.

PROPOSITIO LVIII.

Ponantur tres lineæ A, B, C; & aliæ tres D, E, F; vt tam primæ, quàm secundæ, suam analogiam licet diuersam continuent.

Dico etiam rectangula AD, BE, CF esse in continua analogia.



Demonstratio.

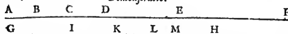
Rectangulum sub A & D, ad rectangulum sub B & E habet [c] rationem compositam ex rationibus A ad B, & D ad E: proportio quoque rectanguli sub B & E ad rectangulum sub C & F composita ex rationibus B ad C, hoc est A ad B, & ex ratione E ad F, hoc est D ad E; vnde ratio rectanguli sub B & E, ad rectangulum CF, componitur ex iisdem, ex quibus ratio rectanguli sub A & D, ad rectangulum sub B & E est composita: Quare cùm proportiones ex iisdem rationibus compositæ eædem sint, erunt rectangula AD, BE, CF in continua analogia. Quod erat demonstrandum. c 23. Sexti.

PROPOSITIO LIX.

Sint duæ diuersarum rationum series continuè proportionalium AB, AC, AD, AE, AF; GH, IH, KH, LH, MH.

Dico rectangula ABGH, ACIH, ADKH, AELH; AFMH esse in continua analogia.

Demonstratio.



Rectangulum enim sub ABGH, ad rectangulum sub ACIH rationem habet compositam ex ratione AB ad AC, & ratione GH ad IH: & rectangulum ACIH, ad rectangulum ADKM ratione habet compositam ex rationibus AC ad AD, & IH ad KH. Quare cùm ex datis sit vt AB ad AC, sic AC ad AD, & vt GH ad IH, sic IH ad KH; igitur ratio rectangulorum ACIH & ADKH, ex iisdem rationibus componitur, ex quibus rectangulorum ABGH, ACIH; sunt igitur rectangula ABGH, ACIH, ADKH in continua analogia: idemque in reliquis eodem discursu ostendetur.

Corol-

Corollarium.

Porro cùm per primam huius, etiam continuè proportionalium, differentiæ sint in continua analogia suorum integrorum: manifestum est rectangula quoque ABGI, BCIK, CDKL, DELM, &c. esse continuè proportionalia.

PROPOSITIO LX.

Sint in continua analogia AB, AC, AD.

Dico rectangulum ABC, ad ACD rectangulum, duplicatam habere rationem eius, quam habet AB ad AC lineam.

Demonstratio.

A B C D

a 1. Huius. b 23. Sexti. Qvoniam DA, CA, BA ponuntur continuè proportionales, erit DC ad BC, [a] vt CA ad BA, & inuertendo BC ad CD, vt AB ad AC: itaque cùm rectangulorum ABC, [b] ACD ratio componatur ex laterum rationibus AB ad AC, & BC ad CD; quę iam ostensę sunt æquales, constat eam esse duplicatam, rationis AB ad AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXI.

Iisdem positis:

Dico ABC rectangulum ad rectangulum ADC, triplicatam habere rationem eius quam habet AB ad AC.

Demonstratio.

Ex datis ratio AB ad AD, duplicata est rationis AB ad AC: & vt patet ex præcedente & per primam huius ratio BC ad CD, æqualis est rationi AB ad AC: ergo ratio composita ex rationibus AB ad AD, & BC ad CD, triplicata est rationis AB ad AC. Quare cùm rectangulorum ABC, ADC ratio ex proportionibus laterum AB ad AD, & BC ad CD [c] componatur, patet eam esse triplicatam rationis AB ad AC. Quod erat demonstrandum.

c 23. Sexti.

PROPOSITIO LXII.

Ponantur duæ series quatuor continuarum A, B, C, D; & E, F, G, H.

Dico rectangulum AH, ad ED rectangulum, triplicatam rationem habere eius, quam habet BG rectangulum, ad rectangulum FC.

Demonstratio.

A B C D

E F G H

d 23. Sexti. Rectanguli sub A & H, ad rectangulum sub E & D, ratio est composita, [d] ex ratione A ad D, & H ad E: ratio verò rectanguli BG, ad rectangulum FC, composita est ex ratione B ad C, & G ad F: ratio autem A ad D, triplicata est rationis B ad C, & ratio H ad E etiam triplicata est rationis G ad F; igitur ratio rectanguli AH ad DE, triplicata est rationis eius, quam habet BG rectangulum, ad FC. Quod erat propositum demonstrare.

PRO-

PROPOSITIO LXIII.

DAtæ ſint tres continuæ proportionales, A C, C D, D E: & D E biſecta ſit in B.

Dico quadratum A B, æquale eſſe quadratis A D, C B.

Demonſtratio.

A C D B E

QVia A C, C D, D E ſunt in continua proportione, quadratum C D [a] æquatur rectangulo A C D E: hoc eſt (quoniam D E biſecta ponitur in B) rectangulo A C D B bis ſumpto. Quare ſi vtriſque commune addatur rectangulum C D B bis, erit quadratum C D, cum rectangulo C D B bis, æquale rectangulo A C D B bis, cum rectangulo C D B bis; quæ quatuor rectangula conſtituunt [b] rectangulum A D B bis. Rurſum ergo communi addito quadrato D B, erit quadratum C D, cum rectangulo C D B bis, & quadrato D B, id eſt [c] quadratum C B, æquale rectangulo A D B bis, cum quadrato D B: itaque communi addito quadrato A D, erit rectangulnm A D B bis, cum quadratis D B, A D, id eſt [d] quadratum A B, æquale quadratis C B, A D: Quod erat demonſtrandum.

[a] 17. Sexti. [b] 1. Secundi. [c] 4. Secundi. [d] Ibid.

PROPOSITIO LXIV.

A C E D B

SInt tres lineæ in continua analogia A B, B C, C D, & diuidatur C D bifariam in E.

Dico quadratum A E, æquari quadratis A C, E B.

Demonſtratio.

CVm ſint continuæ proportionales A B, B C, C D, erit vt B C [e] ad C D, ſic A C ad D B. vnde rectangula C B D, A C D æquantur. ſed rectangulum C B D, eſt rectangulum C D B, cum quadrato D B, hoc eſt (quoniam ex datis C D biſecta eſt in E) rectangulum E D B bis, cum quadrato D B: rectangulum verò A C D, eſt rectangulum A C E bis; ergo rectangulum E D B bis, cum quadrato D B, æquatur rectangulo A C E bis: & communibus additis quadratis A C, C E, ſiue E D, erunt rectangulum E D B bis, & quadrata B D, E D, A C, ſimul ſumpta, æqualia rectangulo A C E bis, & quadratis A C, C E: Atqui rectangulum E D B bis, cum quadratis D B, E D, A C, æquale eſt quadrato [f] E B, & quadrato A C; rectangulum verò A C E bis, cum quadratis A C, C E, æquantur [g] quadrato A E: ergo quadrata E B, A C æquantur quadrato A E. Quod erat demonſtrandum.

[e] 1. Huius. [f] 4. Secundi. [g] Ibid.

PROPOSITIO LXV.

COntinuæ proportionales ſint A B, A C, A E; & ex B C, ſumi poſſit B D æqualis A C.

Dico rectangulum ſub B A & ſub C D, A E, tamquam vnâ lineâ conſtructum, æquari quadrato A D.

Demonſtratio.

A E C D B

REctangulum B A C D, [h] æquatur rectangulo B C D (id eſt [i] quadrato C D, & rectangulo B D C) vnâ cum rectangulo A C D: ſed (quoniam æquales ſunt poſi-

[h] 1. Secundi. [i] 3 Secundi.

A E C D B

tæ AC BD) æqualia ſunt rectangula BDC, ACD; ergo rectangulum ABCD, æquatur rectangulo ACD bis, cum quadrato CD: & quia ſunt continuæ BA, CA, EA, rectangulum BAE, æquale eſt quadrato CA: Itaque ſi rectangulo ABCD
a 1. Secundi addas rectangulum BAE: & rectangulo ACD bis, cum quadrato CD, addas quadratum CA; erunt rectangula BACD, BAE, (id eſt rectangulum a ex BA in
b 4. Secūdi. CDAE tanquam vnam lineam) æqualia quadratis CD, CA, & rectangulo ACD bis, id eſt b quadrato AD. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Ponatur linea AB, diuiſa in tres proportionales AB, CB, DB: duabus autem CB, DB, in directum conſtituantur æquales, BF, BE; Dico rectangulum CDF, rectangulo ADB æquale eſſe.

Demonſtratio.

A C D B E F

c 3. Secundi Quoniam AB, CB, DB, ponuntur continuæ, erit rectangulum ABD (id eſt c rectangulum ADB cum quadrato DB) æquale quadrato CB; atqui etiam
d 5. Secundi. (cùm ex datis CF biſecta ſit in B) rectangulum CDF cum quadrato DB, æquatur d quadrato CB; ergo rectangulum ADB, cum quadrato DB, æquatur rectangulo CDF, cum quadrato DB. Quocirca ablato communi quadrato DB rectangulum CDF, rectangulo ADB æquale erit. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVII.

Sit AB ad AC, vt AD ad AE.

Dico primò rectangulum ſub prima AB, & DE differentia quartæ & tertiæ, æquari rectangulo ſub BC, differentia primæ & ſecundæ, & ſub AD tertia:

Secundò rectangulum ſub prima AB, & BE differentia primæ & quartæ, æquari duobus rectangulis ſub AC, BD, & ſub AB, BC.

Demonſtratio.

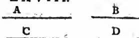
A B C D E

Cum ſit vt AB ad AC, ſic AD ad AE, itaque inuertendo & diuidendo vt CB ad BA, ſic ED ad DA, quare rectangulum EDAB æquatur rectangulo
e 3. Secūdi. DACB. quod erat primum. Deinde cùm ſit vt BA ad DA, ſic CA ad BA, ergo rectangulum EAB æquatur rectangulo DAC, hoc eſt e rectangulo DCA cum quadrato CA. Quod ſi autem à rectangulo EAB abſtuleris quadratum AB, remanet rectangulum EBA; & ſi idem abſtuleris à rectangulo DCA cum quadrato
f 4. Secundi. CA remanent f rectangulum DCA, rectangulum CBA bis cum quadrato BC. Itaque cùm tota fuerint æqualia, erunt ablato communi, æqualia adhuc reliqua; rectangulum nempe EBA, & rectangula DCA ſemel, CBA bis, & quadratum BC ſimul ſumpta. atqui rectangulum ACB, æquale eſt rectangulo ABC cum
g 1. Secundi. quadrato BC; cui ſi addas rectangulum ACD, orietur g rectangulum ACBD, quod cum rectangulo ABC æquale erit rectangulo ABC bis cum quadrato BC, & rectangulo ACD: quæ cùm ſimul ſumpta æqualia eſſe oſtenderim rectangulo EBA, erit quoque rectangulum AC, BD cum rectangulo ABC æquale rectangulo EBA, quod erat demonſtrandum.

PRO.

PROPOSITIO LXVIII.

SI quatuor lineæ proportionales fuerint, maximæ & minimæ, quadrata simul sumpta, maiora sunt reliquarum quadratis simul sumptis.

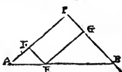


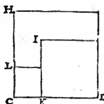
Demonstratio.

CVm enim quatuor lineæ ponantur proportionales, etiam a earum quadrata erunt proportionalia, ita tamen vt quadratum maximæ lineæ maximum sit; quadratum verò minimæ, sit minimum, vt patet ex elementis; igitur b constat propositum. Theorema eadem fere posita demonstratione quibusuis planis & solidis similibus applicari potest. a 22. Sexti. b 15. Quinti.

PROPOSITIO LXIX.

DVabus lineis AB, CD secundū eandem rationem diuisis in E, & K, fiat super earum vna AB quæuis figura APB: & sub partibus duæ similes ei quæ fit à tota, nempe AFE, EGB. Deinde sub alia CD fiat quæcumque alia figura CHD, siue similis præcedentibus, siue dissimilis seu rectilinea seu curuilinea; sub partibus autem statuantur duæ aliæ CLK, KID, similes ei quæ fit à tota.

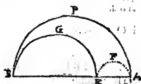


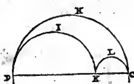


Dico vt APB ad CHD, sic duæ AFE, EGB ad duas CLK, KID.

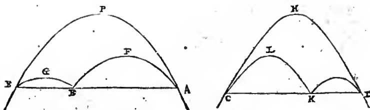
Demonstratio.

COmparemus primò rectilinea cum rectilineis; quia figuræ similes sunt AFE, APB, erit AFE, ad APB, in duplicata ratione laterum c homologorum AE, AB: similiter quia CLK, CHD sunt figuræ similes, erunt in duplicata ratione CK ad CD, id est ex datis, in duplicata ratione AE ad AB: ergo AFE est ad APB, vt CLK ad CHD: non aliter ostendemus EGB esse ad APB, vt KID ad CHD, igitur AFE d cum EGB, est ad APB, vt CLK cum KID, ad CHD. Itaque permutando AFE est cum EGB, ad CLK cum KID, vt APB, ad CHD. c 19. Sexti. d 24. Quinti.





Comparemus deinde rectilinea cum curuilineis. Super CD constituatur segmentum circuli CHD; & super CK, KD, segmenta CLK, KID, similia segmēto CHD: cùm igitur similia circulorum segmenta, duplicatam habeant proportionem subtensarum, si rectilinea lineæ AB, cum segmentis lineæ CD comparentur, eàdem prorsus demonstratione concluderetur propositum, qua vsi fuimus in prima comparatione: Tertiò si curuilinea cū curuilineis eiusdē speciei cōferantur, patet à fortiori propositū:



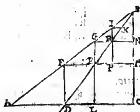
Eodem modo si curuilinea, cum diuersæ speciei curuilineis, tres nempe parabolæ similes, cum tribus hyperbolis similibus, conferantur, eadem his quoque demonstrandi ratio conueniet: cùm tam parabolæ similes, quàm hyperbolæ sint in duplicata ratione subtensarum. Constat igitur huius theorematis vniuersalis veritas.

PROPOSITIO LXX.

Sit ABC triangulum diuisum rectâ lineâ DB; ducanturq; lineę DE, EF, FG, GH, HI, IK basi AC, & lateri BC parallelę quot libuerit.

Dico omnes AD, EF, GH, IK, item DE, FG, HI, &c. esse in eadem continuata analogia.

Demonstratio.



Producantur enim lineæ GF in L, EF in M, GH in N, & IH in P. Igitur cùm parallelæ sint AC, EM, erit AD ad DC, vt EF ad FM; & componendo AC ad DC, vt EM ad FM, id est vt DC ad LC: sunt igitur in continua ratione AC, DC, LC: quare & AD [a] ad DL, id est EF vt AC est ad DC. Similiter ostendam esse continuas EM, FM, PM: vnde rursus

a 1. Huius.

b Ibid.

est vt EM [b] ad FM (id est vt AC ad DC, id est AD ad EF) sic EF ad FP, id est GH. continuè proportionales sunt igitur AD, EF, GH: eodem modo ostendam IK, & alias quotcumque in eadem serie esse continuas. Deinde cùm AD ipsi EF, & DE ipsi FG sit parallela, patet similia esse triangula ADE, EFG: ergo vt AD ad EF, ita DE ad FG: similiter ostendam esse vt EF ad GH, ita FG ad HI. quare erunt etiam DE, FG, IH, &c. continuæ, & quidem in ea ratione in qua sunt AD, EF, GH. Quod erat demonstrandum.

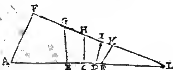
PROPOSITIO LXXI.

Dvæ lineæ AL, FL angulum facientes, sectæ sint in continuè proportionales, quatumcumque rationum AL, BL, CL, DL, EL, &c. item FL, GL, HL, &c. dein opposita sectionum puncta lineis AF, BG, CH, DI, &c. coniungantur.

Dico triangula AFL, BGL, CHL, & cætera in infinitum esse in continua analogia.

Demon-

Demonstratio.



CVm A L, B L, C L, &c. ponantur continuæ proportionales, est vt A L ad B L, sic B L ad C L, & C L ad D L, &c. similiter cùm ponantur continuæ F L, G L, &c. erit vt F L ad G L, ita G L ad H L, atque ita semper: igitur ratio composita ex rationibus A L ad B L, & F L ad G L, eadem erit cum ratione composita ex rationibus B L ad C L, & G L ad H L; & composita ex rationibus B L ad C L, & G L ad H L, eadem erit, cum composita ex rationibus C L ad D L, & H L ad I L: Atqui trianguli A F L, ad triangulum B G L proportio composita est ex rationibus A L ad B L, & F L ad G L; & ratio trianguli B G L, ad triangulum C H L, composita est ex rationibus B L ad C L, & G L ad H L, vt ex Commandino demonstrat Clauius, ad propositionem 23. sexti: eadem igitur est ratio trianguli A F L, ad triangulum B G L, quæ huius, ad triangulum C H L. Similiter ostendentur reliqua triangula esse in analogia continua. Quod erat demonstrandum.

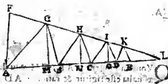
Corollarium.

HInc consequitur etiam Trapezia A G, B H, C I, &c. esse in continua analogia, sunt enim trapezia, triangulorum continuè proportionalium differentiæ, vnde ex prima huius patet corollarij veritas.

PROPOSITIO LXXII.

IIsdem positis ducantur in singulis trapezijs diametri, A G, B H, C I, &c. Dico triangula inde nata, A G B, B H C, C I D, &c. itemque triangula F A G, G B H, &c. esse continuè proportionalia.

Demonstratio.



EX punctis enim G, H, I, &c. ad A L, demittantur normales G M, H N, I O, &c. ratio trianguli A G B, ad triangulum B H C, componitur ex [a] rationibus A B ad B C, & altitudinis G M, ad altitudinem H N: sed quia A L, B L, C L, &c. ponuntur continuæ proportionales etiam A B, B C, C D, [b] &c. erunt continuæ in ratione suorum integrorum A L, B L, C L, &c. & quia G M, H N, &c. ad A L normales, ideoq; inter se parallela sint, erit G M ad H N; vt G L ad H L, hoc est ex datis; vt H L ad I L; igitur ratio trianguli A G B, ad triangulum B H C, componitur ex rationibus B C ad C D, & H L ad I L: simili planè discursu ostendemus, rationem trianguli B H C, ad triangulum C I D, ex ijsdem rationibus esse compositam; igitur triangula A G B, G H C, C I D sunt in continua analogia; similiter de alijs idem demonstrabitur. Patet igitur veritas propositionis.

[a] Clau. ad 23 sexti.

[b] 1. Huius.

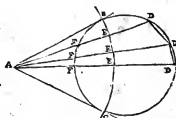
PROPOSITIO LXXIII.

COntingant circulum B C D duæ lineæ A B, A C, ex eodem puncto eductæ; & centro A interuallo B, C, describatur arcus B E C. dein-

de ex puncto A, ductis quotcumque lineis, secantibus A F E D iungantur DD, E E, F F.

Dico triangula inde nata D A D, E A E, F A F esse in cōtinua analogia.

Demonstratio.



a 36. Tertij.

b 72. huius.

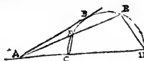
CVm AB contingat circulum, erit a rectangulum D A F, æquale quadrato A B, hoc est quadrato A E. Vnde D A, E A, F A sunt continuæ proportionales. Similiter reliquæ omnes lineæ D A, E A, F A, erunt in continua analogia. triangula igitur D A D, E A E, F A F b etiam in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

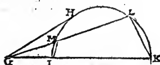
PROPOSITIO LXXIV.

DVos circulos inæquales C B D, I K L, contingant æquales lineæ A B, G H: & ex punctis A, G educantur secantes A C D, A F E, G I K, G M L continentes angulos æquales E A D, L G K: iunganturq; F C, E D, M I, L K.

Dico reciprocam esse triangulorum E A D, K G L; M I G, F A C proportionem.

Demonstratio.





c 36. Tertij. d 14. Sexti.

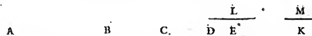
QVoniam tangentes A B, G H æquales sunt, patet c rectangula D A C, K G I, æqualia esse: igitur & rationes A D ad K G, & I G d ad C A, æquales sunt. Similiter cùm rectangula E A F, L G M, æqualium tangentium quadratis æquentur, inter se erunt æqualia; quare & rationes E A ad L G, M G ad F A eædem sunt; si igitur rationibus æqualibus A D ad K G, & I G ad C A, æquales addantur rationes, E A ad L G, & M G ad F A, erit ratio composita ex rationibus A D ad K G, & E A ad L G æqualis compositæ ex rationibus I G ad C A, & M G ad F A; hoc est ratio trianguli B A D, ad L G K triangulum æqualis rationi trianguli M G I, ad F A C triangulum; cùm ob angulorum A G æqualitatem, rationem ex lateribus habeant compositam. Vnde veritas patet propositionis.

PRO-

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM PARS SECVNDA

Terminum cuiuscunq; progreßionis in infinitum continuatæ designat.

PROPOSITIO LXXV.



SI fuerit magnitudo AB, ad magnitudinem BK, vt magnitudo BC ad magnitudinem CK.

Dico proportionem AB ad BC, sine termino continuari actu posse intra magnitudinem AK, ita vt numquam ad K perueniatur.

Demonstratio.

FIat enim vt AB ad BC, sic BC ad L. quia igitur AB est ad BK, vt BC ad CK; erit alternando vt AB ad BC, id est vt BC ad L, sic BK ad CK: & rursum alternando, vt BC ad BK, sic L ad CK: quare cùm BC ex datis, minor sit; quàm BK, erit etiam L, minor quam CK: poterit ergo ipsi L, ex CK sumi æqualis CD: erant autem AB, BC, L, tres continuæ proportionales; ergo & AB, BC, CD tres sunt continuæ. Fiat iam his tribus magnitudinibus continuè proportionalibus AB, BC, CD, quarta propotionalis continua M: quoniam igitur paulò antè ostendi esse BK ad BC vt CK est ad L, siue CD, erit diuidendo & inuertendo, BC ad CK, vt CD ad DK: eodem planè discursu ostendam, M esse minorem ipsâ DK, quo antè L ostendi esse minorem ipsâ CK: poterit ergo ipsi M, ex DK abscindi DE æqualis. Sunt igitur quatuor magnitudines AB, BC, CD, DE continuæ proportionales. Atque ita demonstrabimus proportionem AB ad BC, intra lineam AK sine termino posse actu continuari, ita vt nunquam ad K perueniatur. Quod erat demonstranduro.

PROPOSITIO LXXVI.



SI fuerit magnitudo AB, ad magnitudinem BK, vt magnitudo BC, ad magnitudinem CK; & proportio AB ad BC, continuetur in magnitudine AK, per plures terminos CD, DE, EF, &c.

Dico etiam CD, fore ad DK, & DE ad EK, & sic deinceps, vt AB est ad BK & BC ad CK, &c.

Demonstratio.

QVandoquidem AB est ad BK, vt BC ad CK, erit alternando AB ad BC, hoc est ex datis BC ad CD, vt BK ad CK: & rursum alternando ac inuertendo KB ad BC, vti KC ad CD: & diuidendo ac inuertendo, vt BC ad CK, sic CD, ad DK: non aliter ostendemus vt CD ad DK, sic esse DE ad EK; atque ita deinceps in infinitum. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXVII.

L

A . B C D E . K

DAta sit proportio quæuis minoris inæqualitatis A B ad A C. Dico si hæc continuetur, exhibendam magnitudinem quauis datâ maiorem.

Demonstratio.

DEtur enim magnitudo quæuis L: manifestum est si B C, excessus secundæ magnitudinis A C, supra primam A B, aliquoties sumatur, maiorem fore magnitudine L: debeat ergo sumi B C quater, vt excedat L: continuetur ratio A B ad A C per quinque terminos A B, A C, A D, A E, A K: atque ita habebimus quatuor differentias B C, C D, D E, E K. quoniam autem est vt [a] D A ad C A, sic D C ad C B, & cùm D A maior sit C A, erit quoque D C maior quàm B C: similiter erit E D maior quàm C D, & K E quàm E D. ergo K B ex quatuor differentiis composita maior erit quàm B C quater sumpta. Quare cùm B C quater sumpta maior ponatur quàm L: erit K B multò maior quàm L, ideòque A K adhuc multò quàm L maior erit: constat igitur quod fuerat demonstrandum.

a 1. Huius.

PROPOSITIO LXXVIII.

A . B C D E K

L M N O P R

AMagnitudine A K auferatur quæuis pars A B; & à residuo B K auferatur B C, ea lege vt sicut est A B ad B K, ita sit B C ad C K. Dico si hæc ablatio semper fiat, relinqui ex A K quantitatem data minorem. *est vniuersalis prima decimi.*

Demonstratio.

DEtur enim quantitas L M aut alia quantumuis parua: dein vt K B ad K A, sic L M fiat ad L N: atque hæc proportio per tot terminos continuetur, donec L R maior sit quàm A K, hoc autem aliquando futurum est per præcedentem. Deinde quoties in M, N, O, P diuisa est L R, toties in ratione A B ad B K subdiuidatur A K in B, C, D, E. Quoniam ergo ex constructione L M, L N, L O, &c. sunt continuæ, erit vt L M ad L N, id est vt B K ad K A, sic L P ad L R. quare inuertendo vt A K ad B K, sic R L ad P L, & permutando vt A K ad R L, sic B K ad P L. Atqui ex constructione A K minor est quàm R L, ergo & B K quàm P L minor erit. deinde quoniam ex constructione est A B ad B K, vt B C ad C K, & C D ad D K, & D E ad E K, patet componendo omnes A K, B K, C K, D K, E K esse continuas: itaque B K est ad C K, vt A K ad B K, id est ex constructione vt N L ad M L: sed P L est ad O L, vt N L ad M L, quia omnes R L, P L, O L, &c. sunt ex constructione continuæ; ergo B K est ad C K, vt P L ad O L; & permutando vt B K est ad P L, sic C K est ad O L. atqui iam ostendimus B K minorem esse quàm P L, ergo & C K quàm O L minor erit. similiter demonstrabimus D K minorem esse quàm N L; ac tandem E K esse minorem quàm M L, quæ erat data quantitas minor; ergo relinquitur quantitas: quod erat demonstrandum.

PRO-

Scholion.

Nota: dum in propositione dicitur, si hæc ablatio semper fiat, dico relinqui ex AK quantitatem datâ minorem: *sensum propositionis non esse, relinqui ex AK quantitatem data minorem, post ablationem terminorum in infinitum continuatam; siue post totam seriem absolutam, relinqui adhuc quantitatem data minorem; sed auferendo terminos ex AK, in ratione ante dicta, aliquando tot auferendos, vt residua pars totius AK, minor sit quantitate datâ:* quod in gratiam quorundam dictum sit.

PROPOSITIO LXXIX.

A B C D E F I K

Data sit magnitudo quæcumque AK: si fuerit
AB ad BK, vt BC ad CK.
AB ad AK, vt BC ad BK.
vel AK, BK, CK continuè proportionales.
AB ad BC, vt BK ad CK.
AB ad BC, vt AK ad BK.

Dico magnitudinem AK æqualem esse toti progressioni magnitudinum continuè proportionalium, rationis AB ad BC in infinitum continuatæ; siue quod idem est, rationis AB ad BC in infinitum continuatæ terminum esse K.

Demonstratio.

Cum AB sit ad BK, vt BC ad CK, poterit ratio a AB ad BC, intra magnitudinem AK semper continuari, ita vt numquam perueniatur ad K; a 75. huius. id est AK maior erit quacunque serie finita terminorum; ergo AK, non est minor serie totâ rationis AB ad BC. Deinde quia AB est ad BK, vt BC ad CK, si ratio AB ad BC semper continuetur, erit vt AB ad b BK, siue vt BC ad b 76. huius. CK, sic CD ad DK & DE ad EK, atque ita deinceps in infinitum: Itaque si continuetur semper ratio AB ad BC, relinquetur c tandem ex AK magnitudo quauis c 78. huius. datâ minor. Quare AK nequit esse maior, serie rationis AB ad BC: nam si maior esset deberet aliquo excessu esse maior, ponatur is IK; igitur AI seriei rationis AB ad BC æqualis erit: ergo ratio AB ad BC quantumuis continuata non transiliet vnquam I. ergo relinquetur ex AK magnitudo semper maior quàm IK. ergo non minor quauis datâ, contra iam demonstrata. non erit igitur AK maior serie rationis AB ad BC: Quare cùm neque minorem esse anteà sit ostensum, æqualis sit necesse est. Quod erat demonstrandum.

Reliquarum hypothesium demonstrationes ad primam reducuntur. nam si fuerit AB ad AK vt BC ad BK, erit diuidendo AB ad BK. vt BC ad CK. ergo per primam demonstrationem, rationis AB ad BC semper continuatæ terminus est in K.

Deinde si fuerint AK, BK, CK continuæ, erit diuidendo AB ad BK, vt BC ad CK. Rursum igitur per primam demonstrationem patet propositum.

Denique si fuerit AB ad BC, vt BK ad CK, vel AK ad BK; erit permutando vel AB ad BK, vt BC ad CK, vel AB ad AK vt BC ad BK. Vnde iterum per primam demonstrationem conficitur propositum. × vel diuidendo ut AB a BK sic BC ad CK

PROPOSITIO LXXX.

A M B C D E F K

Datâ serie continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. cuiuscumque proportionis, & quocumque in genere quantitatis; inuenire magnitudinem, quæ omnibus terminis totius seriei datæ in infinitum continuatæ, sit æqualis:

N Gen-

Constructio prima.

A M B C D E F K

SIt AM, differentia primorum duorum terminorum: fiatque vt AM ad BC secundum terminum, sic BC ad tertium quempiam CK. Dico CK magnitudinem cum primo AB. & secundo termino BC, æqualem esse seriei vniuersæ AB, BC, CD, &c.

Constructio secunda.

FIat vt AM duorum primorum terminorum differentia, ad AB primum terminum, ita secundus terminus BC, ad tertiam aliquam magnitudinem BK. Dico magnitudinem BK, cum primo termino, exhibere quantitatem æqualem toti seriei.

Constructio tertia.

DIfferentiæ duorum primorum terminorum AM, & primo termino AB, tertia proportionalis fiat AK. Dico AK totam seriem exhibere.

Demonstratio

PRimæ constructionis; AM est ad BC, vt BC ad CK; igitur componendo AM cum BC, hoc est AB, erit ad BC, vt BK ad CK: & permutando, AB ad BK, vt BC ad CK. Quare [a] AK magnitudo, hoc est CK, cum AB & BC primis terminis, toti seriei æqualis est.

a 79 huius

Secundæ constructionis; AM est ad AB, vt BC ad BK ex constructione: igitur diuidendo, vt AM est ad MB, id est vt AM ad BC, sic BC ad CK. itaque per demonstrationem primæ constructionis, AK (hoc est BK vnà cum primo termino AB) æquatur toti seriei.

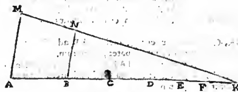
Tertiæ constructionis, Cùm sit ex constructione AM ad AB, vt AB ad AK, erit inuertendo, diuidendo, rursumque inuertendo AM ad MB, vt AB ad BK: & componendo AB ad MB, hoc est BC, vt AK ad BK. Quare AK [b] toti seriei æqualis est. Factum igitur est quod petebatur.

b 79. huius.

Primâ igitur constructione exhibetur tota series præter primum & secundum terminum. 2. constructione habetur series tota præter primum terminum. 3. constructione simul tota producitur series. Huius autem problematis, ac constructionis eiusdem vniuersalitatem, ampliùs deductam habes in propositione 123. huius, & corollario quarto ibidem.

PROPOSITIO LXXXI.

QVia verò vltimò ratio quarumcumque quantitatum ad lineas reduci potest, hinc etiam sequenti methodo, lineam toti seriei proportionalium linearũ, reperiemus æqualẽ.



Constructio & demonstratio.

EX punctis A & B, erige ad quemuis angulum, parallelas AM, BN; quæ ipsis AB, BC sint proportionales; & per puncta M & N ducatur recta MN, concurrens cum ABC in K. Dico AK, toti seriei AB, BC, CD, &c. æqualem esse.

Quod autem MN, occurrere debeat ABC productæ, patet ex eo, quod BC ex hypo-

hypothesi, minor sit quàm AB; ac proinde etiam BN: cùm AM, BN proportionales sint ipsis AB, BC; sit igitur concursus in K; erit vt AB ad BC, sic MA ad NB; sed vt MA ad NB, sic AK ad BK, ergo AB est ad BC, vt AK ad BK. Vnde [a] AK toti seriei æqualis est. Factum igitur est quod petebatur. [a] ibid.

PROPOSITIO LXXXII.

A N B C D E F G M K M

Sit magnitudo AK, series tota rationis AB ad BC continuatæ in infinitum.

Dico esse
- AB ad BK, vt BC ad CK.
- AB ad AK, vt BC ad BK.
- AK, BK, CK, &c. continuè proportionales.
- AB ad BC, vt BK ad CK.
- AB ad BC, vt AK ad BK.

Demonstratio.

Ex AB abscindatur NB, æqualis BC: si ergo non est AB ad BK, vt BC ad CK, neque permutando AB erit ad BC, id est BN, vt BK ad CK; ergo neque diuidendo AN, erit ad NB, vt BC ad CK. Fiat igitur vt AN ad NB, sic BC ad aliam magnitudinem CM, maiorem vel minorem quàm CK. Itaque componendo, AB erit ad NB, hoc est BC, vt BM ad CM: & permutando, AB ad BM, vt BC ad CM. Quare totius seriei [b] rationis AB ad BC, terminus erit M: siue AM æqualis erit seriei rationis AB ad BC, quod est absurdum, cùm AK maior vel minor quàm AM; sit ex hypothesi æqualis seriei datæ. non erit igitur alia ratio AB ad BK à ratione BC ad CK, ergo eadem, quod erat demonstrandum. [b] 79 huius

Reliquas autem assertionis partes ex prima deduecmus. Cùm enim iam demonstratum sit ex hypothesi theorematis, sequi AB esse ad BK vt BC ad CK, componendo erit AK ad BK, vt BK ad CK. quod erat secundum. tertium

Et quoniam AK est ad BK, vt BK ad CK, igitur per conuersionem rationis, AK est ad AB, vt BK ad BC; & inuertendo AB ad AK, vt BC ad BK. quod erat tertium. rursum quoniam AB est ad BK, vt BC ad CK, erit permutando AB ad BC, vt BK ad CK. quod erat quartum. denique quoniam ostensum est AB esse ad AK, vt BC ad BK, etiam permutando AB est ad BC, vt AK ad BK: quæ omnia erant demonstranda. secundum

Corollarium.

Ex quinta assertionis parte hoc theorema deducitur: data sit series magnitudinum continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. sine termino continuata. Dico esse vt vna antecedentium, nempe AB, ad vnam consequentium BC. sic omnes, hoc est infinitas antecedentes, siue AK, ad omnes siue infinitas consequentes, siue BK.

PROPOSITIO LXXXIII.

A M B C D E F K

Sit AK magnitudo producta ex ratione AB ad BC, in infinitum continuata; primi autem & secundi termini differentia sit AM;

Dico primò, differentiam AM, BC secundũ terminum, & CK totam

 seriem,

seriem, (præter duos primos terminos) in continua esse analogia.

Dico secundò, AM differentiam, ad primum terminum AB, esse vt BC secundus terminus, ad BK totam seriem, præter primum terminum.

Dico tertiò, differentiam AM, primum terminum AB, & totam seriem AK, in continua esse analogia.

Demonstratio.

A. M B C D E F K

QVoniam AK magnitudo producta est ex ratione AB ad BC in infinitum continuata, erit per præcedentem AB ad BK, vt BC ad CK: igitur permutando vt BK ad CK, sic AB ad BC, hoc est MB, & diuidendo AM ad MB, hoc est BC, vt BC ad CK. quod erat primum.

Rursum cùm sit vt AM ad BC, hoc est MB, sic BC ad CK, erit componendo inuertendo, vt AB ad MB, sic BK ad CK: & conuertendo inuertendo vt AM ad AB, ita BC ad BK. quod erat secundum.

Iterum cùm sit vt AM ad AB, sic BC ad BK, erit permutando, vt AM ad BC, hoc est MB, sic AB ad BK; & inuertendo componendo, & iterum inuertendo vt AM ad AB, sic AB ad AK. quod erat tertio loco demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

A B C D E K

M N O P R

DAtæ sint series binæ AK, MR (quas similes licebit appellare) magnitudinum continuè proportionalium, in eadem proportione.

Dico seriem totam AK, esse ad seriem MR vt AB primus terminus seriei AK, ad MN primum terminum seriei MR.

Demonstratio.

PEr octuagesimam secundam huius AK est ad BK, vt AB ad BC, hoc est, (cùm ex hypothesi AB ad BC, MN ad NO, similes sint rationes) vt MN ad NO: sed per eandem etiam est MR ad NR, vt MN ad NO, igitur AK est ad BK vt MR ad NR. vnde per conuersionem rationis AK est ad AB, vt MR ad MN: & permutando series AK, est ad seriem MR, vt primus terminus AB primæ seriei, ad primum terminum MN secundæ seriei; quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXV.

QVamquam ex iis, quæ hactenus vniuersaliter demonstrauimus propositione octogesimâ, & octogesimâ primâ, nota sit proportio totius seriei, ad primam magnitudinem; placuit tamen exercitij causâ, notissimis quibusdam proportionibus applicare, maximè cùm de illis sæpè mentio futura sit.

PRimùm igitur data sit, quocumque in genere quantitatis, proportio dupla, AB ad BC.

Dico totam seriem proportionis huius, sine termino continuatæ, constituere magnitudinem, quę dupla sit primæ magnitudinis.

Demon-

Demonstratio.

A I B C D E K

Fiat enim ipsi B C, æqualis B I, & fiat vt A I ad A B, sic A B ad A K: erit K terminus [a] rationis A B ad B C, semper continuatæ. & quoniam B A, dupla est B C, estque B I æqualis B C, erit quoque B A dupla I A; Quare cùm sit ex constructione vt B A ad I A, sic A K ad A B, erit etiam A K, (id est tota series rationis A B ad B C) dupla B A, primæ magnitudinis. Quod erat demonstrandum. [a] 80. huius.

PROPOSITIO LXXXVI.

Detur deinde proportio tripla A B ad B C.

Dico totam seriem, fore sesquialteram primæ magnitudinis.

Demonstratio.

A I B C D K

Fiat enim secundæ magnitudini B C, æqualis B I; erit ergo B I, tertia pars A B; & A I excessus, seu differentia primæ & secundæ: vnde si fiat vt A I ad A B, sic A B ad A K: erit A K [b] æqualis toti seriei; & quia I B, tertia pars est B A, erit B A sesquialtera ipsius A I: quare cùm sit vt B A ad A I, sic A K ad A B, erit quoque A K, sesquialtera primæ magnitudinis A B. Quod erat demonstrandum. [b] Ibid.

PROPOSITIO LXXXVII.

A I B CDE K

Denique proportio data sit quadrupla A B ad B C.

Dico totam seriem esse sesquitertiam primæ magnitudinis: siue eam habere rationem ad primam magnitudinem, quam quatuor ad tria.

Demonstratio.

Fiat enim B C æqualis B I; erit ergo B I quarta pars A B, & consequenter B A sesquitertia ipsius I A. Fiat igitur vt A I ad A B, sic A B ad A K, erit A K [c] tota series. Quare cùm K A sit ad B A, vt B A ad I A, erit K A sesquitertia primæ magnitudinis B A. Quod erat demonstrandum. [c] Ibid.

Sed de his modo satis: poterit enim quilibet ex propositione octuagesima huius benè intellecta, datæ proportionis rationalis, seu numeri ad numerum, totam seriem, & consequenter rationem seriei, ad primum terminum exhibere.

Scholion.

Quod si constructionem secundam octuagesimæ propositionis adhibere placuerit, habebitur vnica operatione proportio primæ magnitudinis ad reliquam seriem: si verò primâ constructione vtamur, exhibebitur proportio primæ & secundæ magnitudinis simul sumptarum, ad seriem reliquam.

Præsens materia memorem me facit eius, quod in argumento huius libri præfatus sum, cùm mentio incideret Zenonici discursus, qui se credebat omnem motus rationem è medio tollere posse: nucleus autem argumenti tanta apud authorem authoritatis exstitit, vt eundem Achillis inuictissimi Ducis nomenclaturâ dignaretur: persuasum habens, eum nucleum vsque adeò duro cortice futurum, qui par foret omnibus Philosophicorum Elenchorum malleis sustinendis.

Repetam discursum Zenonis, iisdem verbis, quibus in præfatione huius libri sum vsus. consistebat ille in duobus, quæ mouerentur: primo Achillis, velocissimè currentis, altero testudinis tardissimè reptantis.

N 3 *Ponatur*

A B D E C

Ponatur inquiebat ille, Achilles cursor pernicissimus, ex A *puncto testudinem reptantem per semitam* B C, *lentissimo motu, velle assequi; quo tempore Achilles tendit ex* A *in* B, *mota est testudo ad aliquod spatium, perueniens in* D: *igitur necdum Achilles assecutus est testudinem; iterùm quo tempore Achilles ex* B *currit, vt assequatur testudinem existentem in* D, *mota est testudo ad* E *punctum; igitur Achilles existens in* D *nondum assecutus est testudinem; atque hoc in infinitum eueniet: quoniam continuum diuisibile est in infinitum, vnde numquam Achilles assequetur testudinem. Incumbit igitur nobis hunc nucleum effringere, ex doctrina huius libri quod assecutos nos esse cognosces, cùm ipsissimum punctum assignauerimus, quo Achilles testudinem apprehendet.*

Vt nodum hunc Gordium, ex principiis huius libri dissoluamus, supponemus, non minus Achillem, quàm testudinem in suo cursu vniformiter procedere; ita vt celeritas, primâ parte motus assumptâ, perseueret in eodem statu, vsque ad vltimum temporis momentum quo sua spatia decurrunt; supponemus insuper, (quoniam omnis motus species est quantitatis) duos hosce motus, cùm vniformes ponantur, in suis partibus, sortiri inter se aliquam proportionem, quod necesse est eueniat inter omnes quantitates, quæ in eadem specie versantur: vt sunt duo motus recti & vniformes.

Ponatur igitur proportio duorum horum mobilium, secundùm celeritatem; consistere in ratione dupla; ita vt Achilles duplò celeriùs spatium decurrat, quàm testudo: igitur quo tempore testudo ad quartam partem stadij promota fuerit, medium stadium confecerit Achilles. Eductæ itaque lineæ A C, D C, *in ratione dupla ex* C *puncto, diuidantur in* B, F, H, *&c.* & E, G, I. *secundùm rationem duplam; vt* A C *dupla, sit* B C; & D C *dupla* E C: *item* B C *dupla* F C, *&c.* E C *dupla* G C, *&c.*

A B F H C

D E G I

Consistat itaque Achilles in A. *sitq;* A C *semitam repræsentans stadio longitudine æqualem; testudo verò constituta in dimidio stadij, in puncto* B, *vel* D. *positâ* D C *æquali ipsi* B C. *Quoniam Achilles ex* A *moueri incipit, quo tempore ex* D *inchoat cursum testudo; igitur peruenerit Achilles ex* A *in* B, *quo tempore ex* D, *testudo pertinget in* E: *& quo tempore Achilles ex* B *pertinget in* F, *eodem peruenerit testudo ex* E *in* G. *& sic consequenter: quia verò terminus progressionis rationis* A B *ad* B F *terminatur in* C, *prout propositione octuagesimâ quintâ demonstratum est; similiter cùm progressio, secundùm rationem* B F, *ad* F H, *vel* D E *ad* E G, *finem sortiatur in puncto* C; *secundùm eandem propositionem: igitur concursus duorum horum mobilium, Achillis scilicet & testudinis, continget in puncto* C: *Quod si loco proportionis duplæ, assumatur proportio tripla, tunc assignabitur concursus per propositionem octuagesimam sextam huius. Si verò quadrupla, inseruiet propositio octuagesima septima, & sic de reliquis.*

Captiosus Zenonis discursus molestias creat non consideranti discrimen, quod in eo exsurgit, inter duplicem progressionem, quæ argumentationis filum dubium facit; alia enim est progressio per partes æquales; alia per partes proportionales; hic vtriusque cursus supponitur fieri per partes vniformes, siue per passus æquales; cùm passus primus à secundo, vel tertio non discrepet, licet duos passus Achillis, verbigratia, eodem contingant tempore quo vnus passus testudinis; secundùm verò hos passus fit vtriusque cursus: Zeno autem in decursu argumenti sui. distinguit motus cursorum per partes proportionales, secundùm quas mobilia nullo modo mouentur; ac proinde in idem eius discursus recidit, ac si dicat quis, eo tempore quo dini-

A B C D E

dam lineam A E, *in partes quatuor æquales, alius eam subdiuidet secundùm aliquam seriem per partes proportionales, profectò citiùs assignabuntur termini quatuor partium æqualium, quàm infiniti termini partium proportionalium: Achilles enim & testudo decurrentes* A E *spatium, per partes æquales; suorum passuum æqualium terminum tandem acquirunt; Zeno verò dum hæc contingunt, à cursoribus diuidi vult spatium* A E, *in partes proportionales, secundùm quas mobilia non succedunt.*

Ad

Ad argumentum porrò respondendum est, dum dicitur: Priusquam Achilles ex A perueniat ad B punctum, mota est testudo ex B in F:

A B F H C

sensum huius propositionis coincidere cum hoc quod dicetur, priùs debet Achilles assignare punctum B, quàm notet punctum F. quod repugnat cursui secundum rationem motus: nam omnis assignatio in hac materia continet rationem subsistentiæ, vt Mathematici sentiunt, saltem secundùm intellectum, ac proinde alicuius quietis, quæ motui repugnat. Verùm hæc in gratiam Philosophorum dicta sufficiant.

PROPOSITIO LXXXVIII.

A KFED C B

DAtâ AB, cuius tertia pars sit CB; fiat vt tota AB, ad CB tertiam sui partem, ita CB ad CD, & CD ad DE, & DE ad EF, atque ita semper.

Dico K terminum huius progressionis, bifariam diuidere propositam magnitudinem AB.

Demonstratio.

ERit enim ex hypothesi AB cum BK, æqualis toti seriei proportionis triplæ. atqui tota series rationis triplæ, [a] sesquialtera est magnitudinis primæ, ergo AB cum BK, sesquialtera est primæ magnitudinis AB; ergò BK, est eiusdem dimidia. quod erat demonstrandum. [a 86. huius.]

PROPOSITIO LXXXIX.

A KFED C B

DEtur quantitas AB, cuius quarta pars sit BC; si fiat vt tota AB ad quartam sui partem BC, ita BC ad CD, & CD ad DE, & DE ad EF, atque ita semper continuando, punctum K huius progressionis terminus emergat:

Dico BK esse tertiam partem propositæ quantitatis AB.

Demonstratio.

NAm ex hypothesi AB cum BK, est tota series proportionis quadruplæ. Atqui tota series rationis quadruplæ, est [b] ad primam magnitudinem, vt quatuor ad tria, ergo BK cum AB, est ad AB, vt quatuor ad tria. & diuidendo KB ad AB, vt vnum ad tria, hoc est KB tertia pars est ipsius AB. Quod erat demonstrandum. [b 87. huius.]

PROPOSITIO XC.

G

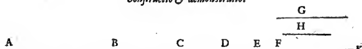
H

A B C D E F K

DAtam magnitudinem AK, ita in duobus punctis B, C, diuidere, vt AB ad BC, habeat rationem datam, G ad H. Et proportionis AB ad BC continuatæ progressio terminetur in K.

Con-

Constructio & demonstratio.



Diuide AK in B, ita vt sit AK ad BK, vt G ad H; & vt AK ad BK, sic AB fac ad BC. Dico factum esse quod petebatur. cùm enim sit vt AK ad BK, sic
a 19. Quin-ti. AB ad BC, erit & reliquum BK ª ad reliquum CK, vt AK ad BK: vnde rationis
b 79. huius. AB ad BC ᵇ terminus est K: est autem AB ad BC ratio eadem cum ratione AK ad BK, id est G ad H. constat igitur propositum.

Corollarium.

Ex hac propositione manifestum est, omnem magnitudinem, omnes rationum series continere.

PROPOSITIO XCI.



Datis quotcumque rationibus A ad B, C ad D, E ad F, datam magnitudinem LO, oporteat diuidere in tot partes, quot datæ sunt rationes, nempe in LM, MN, NO, ita vt partes illæ eandem habeant rationem, quam primi datarum rationum termini, A, C, E; & prætereà singulæ partes LM, MN, NO singulis datis rationibus, sine termino continuatis, sint æquales.

Constructio & demonstratio.

Fiat GHIK, omnibus A, C, E, æqualis; & vt diuisa est GK, sic diuide LO in M & N: denique per 90. huius LM ita diuide in P & Q, vt sit LP, ad PQ, sicut A ad B: & rationis LP ad PQ, terminus sit M. similiter MN, NO diuide in punctis R, S, T, V secundùm rationes C ad D, E ad F, ita vt rationum MR ad RS, NT ad TV, termini sint N & O. Dico factum quod petebatur. Demonstratio ex ipsa constructione est manifesta.

PROPOSITIO XCII.



Datis quotcumque rationibus AB ad BC, DE ad EF, GH ad HI, &c. magnitudinem inuenire, quæ omnes harum rationum, series progressionum adæquet.

Constructio & demonstratio.

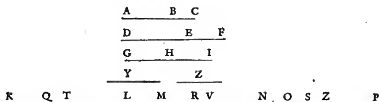
Per octogesimam huius inueniantur magnitudines, quæ singularum rationum series adæquent; atque omnibus illis magnitudinibus, vna fiat æqualis. hæc, vt patet, adæquabit omnes series datarum rationum.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.

Datas quotcumque ſeries diuerſarum rationum ita conſtituere, vt ſint in continua analogia datæ proportionis.

Conſtructio & demonſtratio.



Rationes diuerſæ ſint A B ad B C, D E ad E F, G H ad H I. & alia data ratio Y ad Z. Fiant tres magnitudines K L, M N, O P continuè proportionales, in ratione Y ad Z. & K L ita [a] diuidatur in Q T, &c. vt ſeriem conſtituat rationis A B ad B C; & M N ita diuidatur in R V, &c. vt adæquet ſeriem rationis D E ad E F: ac demum diuidatur ſimiliter O P in S & Z, vt rationis G H ad H I conſtituat ſeriem, factumque erit quod petebatur. [a 90. huius.]

PROPOSITIO XCIV.



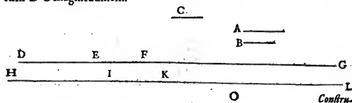
Datam magnitudinem A E, ſemel ſectam in B, ita rurſum ſecare in C & D, vt tam progreſſio rationis A B ad B C, quàm progreſſio rationis A D ad D B, terminetur in E.

Conſtructio & demonſtratio.

Reperiatur primò ipſis A E, B E, tertia proportionalis C E. Dico progreſsionem A B, B C, terminari in E. patet ex ſeptuageſima nona huius. Deinde inter A E, B E, inueniatur media D E. patet rurſum progreſsionem A D, D B terminari in E, per eandem propoſitionem: fecimus ergo quod petebatur.

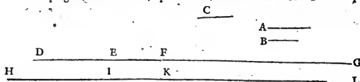
PROPOSITIO XCV.

Datâ magnitudine D G, & proportione maioris inæqualitatis A ad B; itemque aliâ magnitudine C: examinare quomodo ſeries progreſſionis datæ rationis A ad B, cuius primus terminus ſit C, ſe habeat ad datam D G magnitudinem.



Constructio & demonstratio.

Fiat vt A ad B, sic D G ad E G. Primò igitur si data magnitudo C, quę primus terminus progressionis esse debet, æqualis sit D E, erit series rationis A ad B habens pri-



mum terminum C æqualis datæ magnitudini D G nam fiat D E (id est C ad EF, vt A ad B. quoniam igitur D G est ad E G vt A ad B, erit B quoque D E ad E F vt D G ad E G. ergo progressio a rationis D E ad E F, (id est progressio rationis A ad B, habens primum terminum C) constituet magnitudinem D G.

a 79. huius.

Secundò si magnitudo C, quæ debet esse primus terminus, maior sit quàm D E, erit progressio A B, habens primum terminum C, maior quàm D G. Fiat enim ipsi C æqualis H I, vtque A est ad B, sic H I sit ad I K, & progressionis H I ad I K b reperiatur terminus L. Igitur erit c vt H I ad D E sic H L tota series progressionis, H I, I K, ad D G totam seriem progressionis D E, E F. atqui H I maior est, quàm D E; ergo & H L, maior est quàm D G.

b 80. huius. c 84. huius.

Si denique C, minor sit quàm D E. erit quoque progressio rationis A ad B, habens primum terminum C, minor quàm D G; quod eodem modo ostendemus, quo primum. Fecimus igitur quod petebatur.

PROPOSITIO XCVI.

A F G B C H I D K L K E

Data sit progressio rationis A F ad F G, terminata in B; & alia magnitudo C E: Oporteat in magnitudine C E, ita vtrimque ad C & E constituere progressionem rationis A F ad F G (progressiones, nempe C H, H I, &c. & E K, K L, &c.) vt eundem habeant terminum D, qui ita diuidat C E, vt A B, C D, D E, sint in continua analogia.

Constructio & demonstratio.

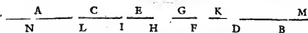
Rectam C E ita diuide per trigesimam sextam huius vt A B, C D, D E sint continuę proportionales. Deinde per nonagesimam huius ita diuide C D, in H & I, vt ratio C H ad H I, eadem sit cum ratione A F ad F G, ac simul progressio C H, H I, terminetur in D. Idem facito in E D. Factumque erit quod petebatur.

PROPOSITIO XCVII.

Si duarum serierum A M, B N termini A, B, C, D, E, F, G, &c. alternatim in continua sint analogia.

Dico illas inter se eam proportionem habere, quam primi termini.

Demonstratio.



Qvoniam A, B, C sunt tres continuæ proportionales, ergo A est ad C, in duplicatâ ratione A ad B; iterùm eum C, D, E sint tres continuæ, C erit ad E, in duplicata ratione C ad D; hoc est, vt patet ex datis A ad B: ergo cùm rationes A ad C, & C ad

A C E G K M

N L I H F D B

C ad E eiusdem duplicatæ sint, erunt A,C,E tres continuè proportionales in ratione duplicata A ad B. Quare series AM est series rationis duplicatæ; rationis A ad B: deinde quia B, C, D sunt continuæ proportionales, erit ratio B ad D, duplicata rationis B ad C. similiter ostendemus, rationem D ad F, duplicatam esse rationis B ad C. continuæ proportionales sunt igitur B,D, F. vnde series B N, est series duplicatæ rationis B ad C, id est ex datis, A ad B: similes igitur series sunt AN & BN. quare sunt [a] inter se, vt primi termini A & B. quod erat demonstrandum. a 84. huius.

PROPOSITIO XCVIII.

A B C D E F G

H I P K

L M O N

Continuetur ratio AB ad BC, habeatque terminum G. deinde fiat seriei rationis AB ad CD, æqualis magnitudo HK: seriei autem rationis AB ad DE, æqualis LN.

Dico HK magnitudinem maiorem esse quàm sit LN.

Demonstratio.

Quia HK est series AB, CD, &c. & LN est series AB, DE, &c. sumantur ex HK, partes HI, IP æquales ipsis AB, CD: ex LN verò partes LM, MO æquales ipsis AB, DE. Quoniam igitur seriei HI, IP terminus est K, erit HK [b] ad IK, vt HI ad IP: & quia seriei LM, MO, &c. terminus est N, erit LN [c] ad MN, vt LM ad MO. sed HI ad IP minorem habet rationem, quàm LM, id est HI ad MO. Ergo HK ad IK, minorem habet, quàm LN ad LM, & per conuersionem rationis KH ad HI, maiorem habet quàm LN ad LM. ergo permutando HK ad LN, maiorem habet, quàm HI ad LM. Quare cùm ex conſt. HI, LM sint æquales, necesse est HK maiorem esse quàm LN. Quod erat demonstrandum. b 81. huius. c ibid.

PROPOSITIO XCIX

Series rationis AB ad BC, terminetur in M; assumatur autem ex serie AM, terminus quicumque DE.

Dico rationis AB ad DE seriem, vnà cum serie rationis BC ad EF, ac serie rationis CD ad FG, æquari seriei rationis AB ad BC.

A B C D E F G H I K L M

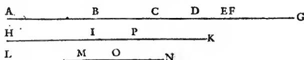
Demonstratio.

Quandoquidem omnes AB, BC, CD, DE, &c. in continua sint analogia, patet ex elementis AB, DE, GH & sic in infinitum esse continuè proportionales. Similiter BC, EF, HI, &c itemque CD, FG, IK esse continuè proportionales: ergo series trium rationum AB, DE, BC, EF, CD, FG, continuantur perpetuò; in tota seriem AB, BC, CD, &c. ita vt in his tribus seriebus simul sumptis, nec plures, nec pauciores termini reperiantur, quàm sint in serie AB, BC, CD, &c. manifestum igitur est has tres series, seriei AB, BC, &c. æquales esse. Quod erat demonstrandũ.

PROPOSITIO C.

SEries rationis AB ad BC terminetur in G; seriei autem rationis AB ad CD, æqualis sit HK; item seriei rationis BC ad EF, æqualis sit LN. Dico seriem AG, duabus HK, LN, maiorem esse.

Demonstratio.



a 98. huius. SEries BC, EF, &c. [a] minor est serie BC, DE, &c. ergo series BC, EF, &c. cum serie AB, CD, &c. minor erit, quam series BC, DE, &c. vnà cum serie AB, CD, &c. atqui per præcedentem series BC, DE, &c. cum serie AB, CD, &c. constituit seriem AB, BC, CD, DE, &c. hoc est magnitudinem AG. ergo series BC, EF, &c. cum serie AB, CD, &c. minorem constituit, quàm AG: ergo HK, LN series æquales seriebus AB, CD, &c. BC, EF, &c. minores sunt, quàm series AG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CI.



O P Q
R S T

SEries continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. terminetur in L. Detur autem proportio α ad β, multiplicata rationis AB ad BC, iuxta datum aliquem numerum (quatuor exempli causa) & quot sunt vnitates in dato numero, tot vna minùs fac magnitudines LM, OP, RS, æquales datæ seriei terminis AB, BC, CD.

Dico series, rationis α ad β, quarum primi termini sint L, O, R, simul sumptas, constituere eandem magnitudinem, quam series rationis AB ad BC.

Demonstratio.

FIat vt α ad β, sic LM ad MN, & OP ad PQ, & RS ad ST; erunt ergo omnes hæ rationes quadruplicatæ rationis AB ad BC: & quoniam LM, AB, æquales sunt, eandem habebunt rationem ad MN; ergo & ratio AB ad MN, quadruplicata est rationis AB ad BC; est autem & ratio AB ad DE, quadruplicata rationis AB ad BC. ergo vt AB ad DE, ita AB ad MN. æquantur igitur DE & MN: series igitur rationis LM ad MN, est series rationis AB ad DE. Similiter ostendam seriem rationis OP ad PQ, esse seriem rationis BC ad EF, & seriem rationis
b 99. huius. RS ad ST, seriem esse rationis CD ad FG. atqui hæ tres [b] series simul sumptæ, adæquant seriem rationis AB ad BC; ergo etiam & illæ eandem adæquabunt. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CII.

A B C D E F G H I Q K
L M N O P. 3.

SEries rationis A B ad B C continuatæ, terminetur in K. Data autem ſit L M æqualis A B, & quiuis numerus (putà 3.) deinde fiat ratio L M, ad M N multiplicata rationis A B ad B C, iuxta datum numerum; ſitq́; rationis L M ad M N terminus O.

Dico ſeriem A K, ad ſeriem L O, eandem habere proportionem, quam totidem termini ſeriei A B, B C, C D quot ſunt vnitates in dato numero, habent ad primum A B.

Demonſtratio.

CVm, exempli cauſa, numerus datus ponatur ternarius, erit ratio L M ad M N triplicata rationis A B ad B C; oſtendendum nobis eſt, A K eſſe ad L O, vt tres primi termini D A ad primũ A B. ex ſerie A K ſume ſex terminos A G: Igitur proportio A D [a] ad D G, triplicata eſt proportionis A B ad B C; æqualis igitur eſt rationi L M ad M N, hoc eſt [b] rationi L O ad M O. cùm enim O ſit terminus ſeriei L M, M N, erit L O ad M O, vt L M ad M N; Deinde quia K terminus eſt ſeriei A B, B C, erunt [c] tres A K, B K, C K continuæ proportionales; adeoque omnes etiam ſequentes erunt continuæ: Quare & A K, D K, G K, inter quas par continuè proportionalium numerus interijcitur, ex elementis patet eſſe continuè proportionales. Vnde A K, [d] eſt ad D K, vt A D ad D G, id eſt (quemadmodum iam oſtendi) vt L O ad M O. Itaque per conuerſionem rationis A K eſt ad A D, vt L O ad L M, & permutando A K ad L O, vt A D ad L M, id eſt ex datis A B. Quod erat demonſtrandum.

a 32. huius.
b 81. huius.
c ibid.
d 1. huius.

PROPOSITIO CIII.

A B C D E F G H I Q K
L O

EX ſerie continuè proportionalium A K, ſumatur quiuis terminus vt H I.

Dico ſeriem rationis A B ad B C, habere proportionem ad ſeriem rationis A B ad H I, quam habet H A (omnes nempe termini ipſum H I præcedentes) ad A B primum terminum.

Hæc propoſitio, vt conſideranti facilè patebit, eadem eſt cum præcedenti, ſed aliter & commodiùs fortaſſe propoſita. Quare eadem erit vtriuſque demonſtratio.

Corollarium.

EX hoc theoremate licebit praxim deſumere, aſsignato quouis termino H I, in ſerie A K, rationis A B ad B C, reperiendi magnitudinem toti ſeriei rationis A B ad H I æqualem. Nam ſi fiat vt H A ad A B, ſic K A ad aliam L O; erit L O æqualis toti ſeriei rationis A B ad H I.

Fateor tamen opus non eſſe ad hanc praxim recurrere, cùm vniuerſalem methodum, eamque facillimam reperiendi magnitudinem, toti ſeriei cuiuſcumque rationalis æqualem, propoſitio 80. huius ſuppeditet.

PROPOSITIO CIV.

A B C D E F G H X

T K L M N O P Q V

DAtæ ſint continuè proportionalium ſeries binæ, A X, K V rationum diuerſarum, ita tamen vt A, K, L, B etiam ſint continuæ.

Dico ſeriem A,K,L,M,N, &c. terminatam in V, eam habere proportionem ad ſeriem A,B, C, D, &c. terminatam in X, quam A, K, L ſimul ſumpti ad A primum terminum.

Demonſtratio.

ADdatur ipſi K terminus T in directum, æqualis ipſi A: ratio igitur (quod ex hypotheſi colliges) T ad M, triplicata eſt rationis T ad K. Quia autem A, K, L, B ponuntur continuæ proportionales, erit L ad B, vt K ad L: ſed etiam L eſt ad M, vt
a 9. Quinti. K ad L; ergo L ad B, & M, eandem habet rationem: adeoque a B & M æquales ſunt. Sunt verò etiam æquales A T, ergo ratio A ad B, eadem eſt cum ratione T ad M. quare ratio A ad B, triplicata eſt rationis T ad K. cùm ergo vtriuſque ſeriei initium, idem ſit terminus A, erit ſeries T, K, L, &c. id eſt ſeries A, K, L, M, &c.
b 102. Huius. b ad ſeriem A, B, C, D, &c. vt tres primi termini L, K, T, hoc eſt L, K, A, ſimul ſumpti ad T, hoc eſt ad A, primum terminum: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CV.

A B C D E K F G H I L M

N O P Q R S

DAtæ ſint binæ ſeries continuè proportionalium magnitudinum in diuerſis rationibus, terminatæ in K & M; & ab æqualibus terminis A B, F G incipientes. Fiat autem ſecundo termino B C, vnius ſeriei æqualis N O; & G H ſecundo termino alterius ſeriei, æqualis O P; Deinde ratio N O ad O P (vel ratio O P ad N O, ſi O P maior ſit quàm N O) in infinitum continuetur.

Dico N O eſſe ad P Q, vt C D ad H I; & N O eſſe ad Q R vt D E ad I L, atque ita in infinitum.

Demonſtratio.

c 17. huius. CVm ſeries A K, F M incipiant ab æqualibus terminis, erit ratio c C D ad H I, rationis B C ad G H, hoc eſt, ex conſtructione, rationis N O ad O P, duplicata; Atqui etiam ratio N O ad P Q, duplicata eſt, ex datis, rationis N O ad O P, eædem igitur ſunt rationes C D ad H I, & N O ad P Q; ſimiliter ratio D E ad I L, triplicata eſt rationis B C ad G H, hoc eſt rationis N O ad O P: Quare cùm & ratio N O ad Q R, eiuſdem rationis N O ad O P, ſit triplicata, eædem erunt rationes D E ad I L, & N O ad Q R. Atque ita in infinitum, ſimili demonſtratione procedemus. Patet igitur Theorematis veritas.

PROPOSITIO CVI.

DAtæ sint duæ rationes similes, AB ad CD, & BC ad DE, quæ terminis sic alternatim positis, continuentur.

Dico vtriusque rationis in infinitum continuatæ eundem terminum futurum.

A B C D E F G K

Demonstratio.

QVoniam ex hypothesi AB est ad CD, vt BC ad DE; erit permutando componendo, rursumque permutando AC ad CE, vt BC ad DE: similiter quia CD est ad EF, vt DE ad FG, erit permutando componendo, rursumque permutando, CE ad EG, vt DE ad FG; hoc est ex hypothesi vt BC ad DE, hoc est ex iam demonstratis, vt AC ad CE: sunt igitur AC, CE, EG continuæ proportionales. Quod si rationes AB ad CD, & BC ad DE, in infinitum continuentur, ostendam pariter, rationem AC ad CE, in infinitum continuari, per terminos continuè proportionales AC, CE, EG, &c. Inueniatur igitur [a] terminus seriei AC, CE, EG, &c. sitque K. Itaque non est punctum assignabile, inter puncta A & K, vltra quod non cadat aliquis terminus seriei AC, CE, EG. Quare cùm rationum AB ad CD, & BC ad DE continuatarum, termini omnes ita contineantur in serie AC, CE, &c. vt singuli termini seriei AC, CE, &c. contineant vnum terminum rationis AB ad CD, & vnum terminum rationis BC ad DE: manifestum quoque est nullum punctum assignari posse inter A & K, vltra quod non cadat aliquis terminus, tam rationis AB ad CD, quàm rationis BC ad DE; neutra igitur series terminabitur inter A & K: sed neque vlli dictarum rationum termini transilient K, cùm perpetuò contineantur in serie AC, CE, EG, &c. (quæ ex constructione non transilit vnquam K) ergo binæ series rationum AB ad CD, & BC ad DE, eundem habent terminum K. Quod erat demonstrandum.

[a] 28. huius.

PROPOSITIO CVII.

A C E G I F D B
H

MAgnitudo AB bisecta sit in C; BC autem in D; & CD in E; & DE in F; & EF in G; & FG in I; atque hoc semper fiat:

Dico alternæ huius progressionis terminum fore in puncto, quo magnitudo AB, diuiditur in partes, habentes rationem quam vnum ad duo, siue terminum progressionis abscindere BH, tertiam partem magnitudinis AB.

Demonstratio.

QVoniam DC dupla est CE, & BC dupla DC, erit BC, hoc est AC, quadrupla ipsius CE: similiter cùm FE dupla sit GE, & DE dupla FE, erit & DE, hoc est CE, quadrupla EG; sunt igitur AC, CE, EG tres continuæ in proportione quadrupla. Deinde cùm ED ex hypothesi dupla sit DF, & CD dupla ED; erit tertium CD, hoc est BD, quadrupla DF: similiter quia GF dupla est FI, & EF dupla GF, erit EF, hoc est DF quadrupla FI: sunt igitur BD, DF, FI continuæ in ratione quadrupla. Itaque si alterna illa bisectio sine statu continuetur, constituetur vtrimque progresio in infinitum, proportionis quadruplæ: & quoniam AC quadrupla est CE, erit & BC eiusdem CE quadrupla: est verò & CE, quadrupla EG, atque ita in infinitum: progresio igitur AC, CE, EG, &c. eadem est cum progresione

A C E G IF D B
H

gresſione B C, C E, E G, &c. & eundem terminum habet: Atqui progreſsionis qua-
a 19. huius. druplæ B C, C E, &c. terminus H, ſecat a C B in ratione vnius ad duo, ergo etiam terminus progreſsionis A C, C E ſecat C B, in ratione vnius ad duo. Quare C H dimidia eſt ipſius H B, & C B ſeſquialtera H B: ideoque A B tripla ipſius H B; ac denique A H dupla H B; ergo terminus progreſsionis A C, C E, &c. ſecat A B, in ratione vnius ad duo. vlterius cùm progreſsiones A C, C E, &c. B D, D F, F I, &c. eiuſdem ſint rationis, nempe quadruplæ, erit tota ſeries progreſsionis A C, C E, E G,
b 84. huius. &c. ad totam ſeriem progreſsionis B D, D F, &c. b vt A C ad B D: Quare cùm A C dupla ſit D B, erit quoque ſeries progreſsionis A C, C E, &c. id eſt A H, dupla ſeriei B D, D F, &c. Atqui A H iam oſtendimus etiam duplam eſſe H B; ergo A H, ad ſeriem progreſsionis B D, D F, eandem habet rationem quam ad H B: vnde H B æqualis eſt ſeriei B D, D F: vnde progreſsionis B D, D F, ſeries terminatur etiam in puncto H. Quare per eadem procedens puncta, eùm alterna illa biſectio conſtituat vtramque progreſsionem, illius quoque terminus erit punctum H, quo diuiditur A B in ratione vnius ad duo: quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

A C F H E G D B

EX hoc Theoremate reperietur arcus triſectio, ſi independenter à triſectione, alternæ illius progreſsionis terminus inueniatur. Cùm enim Theorema vniuerſale ſit, & in quauis magnitudine demonſtratio allata valeat, ſi in arcu dato A B, ſimilis alterna fiat biſectio, terminus quoque progreſsionis alternæ H, abſcindet tertiam arcus partem B H: proindeque reperto aliâ viâ dicto termino, arcus etiam dati triſectio reperietur.

PROPOSITIO CVIII.

A 1 B 3 E 5 H 7 K 8 G 6 F 4 D 2 C
P

DAta ſit magnitudo A C vtcunque ſecta in B: Deinde fiat vt A C ad B C, ſic B C ad B D, & B D ad E D, & E D ad E F, & E F ad H F; atque ſic alterna diuiſio ſemper fiat;

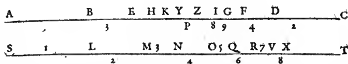
Dico vtrimque conſtitutum iri duas progreſſiones ſimiles, magnitudinum A B, B E, E H, &c. & C D, D F, F G, &c. continuè proportionalium in ratione duplicatâ proportionis A C ad B C.

Demonſtratio

c 1. huius. QVoniam ex datis A C, B C, B D, E D, E F, &c. ſunt continuæ proportionales, erunt eorũ differentiæ c A B, C D, B E, D F, E H, F G, &c. etiam in continua analogia, & quidem eo ordine vt prima, tertia, quinta, ſeptima, & ſic deinceps (intermiſſo ſemper numero medio) conſtituant ſeriem A: ſecunda verò, quarta, ſexta, octaua, & ſic deinceps (ſemper omiſſo numero medio) ſeriem C, conficiant. igitur vt A B ad B E, prima ad tertiam, ſic C D eſt ad D F, ſecunda ad quartam; & ſic deinceps; adeoque rationes A B ad B E, & B E ad E H, &c. ſimiles erunt rationibus C D ad

CD ad DF, & DF ad FG, &c. est autem AB ad BE, vt a AC ad BD, hoc est, in ratione duplicata AC ad BC; & CD est ad DF, vt BC est ad ED secunda ad quartam, hoc est in ratione duplicata BC ad BD, hoc est AB ad BC, ergo duæ illæ progresiones, similes erunt, & in ratione duplicata AB ad BC. Quod erat demonstrandum. a ibid.

PROPOSITIO CIX.



Iisdem positis progresio vtraque AB, BE, EH, &c. CD, DF, FG, &c. ex alternâ illâ diuisione nata, terminum habebit eundem in magnitudine AC.

Demonstratio.

Sumatur ST æqualis AC; & capiantur ex ea magnitudines LT, MT, NT, OT, &c. quæ æquales sint continuè proportionalibus BC, BD, ED, EF, &c. erunt igitur SL, LM, MN, NO, &c. ipsis quoque AB, CD, BE, FD, &c. æquales; cùm enim tota AC, ST, & ablata BC, LT, æqualia sint, necesse est etiam reliqua AB, SL esse æqualia: & rursum quia tota BC, LT, & ablata BD, MT æqualia sunt, patet quoque reliqua CD, LM æqualia esse. Similiter ostendam & BE ipsi MN, DF ipsi NO, atque ita in infinitum, reliqua reliquis æqualia esse. ergo vtraque progresio A & C. progresioni SL, LM, æquales sunt simul sumptæ. & quoniam ST, LT, MT, &c. æquantur continuè proportionalibus AC, BC, BD, &c. etiam ipsæ erunt continuæ b ideoque SL, LM, MN, &c. sunt continuæ proportionales. atque ita sine termino continuatur ratio, SL ad LM; ergo progresio c SL ad LM, terminatur in T, siue constituit magnitudinem ST: quare cùm vtraque progresio A & C simul sumptæ, æquentur progresioni SL, LM; etiam constituent magnitudinem ST, hoc est AC ex constructione: eundem igitur terminum habeant in magnitudine AC necesse est. nam si diuersos habeant, sint illi Y & Z. vel inter vtrumque terminum Y, Z supererit media quædam magnitudo, quę ad neutram seriem pertineat, vel aliqua erit magnitudo, vtrique seriei communis, eritque Z terminus seriel A, & Y terminus seriei C: neutrum autem fieri potest; nam primo dato, constitueret vtraque series magnitudinē minorem quàm AC; & posito altero, maiorem quàm AC. Quod vtrumque repugnat modò demonstratis; non igitur diuersos habebunt terminos dictę progresiones, sed eundem: quod erat demonstrandum. b 1. huius. c 79. huius.

PROPOSITIO CX.

Iisdem positis, geminæ progressionis AB, BE, & CD, DF ex alterna sectione natæ, communis terminus P, magnitudinem AC, diuidet in ratione AC ad BC.

Demonstratio.

A B E H K I G F D C
P

Per præcedentem ponatur P esse communis vtriusque terminus, d quoniam igitur similes sunt proresiones A & C, erit tota series progresionis A, hoc est AP, d 108 huius.

P ad

A B E H K I G F D C

P

a 84. huius. ad totam seriem progreßionis C hoc est CP, a vt AB ad CD. quia autem ex hypo-
b 1. huius. thesi AC, BC, BD sunt continuæ proportionales, erit AB ad CD, b vt AC ad BC; est igitur AP ad CP, vt AC ad BC. terminus ergo P vtriusque progreßionis, diuidit AC, in ratione AC ad BC: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXI.

A B E P F D C

Iisdem positis; terminus alternæ sectionis, siue progreßionis AC, BC, BD, ED, EF, &c. diuidet magnitudinem AC, in ratione AC ad BC.

Demonstratio.

Vtriusque progreßionis AB, BE, & CD, DF, termini simul sumpti sunt iidem cum terminis progreßionis AC, BC, BD, ED, &c alteratim sumptis. ergo progreßio alterna AC, BC, BD, &c. eundem habet terminum quem progreßiones AB, BE & CD, DF. sed harum terminus per præcedentem, diuidit AC, in ratione AC ad CB; ergo & alteræ progreßionis AC, BC, BD, &c. terminus in eadem ratione diuidet magnitudinem AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXII.

Data sit continuè proportionalium series, constituens magnitudinem AK: sit autem LN, æqualis AK, fiatque primæ AB, æqualis LM; secundæ verò BC, æqualis fiat NO; tertiæ autem CD, sit æqualis MP, & quartæ DE, æqualis OR: atque hoc alternatim semper fiat, ita vt omnes AB, CD, EF, GH, &c. sint ex parte L; omnes verò BC, DE, FG, HI, &c. sint ex parte N.

Dico terminum huius alternę progreßionis, AB, NO, MP, OR, PQ, RS, &c; diuidere LN, in ratione AB ad BC.

Demonstratio.

A B C D E F G HI K

L M P Q T Y Z V S R O N

X

Quoniam AB, BC, CD, DE, sunt continuæ proportionales, etiam AB, CD, EF, &c sunt continuæ, & quidem in ratione duplicata AB ad BC; vt patet ex elementis. Similiter in eadem ratione duplicata AB ad BC, erunt continuæ proportionales omnes BC, DE, FG, &c atqui omnes AB, CD, &c. sunt ex parte L, & omnes, BC, DE, &c ex parte N. Igitur in magnitudine LN per alternam illam progreßionem, constituuntur duæ series appositæ similes, eiusdem nempe ratio-
c 84 huius. nis duplicatæ AB ad BC. Quare series tota LM, c MP, &c est ad seriem totam NO, OR, &c vt LM ad NO, hoc est AB ad BC. Deinde quia per series AB,
d 99 huius. d CD, EF, &c & series BC, DE, &c. simul sumptæ, æquantur seriei AB, BC, CD, DE, &c series quoque L, & N, simul sumptæ æquabuntur seriei AB, BC, CD, DE, &c. Quare cùm hæc ex hypothesi constituat magnitudinem AK, id est ex hypothesi LN, etiam series L & N, magnitudinem LN constituent. ergo eun-
dem

dem in magnitudine L N, habeant terminum necesse est: si enim diuersos habeant vt Y, Z; vel inter vtrumque terminum reperietur media quædam magnitudo, quæ ad neutram seriem pertineat, vel aliquid erit vtrique commune, ita vt terminus seriei L, sit Z. terminus verò seriei N, sit Y. neutrum autem fieri potest: nam primo dato constitueret vtraque series magnitudinem minorem quàm L N, altero autem posito maiorem: quod vtrumque iam demonstratis repugnat. eundem igitur terminum X, habebunt series L & N: cùm igitur ostensum priùs sit, seriem L esse ad seriem N, vt A B ad B C, vtriusque seriei terminus communis X diuidet magnitudinem L N, in ratione A B ad B C. Atqui alterna illa magnitudinum L M, N O, M P, O R, &c. progressio, constituit series L & N, ergo ipsius quoque terminus erit X, diuidens L N in ratione A B ad B C: quod erat demonstrandum.

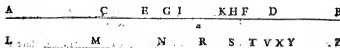
PROPOSITIO CXIII.

Centesima undecima aliter demonstratur.

DAta sit magnitudo A B vtcumque diuisa in C; fiat autem vt A B ad B C, sic B C ad C D, & C D ad D E, & D E ad E F, & E F ad F G: atque hoc semper fiat.

Dico alternæ huius progressionis terminum α, diuidere A B, in ratione A B ad B C.

Demonstratio.



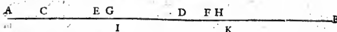
SVmatur enim L Z æqualis A B, & singulis in quas diuiditur alternatim A B, continuis proportionalibus A B, B C, C D, D E, &c. æquales fiant M Z, N Z, R Z, &c. erunt igitur etiam hæ [a] ideòque & L M, M N, N R, &c. continuæ proportionales; & progressionis huius L M, M N, &c. [b] terminus erit Z; & quoniam A B, L Z & B C, M Z, æquantur, etiam A C, L M æquales erunt. rursus quia B C, M Z, & C D, N Z, æquales sunt; etiam B D, M N æquales erunt. Similiter ostendam C E, ipsi N R, & D F ipsi R S, & C E ipsi S T, & F H ipsi T V (& sic in infinitum) æquales esse: habemus igitur progressionem alternam magnitudinum A C, B D, C E, D F, &c. qualis in præcedente propositione proponebatur, cuius terminus X diuidit A B in ratione L M ad M N. Igitur cùm ex progressione alterna hic propositâ A B, B C, C D, D E, E F, &c. illa altera oriatur, ita vt tam progressio A B, B C, C D, D E, &c. quàm progressio A C, B D, C E, D F, &c. in punctis iisdem C, D, E, F, G, H, &c. diuidant magnitudinem A B, huius quoque terminus erit α, diuidens A B in ratione L M ad M N, [c] hoc est in ratione L Z ad M Z, hoc est ex constructione in ratione A B ad C B. Quod erat demonstrandum.

[a] 21. huius.
[b] 79. huius.
[c] 61. huius.

Corollarium.

SI verò fiat vt A C ad C B, sic B D ad D C, & C E ad E D, & D F ad F E, atque ita semper: huius quoque alternæ progressionis terminus, diuidet A B in ratione A B ad B C. cùm enim sit vt A C ad C B, sic B D ad D C & C E ad E D, &c. componendo erit A B ad B C, vt B C ad C D, & C D ad D E, &c. atqui terminus progressionis A B, B C, D C, C D, &c. diuidit A B in ratione A B ad B C, ergo & progressionis A C, C B, B D, D C, &c. terminus, diuidet A B in ratione A B ad B C: cùm enim vtraque hæc progressio in punctis semper iisdem secet A B, eundem vtraque terminum habere debet.

Lemma primum.



DAta sit magnitudo AB secta in tres partes æquales, in I & K: & rursum aliter secta in C, inter A & I.

Dico bisectionem partis CB, cadere inter I & K in D; & bisectionem partis DA, cadere inter I & C in E; rursum bisectionem partis EB, contingere inter D & K, in F; ipsius autem FA bisectionem, inter E & I in G: atque ita in infinitum.

Demonstratio.

QVoniam CB maior est, quàm IB dupla AI; erit ipsius CB dimidia, maior quàm AI. ergo bisectio ipsius CB, cadit vltra I, versus B. Iterum CB plus est, quàm dupla KB, adeoque ipsius CB dimidia, maior quàm BK; quare bisectio CB, cadit vltra K, versus A: adeoque cadit inter I & K, in D. Deinde cùm CB plus sit quàm duæ tertiæ, ipsius AB, erit CD eius dimidia, plus quàm vna tertia ipsius AB; sit autem AC ex datis minor, quàm vna tertia; ergo CD maior est AC. & bisectio ipsius DA, cadet vltra C versus B. similiter cùm AI etiam maior sit quàm DI, cadet bisectio ipsius DA vltra I versus A, adeoque inter C & I, in E; non aliter ostendemus reliqua, quæ in assertione proposuimus. Constat igitur veritas lemmatis.

Lemma secundum.



DAta rursum sit AB secta in tres partes æquales, in I & K; & rursum aliter secta inter I & K, in C.

Dico bisectionem partis CB cadere inter K & B in D; & bisectionem partis DA, cadere inter C, & F, in E; bisectionem autem partis EB, cadere inter K & D in F; partis verò FA, bisectionem contingere inter E & I in G; atque ita in infinitũ.

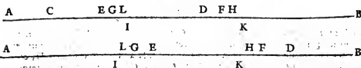
Demonstratio eadem propè quæ lemmatis præcedentis.

PROPOSITIO CXIV.

EX magnitudine AB secta in tres partes æquales in I & K, sumatur AC minor vel maior tertiâ parte totius AB, & bifariam diuidatur CB in D, & DA bifariam in E, & EB in F, & FA in G, Rursum GB bifariam in H, & HA in L. atque hoc semper fiat.

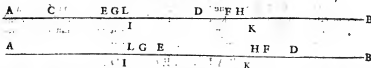
Dico huius progressionis alternæ terminos diuidere magnitudinem AB in tres partes æquales.

Demonstratio.



CVm CB dupla sit DB, & EB dupla FB, erit CB ad DB, vt EB ad FB, ergo CE ad DF, ª vt EB ad FB. Quare cùm EB dupla sit FB, etiam CE, ipsius DF dupla erit. Deinde cùm DA dupla sit EA, itemque FA dupla ipsius GA, erit

ª 19. Quinti.



GA, erit D A ad E A, vt F A ad G A; ac proinde D F erit [a] ad G E, vt D A ad E A. Quare cùm D A ipsius E A dupla sit, etiam D F dupla erit E G. vnde C E quadrupla est ipsius E G. Similiter ostendemus E G duplam esse F H, ipsam autem F H duplam esse G L, proindeque E G ipsius G L quadruplam esse: atque ita continuando sine statu, per alternam illam bisectionem constitui progressionem magnitudinum C E, E G, G L, &c. proportionis quadruplæ. eodem autem discursu quo prius vsi fuimus, demonstrabimus D F esse quadruplam F H, & F H quadruplam sequentis termini, ac proinde etiam hic progressionẽ rationis quadruplæ statui. Vlterius quoniam tam ratio C B ad D B, quàm I B ad K B, dupla est, erit C B ad D B, vt I B ad K B, & [b] C I ad D K, vt I B ad K B. Itaque cùm I B dupla sit K B, etiam C I ipsius D K dupla erit; similiter D K ipsius E I duplam esse demonstrabimus. Igitur C I quadrupla est E I: ideoque C I est ad E I, vt C E ad E G. vnde progressionis C E [c] E G, &c. terminus est I; eâdem methodo discurrendi, ostendetur D K esse ad F K, vt D F est ad F H. Quare & progressionis D F, F H, &c. terminus erit K. dum igitur vtraque progressio C E, E G, &c. D F, F H, &c. constituatur ab alterna illa bisectione, in propositione proposita, ipsius quoque termini erunt in I & K: vbi trifariam diuiditur magnitudo A B. Quod erat demonstrandum.

[a] ibid. [b] ibid. [c] 79 huius.

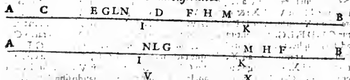
Assumpsimus A C minorem aut maiorem tertia parte magnitudinis datæ A B; quia si æqualis vni tertiæ foret, bisectiones alternæ in eadem semper puncta I & K inciderent; vti manifestum est, assertionem propositionis consideranti.

Lemma.

PARS PRIMA.

DAta sit magnitudo A B secta in I & K secundùm rationem V ad X; ita vt A K sit ad K B, vt B I ad I A. diuisa sit deinde A B adhuc aliter inter A & I in C. Dico si C B diuidatur in ratione V ad X, sectionem fieri vltra K in D, item si D A diuidatur in ratione V ad X sectionem cadere vltra I in E: rursum si E B diuidatur in eadem ratione, sectionem contingere inter K & D in F: & si F A, sectionem fore inter I & E in G. atque ita in infinitum.

Demonstratio.



CVm A K sit ad K B, vt B I ad I A, erit componendo A B ad K B, vt A B ad I A: ergo K B, I A, additoque communi I K etiam A K, I B æquantur: vnde cùm A K sit ad K A, vt V ad X, vtique I B ad K B, in eadem ratione erit: quare C B (ex datis maior quàm I B) maiorem habet rationem ad K B, quàm V ad X: ergo sectio ipsius C B, in ratione V ad X, cadit vltra K in D: similiter cùm A K sit ad K B, id est I A, sicut V est ad X, erit D A ad eandem I A, in minori ratione, quàm V ad X: vnde sectio ipsius D A in ratione V ad X, cadet vltra I in E: Quod autem sectio ipsius E B cadat vltra K, eodem quo priùs modo ostendetur: item quod vltra D, versus B sic ostendo: factâ C B ad D B, in ratione V ad X, erit E B ad D B, in minori ratione quàm V ad X.

 ergo

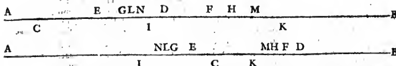
ergo sectio ipsius E B, in ratione V ad X, cadit vltra D, versus B: ergo eum etiam vltra K versus A cadat, inter D & K, contingat necesse est, nempe in F: similiter sectionem ipsius F A inter I & E, futuram in G demonstrabimus, atque ita in infinitum; discursus enim idem omnibus diuisionibus sequentibus quadrat.

PARS SECVNDA.

Iisdem positis, si C cadat inter I & K (nã si inter B & K caderet, foret casus primæ partis) simili planè discursu demonstrabimus eadem omnia contingere quę priùs, hoc solùm mutato, quod signa diuisionum E, G, L, K, &c. D F, H M, &c. ad alterum latus ordine constituantur.

V
X

PROPOSITIO CXV.



Data sit proportio V ad X, & magnitudo A B ita secta in I & K, vt A K sit ad K B, & B I ad I A, sicut V est ad X. Aliter deinde diuidatur A B in C; quocumque tandem loco cadat C, modo non incidat in I aut K:

Fiat autem C B ad D B, vt V ad X; & D A ad E A, vt V ad X: item E B ad F B, & F A ad G A, & G B ad K B, & H A ad L A, fuerint inter se vt V, est ad X: Atque hoc semper continuetur.

Dico alternæ huius progressionis terminos, fore in I & K, vbi A B, diuiditur in ratione V ad X.

Demonstratio.

Qvoniam est ex constructione C B ad D B, vt E B ad F B (sunt enim vtraque ad inuicem in ratione V ad X) etiam C E reliquum [a] D F reliquum, erit vt C B ad D B, id est sicut V ad X: & quia D A est ad E A, vt F A ad G A (nempè in ratione V ad X) rursum erit D F ad E G, vt F A ad G A, hoc est vt V ad X: sunt igitur C E, D F, E G, tres continuæ proportionales in ratione V ad X. ergo ratio C E ad E G duplicata est rationis V ad X. Similiter ostendemus E G, F H, G L esse continuas in ratione V ad X, ideoque rationem E G ad G L, duplicatam esse rationis V ad X. Cùm ergo etiam ratio C E ad E G, sit rationis V ad X duplicata, erunt C E, E G, G L, in continua analogia; atque ita continuando sine statu alternam illam diuisionem, demonstrabimus constitui progressionem magnitudinum C E, E G, G L, L N, &c. continuè proportionalium in ratione duplicata V ad X, ab altera verò parte, eodem planè discursu ostendemus D F, F H, H M, &c. esse continuas in ratione duplicata V ad X; ac proinde sic quoque constitui progressionem proportionis duplicatæ V ad X. vlterius quia A K est ad K B, vt B I ad I A, componendo A B erit ad K B, vt A B ad A I; ideoque K B, A I æquantur: additaq; I K communi, æquales erunt I B, A K: ergo vt A K ad K B, id est ex cõstructione vt V ad X, sic I B ad K B: Quare cùm & C B ad D B, sit vt V ad X, etiam C B erit ad D B, vt I B ad K B. allatis ergo I B, K B, C I erit [b] ad D K, vt C B ad D B reliquum ad reliquum, hoc est ex cõstructione vt V ad X. similiter demõstrabimus D K esse ad E I, vt V ad X, erunt

[a] 19. Quinti.
[b] 19. Quinti.

erunt igitur CI, DK, EI continuę proportionales in ratione V ad X: Ideoque ratio CI ad EI, duplicata erit rationis V ad X; quare cùm & ratio CE ad EG, eiusdem ostensa sit esse duplicata, erit CI ad EI, vt CE ad EG, & permutando vt CE ad CI, sic EG ad EI, vnde terminus a progresionis CE, EG, &c. est I. simili discursu a 79. huius. ostendetur, etiam DK esse ad FK, vt DF est ad FH; quare huius quoque progressionis terminus erit K: Itaque cùm vtraque progressio CE, EG, &c. DF, FH, &c. ab alterna illa diuisione constituatur, ipsius quoque termini erunt I & K; vbi magnitudo AB, diuiditur in ratione V ad X. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

Hic quoque volumus punctum C non incidere in I aut K; eò quod si in alterutrum incideret, diuisiones quoque alternæ, in eadem semper puncta I & K, deberent incidere; vt patet consideranti statum Theorematis.

Cæterùm qui hanc propositionē cum priori contulerit, facilè intelliget hanc vniuersalem esse, illam verò particularem casum complecti. placuit enim id subinde tum hic, tum alibi factitare, tum quia in particularibus casibus eiusdem Theorematis veritas, clariùs non rarò atque illustrius emicat, tum quia à particularium casuum cognitione, faciliùs ad percipiendas vniuersalium Theorematum demonstrationes proceditur.

PROPOSITIO CXVI.

A . E G . I B
C F HKOD

Sint duæ quantitates AB, CD; sitque AB diuisa in E & G, ita vt AE, sit non minor dimidio AB, & EG non minor dimidio EB; eodem modo diuisa sit CD in F & H, sintque AE, EG; CF, FH proportionales: & hoc semper fieri possit.

Dico totam AB esse ad totam CD, vt est AE ad CF.

Demonstratio.

Si enim non est proportio AB ad CD æqualis proportioni AE ad CF, erit vel maior vel minor: sit primò minor. cùm ergo ponatur AB ad CD, minorem habere rationem, quàm AE ad CF, habebit AB ad aliquam b minorem quàm CD b 8. Quinti. nempè ad CK, eandem proportionem, quam AE ad CF: & quoniam ex quantitatibus AB, CD, earumque residuis semper non minùs dimidio aufertur, si continuetur hæc ablatio per aliquos terminos, verbi gratia per tres CF, FH, HO, relinquetur tandem OD c minor quàm KD; ideoque CO erit maior quàm CK: si c 1. Decimi. iam ex AB totidem partes ad mentem propositionis AE, EG, GI, tollantur, erit ex hypothesi AE ad EG, vt CF ad FH, & EG ad GI, vt FH ad HO: ideoque permutando vt AE ad CF, sic EG ad FH, & vt EG ad FH, sic GI ad HO. ergo d vt AE vna antecedentium, ad CF vnam consequentium, sic omnes ante- d 1. Quinti. cedentes, id est linea AI ad omnes consequentes, id est ad lineam CO: sed vt AE ad CF, sic est ex constructione AB ad CK: ergo AI, est ad CO, vt AB ad CK; quod est absurdum; vt patet ex elementis. non est igitur proportio AB ad CD minor proportione AE ad CF.

A . E GKIB C F H O D

Sit iam, si fieri potest, proportio AB ad CD maior proportione AE ad CF: itaque aliqua e minor quàm AK, habebit ad CD eandem rationem quam AE ad e 8. Quinti. CF. & quoniam aufertur semper non minùs dimidio, post aliquot partes, exempli gratiâ post tres AE, EG, GI, ablatas, relinquetur tandem IB minor quàm AK; ideoque AI erit maior quàm AK. Si iam totidem auferantur ex quantitate CD, nempè partes CF, FH, HO, erit ex hypothesi, & permutando AE, ad CF, vt EG, ad

A E G K I B C . F H O D.

a 12. quinti. ad F H, item vt G I ad H O. ergo a vt A E vna antecedentium, ad C F vnam consequentium, ita omnes antecedentes, id est linea A I, ad omnes consequentes, nempè lineam C O. Atqui ex constructione vt A E ad C F, sic erit A K ad C D; ergo A I est ad C O vt A K ad C D, quod esse absurdum patet ex elementis. non est igitur ratio A B ad C D, maior ratione A B ad C F. patet ergo propositionis veritas.

Corollarium.

A E G I B

C F H K D

ADuabus quantitatibus A B, C D, auferri possint A E, C F, æqualia, & non minora dimidio ipsarum A B, C D; & à residuis E B, F D rursum auferri possint E G, F H, æqualia & non minora dimidio residuorum: si hoc semper fieri possit, æquales erunt quantitates A B, C D. Patet ex demonstratione propositionis.

Quamquam fatear hoc Theorema aliud non continere, quàm particularem casum propositionis prioris: tamen quia in libris sequentibus non semel vsui veniet, visus mihi sum operæ pretium facturus, si facilitatis causâ explicitè hîc apponerem.

Similiter hoc quoque Theorema eiusdem propositionis vniuersalis casus erit: si fuerint duæ quantitates, à quibus auferri semper possint non minora dimidio, sic vt ablata singula vnius, dupla perpetuò sint singulorum ex altera ablatorum, erit vna quantitas alterius dupla.

Quòd si ablata vnius, semper tripla fuerint ablatorum alterius, erit vna quantitas, alterius quadrupla. Atque ita in infinitum per proportiones quadruplam, quintuplam, &c. licebit procedere.

PROPOSITIO CXVII.

Q R

A G H I B C K L M D E N O P F

DAtæ sint tres magnitudines, aut plures A B, C D, E F & à singulis auferri possit non minùs dimidio, ita vt ablata A G, C K, E N sint in continua analogia Q ad R. Deinde à residuis auferri possit iterùm non minùs dimidio, ita vt ablata G H, K L, N O sint continuè proportionalia in ratione eadem Q ad R: & hoc semper fieri possit.

Dico propositas magnitudines A B, C D, E F esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVoniam A G est ad C K, ex hypothesi vt Q ad R; & G H ad K L, & H I ad L M, vt Q ad R, erunt partes ablatæ A G, C K, G H, K L; H I, L M, atque ita in infinitum inuicem proportionales: Quare cùm ex hypothesi etiam singulæ sint non b minores dimidijs suorum integrorum, erit A B ad C D, vt A G ad C K, hoc est ex datis vt Q ad R. Similiter ostendam C D esse ad E F, vt C K ad E N, hoc est ex datis vt Q ad R. erunt igitur A B, C D, E F, continuæ proportionales magnitudines. Quod erat demonstrandum.

b 116. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXVIII.

A GHI BC KLMD E NOPF Q R

PRopositæ sint tres, aut plures magnitudines A B, C D, E F, & ratio Q ad R quæcumque, minoris inæqualitatis: Auferantur à singulis A G, C K, E N, ita vt ablata A G, C K, E N, sint ad sua tota, in ratione Q ad R & in eadem ratione Q ad R inter se continuè proportionalia;

Dico si hoc semper fieri possit, propositas magnitudines A B, C D, E F esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVia ex hypothesi A G est ad A B, vt G H ad G B, erit etiam [a] reliquum G B [a 19. Quinti.] ad reliquum H B, vt tota A B ad totam G B; sunt igitur A B, G B, H B & eodem discursu etiam I B reliquæque in infinitum continuæ proportionales; vnde etiam [b] ablata A G, G H, H I, &c. sunt in continua analogiâ, & [c] terminus huius pro- [b 1. Huius.] gressionis A G, G H, &c. est B. similiter ostendam ablata C K, K L, L M, &c. esse [c 79. huius.] in continua analogia, cuius terminus sit D. & quoniam ex hypothesi A G est ad A B, vt Q ad R; & C K ad C D, vt Q ad R, erit A G ad A B vt C K ad C D; & inuertendo ac per conuersionem rationis A B ad G B, vt C D ad K D. Atqui A G, G H, H I, &c. sunt [d] continuæ proportionales in ratione A B, ad G B; hoc est [d 6. huius.] vt iam ostendi C D ad K D; & per eandem C K, K L, &c. sunt etiam continuæ in ratione C D ad K D: Igitur A G, G H, &c. C K, K L, &c. similium rationum series sunt. Quare A B est ad [e] C D, vt A G ad C K. simili prorsus discursu ostendam [e 14. huius.] C D esse ad E F vt C K ad E N. sunt autem ex datis A G, C K, E N, tres continuæ proportionales; ergo & A B, C D, E F in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXIX.

A——— F———
B——— G———
C——— H———
D——— I———
E——— K———

SI data quælibet proportio maioris inæqualitatis A ad B, continuetur perpetuò; deuenietur tandem ad magnitudinem datâ minorem.

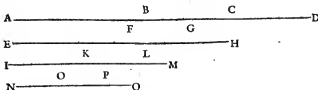
Demonstratio.

POnatur enim magnitudo quæuis F; & fiat F ad aliam G, vt B ad A; continueturque ratio F ad G, donec per septuagesimam septimam huius habeatur K magnitudo, maior A magnitudine; & per totidem terminos continuetur ratio A ad B. Dico E minorem esse quàm F. est enim vt A ad B, sic G ad F; & vt B ad C, sic H ad G, &c. ergo ex æquo in proportione perturbata, vt A ad E, sic K ad F, sed A minor est quàm K, ergo & E [f] quàm F. Quod erat demonstrandum. [f 14. Quinti.]

Scholion.

HVc etiam pertineret propositio septuagesima septima, nisi illam, quòd ad terminum progressionis inueniendum esset necessaria, coacti essemus citeriori loco collocare.

PROPOSITIO CXX.



SIt magnitudo aliqua A D, secta in tres partes A B, B C, C D : ablatâ mediâ B C vel alterutrâ extremarum, residuis A B, C D fiat æqualis E H, quæ diuidatur in tres partes E F, F G, G H in eadem ratione qua secta est A D : si hoc continuetur;

Dico relinqui tandem magnitudinem datâ minorem.

Demonstratio.

a 12. Quinti. QVoniam A B est ad B C, vt E F ad F G, & B C ad C D, vt F G ad G H : igitur permutando A B ad E F, vt B C ad F G, & C D ad G H : ergo a vt A B ad E F, sic A D, ad E H: & permutando A B ad A D, vt E F ad E H. similiter

b 24 Quinti. demonstrabimus D C esse ad D A, vt H G ad H E: ergo A B b cum C D, ad A D, vt E F cum G H ad E H: & inuertendo A D ad A B cum C D, id est ex hypothesi E H, vt E H ad E F cum G H, id est ex hypothesi I M. sunt igitur A D, E H, I M in continua ratione minoris inæqualitatis. non aliter demonstrabimus N Q, cæteraque residua in infinitum cum prioribus eandem proportionem minoris inæqualitatis continuare. Quare c relinquetur tandem magnitudo datâ minor. Quod erat demonstrandum.

c 119. Huius.

PROPOSITIO CXXI.



DAta sit A B magnitudo vtcumque secta in C, ac inter A B, C B media proportionalis ponatur D B; rursum inter D B, C B media sit E B, & hoc continuetur.

Dico ex A C relinqui tandem magnitudinem datâ minorem.

Demonstratio.

PEr primam huius; A D est ad D C vt A B ad D B; atqui A B maior est quàm D B, ergo etiam A D est maior quàm D C : ergo A D maior est quàm dimidia A C: Similiter quoniam D B, E B C B sunt continuæ, erit D E ad E C, vt D B ad E B: quare D E maior est quàm E C, ideoque & maior quàm dimidia D C. Eodem modo probabitur E F esse plus dimidio E C. atque ita in infinitum semper plus dimidio ab A C, eiusq; residuis auferetur. Quare d relinquetur tandem magnitudo datâ minor. Quod erat demonstrandum.

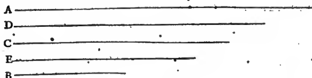
d 1. Decimi.

PRO-

PROPOSITIO CXXII.

Inter duas magnitudines inæquales A B, inueniatur media proportionalis C, & inter has tres A,C,B, inueniantur duæ mediæ D & E: rursum inter illas quinque, quatuor statuantur mediæ, & hoc semper fiat.

Dico hac praxi tandem exhibendas lineas quæ simul sumptæ maiores sint datâ quauis magnitudine.



Demonstratio.

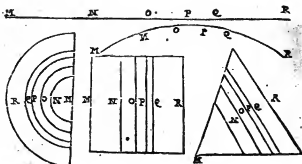
Quoniam C media est inter A & B, habebit A ad B maiorem rationem, quàm ad C; ergo C maior est quàm B; ergo tres magnitudines A,C, B maiores erunt quàm tripla ipsius B. Similiter ostendam D & E maiores esse singulas, quàm B: ac proinde A, D, C, E, B simul sumptas maiores esse, quàm quintupla ipsius B: atque ita demonstrabimus si plures semper mediæ reperiantur, summam magnitudinum, excessuram B magnitudinem determinatam, secundùm quemuis numerum assignabilem. ex quo liquet magnitudines illas simul sumptas, futuras quauis datâ quantitate maiores.



PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM PARS TERTIA

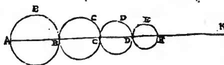
Progreßiones terminatas planis applicat, præsertim similibus.

QVæ de progreßionibus Geometricis secundâ parte hactenus demonstrauimus, absque vllo discrimine lineis, superficiebus, corporibusque conueniunt: hac enim de causa nomen magnitudinis, non lineæ perpetuò assumpsimus, vt propositionum vniuersalitas indicaretur. quia tamen superficierum corporumque similium similiterque positorum progreßiones, si extra inuicem in directum constituantur, singulares habent proprietates non paucas, visum est operæ pretium futurum illas hac tertiâ ac quartâ parte explicare.



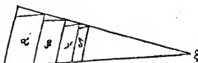
Nota, duplici modo planorum ac corporum progreßiones institui posse. primò quidem vt termini progreßionis simul sumpti, vnam magnitudinem continuam, ac homogeneam componant: vt in figuris appositis exhibetur. secundus enim terminus N O *cum primo* M N, *vnam magnitudinem* M O *componit; & tertius* O P, *cum secundo ac primo, constituit vnam magnitudinem* M P; *omnes denique termini simul sumpti vnam componunt magnitudinem* M R, *continuam ac homogeneam.*

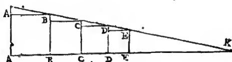
Secundus modus est quando termini progreßionis similes inter se sunt, similiterque positi, neque iuxta positionem qua dantur, constituunt simul sumpti vnam magnitudinem: huiusmodi progreßiones (quas quidem in sequentibus prosequemur) exhibent figuræ appositæ A,B, C,D, E,K: *in quibus termini omnes similes sunt similiterque positi, ac in directum constituti; ita vt neque secundus terminus* B C, *cum primo* A B, *neque tertius*



CD, *cum primo & secundo, neque cæteri subsequentes cum præcedentibus componant vnam*

vnam magnitudinem. & figuris sic positis terminum quidem ad quem bases illarum figurarum excurrent scilicet K, *per præcedentia reperiemus; in heterogeneæ verò illius seriei (ita enim lubet appellare) quam figuræ similes similiterq; & extra se positæ componunt, cognitionem non veniemus, nisi figuras has similes similiterque extra se positas, ad illas reuocando, quarum prima cum secunda, & secunda cum tertia, & sic deinceps vnam aliquam magnitudinem constituit. Vt si exempli gratia sint figuræ* A B, B C, C D *& similes similiterque & extra se inuicem posita; harum termini in infinitum continuatarũ sumpti magnitudinem non vnam aliquam, sed aggregatum quoddam figurarum constituent: si igitur magnitudo huic seriei figurarum æqualis quæratur, oportebit figuras similes* A B, B C, C D, D E, *&c. ad figuras* M N, N O, O P, *&c. reuocare. quæ figuræ* M N, N O, O P *magnitudinem vnam constituunt; & si proportio* M N *ad* N O, *&* N O *ad* O P *continuata terminetur in* R: *erit* M R *toti seriei progressionis figurarum* A B, B C *&c. æqualis; quæ omnia sequenti propositione demonstrata fient clariora.*

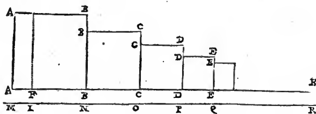




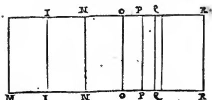
PROPOSITIO CXXIII.

Data igitur sit secundi generis progressio A B, B C, C D, D E, &c. conflata ex similibus terminis similiterq; & in directum positis, siue planis, siue solidis, & quidem planis vel solidis cuiuscumque generis.

Dico omnes progreſsionum proprietates superiori parte demonstratas huiusmodi etiam progreſsionibus conuenire, ac proinde propositiones, in quibus illæ proprietates demonstrantur, prorsus vniuersales esse: in hac igitur demonstratione, progressio posterior siue heterogenea, reducitur ad priorem siue homogeneam.



Demonstratio.



SIt enim primæ magnitudini A B, æqualis quæcumque alia MN: & vt A B ad B C, ita fit M N ad aliam N O, quæ cum M N, vnam magnitudinem continuam & homogeneam componat: continueturque ratio M N ad N O, in infinitum per plures semper terminos O P, P Q, &c. qui perpetuò cum præcedentibus terminis vnam magnitudinem componant. Quoniam igitur æquales sunt A B, MN, erit A B ad N O, vt MN ad N O: sed MN est ad N O, vt A B ad B C: ergo A B est ad NO, vt A B ad B C: æquales ergo sunt B C, N O: ergo B C est ad OP, vt N O ad OP: sed N O est ad O P, vt MN ad N O, id est vt A B ad B C, id est vt B C ad C D: ergo B C est ad N O, vt B C est ad C D: æquales ergo sunt C D, O P. similiter ostendam singulos vtriusque progressionis terminus inter se æquari in infinitū. Quare & series tota A B, &c. æqualis est toti seriei M N, &c vtpote constans æqualibus siue iisdem terminis: atqui quæcumque toto secundo libro demonstrata sunt de progressionum proprietatibus, conueniunt progressioni M N, NO, &c: ergo etiam conueniunt progressioni A B, B C, &c. Quod erat demonstrandum. Verùm vt res clariùs pateat, idipsum per aliquot consectaria seu corollaria explicabimus.

Corollarium primum.

EX his igitur (iisdem positis) infero primò: progressionem vniuersam magnitudinum A B, B C, &c. producere eandem determinatam magnitudinem seu quantitatem quam series M N, N O.

Demonstratio.

SEries enim A B, B C, &c. æqualis est seriei M N, N O, &c. ergo eandem producit quantitatem: atqui series M N constituit, finitam & determinatam quantitatem (exempli causa M R) ergo & series A B producit quantitatem finitam M R.

79. huius.

Corollarium secundum.

IIsdem positis infero secundò, series A K (id est omnes antecedentes) est ad seriem B K (id est omnes consequentes) vt A B antecedens ad B C vnam consequentem. Et series B K est ad seriem C K vt A B ad B C.

Et tres series A K, B K, C K, sunt in continua analogia, & similiter alia inferemus quæ prop. octuagesimâ secundâ habentur.

Demonstratio.

SIt M R æquale toti seriei MN, N O, &c. erit ergo & tota series, A B, B C, &c etiam, vt ostensum anteà, æqualis ipsi M R: cùm igitur & A B æqualis sit MN, erit quoque series B C, C D, &c. æqualis ipsi N R. Igitur series A K est ad seriem B K vt M R ad N R: Atqui M R [b] est ad N R vt M N ad N O. ergo series A K est ad seriem

b 81. huius.

riem

riem B K vt M N ad N R, id eſt vt A B ad B C. quod erat primum. Similiter reliqua quoque demonſtrabimus.

Corollarium tertium.

Iiſdem poſitis infero tertiò; A F differentia primi & ſecundi termini, A B primus terminus, tota ſeries A K, ſunt in continua analogia.

Et A F differentia, eſt ad A B primum terminum, vt B C ſecundus terminus ad totam ſeriem dempto primo termino nempe ad ſeriem B K: & A F differentia, B C ſecundus terminus, tota ſeries demptis duobus primis terminis, (ſeries nempè C K,) ſunt in continua analogia.

Demonſtratio.

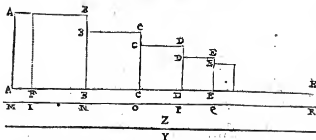
Sit M I differentia primi & ſecundi termini, in progreſſione M R, quoniam igitur A B, M N, B C, N O, æquantur, exceſſus quoque A F, M I, æquales erunt: & quia iam A F ipſi M I, & A B ipſi M N, æqualis eſt, ipſis A F, A B eadem magnitudo erit tertia proportionalis, quæ ipſis M S, M N, vt patet ex elementis: atqui ipſis a M I, M N, tertia proportionalis M R: eſt tota ſeries rationis M N ad N O; ergo ipſis etiam A F, A B eadem tota ſeries M R, tertia proportionalis erit: atqui ſeries A B, B C, per corollarium primum, eandem producit magnitudinem M R, quàm ſeries M N, N O, ergo etiam productum ſeriei A B, B C, &c. ſiue tota ſeries A K, erit tertia proportionalis ipſis A F, A B: ſunt itaque A F differentia, A B primus terminus, tota ſeries A K in continua analogia. Quod erat primum. Similiter reliquas corollarij partes demonſtrabimus. a 83 huius.

Corollarium quartum.

Iiſdem poſitis infero quartò, hic etiam valere vniuerſalem illam ac triplicem conſtructionem quâ propoſitione datæ ſeriei magnitudinem æqualem inuenimus.

Fiat enim vt A F differentia primorum terminorum ad A B, ſic A B ad aliam magnitudinem Z. Dico, Z æqualem eſſe toti ſimilium magnitudinum ſeriei A K.

Demonſtratio.

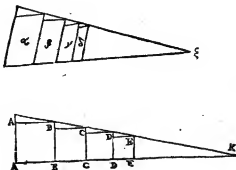


Si non eſt Z æqualis toti ſeriei, ergo alia magnitudo maior vel minor quàm Z ipſi æqualis erit; (aliqua enim magnitudo per Corollarium primum toti ſeriei A K æqualis eſt.) ſit illa Y. ergo per corollarium præcedens A F, A B, Y, ſunt continuæ. atqui etiam ex conſtructione A F, A B, Z ſunt continuæ, ergo A B eſt ad Z, vt A F eſt ad A B: & A B eſt ad Y, vt A F eſt ad A B. eandem igitur A B ad Z & Y rationem habet: æquales igitur ſunt Z & Y contra hypotheſim: ponebatur enim Y maior aut minor quàm Z. non erit ergo alia minor maiorue quam Z, æqualis ſeriei A K. ergo Z æqualis erit. ſimiliter duas alias propoſitionis octuageſimę huius conſtructiones demonſtrabimus.

Corol-

Corollarium quintum.

IIſdem poſitis infero quintò: ſi fuerit progreſſio A B, &c. ſimilium magnitudinum itemque alia progreſſio ſimilium inter ſe magnitudinum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ſiue ſimiles illæ ſint terminis alterius ſiue diſsimiles: ſit autem progreſſio vtraque eiuſdem proportionis: infero inquam totas ſeries AK, $\alpha\xi$ eam habere rationem inter ſe, quam primi termini A B & α.



Demonſtratio.

PEr corollarium ſecundum ſeries AK, eſt ad ſeriem BK, vt AB ad BC: ſed ex hypotheſi A B eſt ad B C, vt α ad β; ergo ſeries AK eſt ad ſeriem BK, vt α ad β, hoc eſt per idem corollarium vt ſeries $\alpha\xi$ ad ſeriem $\beta\xi$. Igitur per conuerſionem rationis ſeries AK eſt ad A B, vt ſeries $\alpha\xi$, ad α: & permutando ſeries AK eſt ad ſeriem $\alpha\xi$ vt AB ad α. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium ſextum.

ET quamquam hactenus ſolùm aſſumpſerimus progreſsionem planorum, corporúmve ſimilium ſimiliterque poſitorum, non eſt tamen quod exiſtimet lector, quę hactenus demonſtrata ſunt non ſubſiſtere, ſi planorum aut corporum non ſimilium ſtatuatur progreſsio, eadem quippe vtrobique, vt cuilibet rem expendenti manifeſtum eſt, & veritas eſt & veritatis demonſtratio. ideirco autem figuras ſimiles aſſumere placuit, quòd & vſus earum frequentior, & magis ſint ad demonſtrandum accommodatæ.

Ex his hunc in modum demonſtratis manifeſtum eſt progreſsionum proprietates, ſecunda parte explicatas progreſsionibus magnitudinum in directum poſitarum, quas deinceps proſequemur, non minùs quàm alijs conuenire: ac proinde propoſitiones ſuperioris partis in quibus illę tractantur, prorſus vniuerſales eſſe. Quare has deinceps vti re uera tales in ſequentium theorematum demonſtrationibus citabimus.

PROPOSITIO CXXIV.

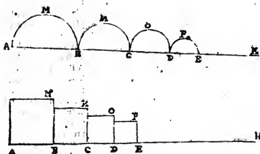
DAtæ ſint proportionales continuæ A B, B C, C D, &c. & ſuper ijs conſtructa plana ſimilia.

Dico plana eſſe in continua analogia: & ſi plana dentur continuè proportionalia:

Dico etiam baſes fore continuè proportionales.

Demon-

Demonstratio.



PLanum AM est ad planum BN, in duplicata ratione AB ad BC; & planum BN est ad planũ CO, in duplicata ratione BC ad CD, id est ex datis AB ad BC: similiter planum CO est ad planũ DP, in duplicata ratione CD ad DE, id est rursũ AB ad BC: similiter ostendam omnia reliqua inter se esse in duplicata ratione AB ad BC: manifestum est igitur omnia esse in continua analogia: Quod erat primum. secunda pars simili planè discursu ostendetur; patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO CXXV.

EAdem positâ figurâ data sint duo plana similia, basibus homologis indirectum positis, AM maius, BN, minus. Petitur inueniri terminus longitudinis, ad quem proportio dictorum planorum sine statu continuata excurret.

Constructio & demonstratio.

PEr octuagesimã huius inueniatur progressionis basium AB, BC terminus; sitq; K. Dico etiam K terminum esse longitudinis ad quem series planorum excurret: plana enim similia quæ fient super terminis progressionis basium, per præcedentem erunt continuè proportionalia, ac proinde linearum planorumq; in infinitum progressio, pari passu procedent: quare vtriusque terminus erit K. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

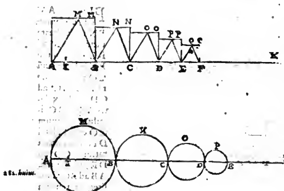
IDem igitur punctum, terminus est progressionis basium; & terminus longitudinis, quem habet series figurarum similium: siue, quod idem est, linea quæ æqualis est seriei basium, est longitudo seriei figurarum similium, super basibus descriptarum.

PROPOSITIO CXXVI.

DAta sit planorum similium continuè proportionalium series, homologis basibus AB, BC, CD, &c. in directum positis, habens terminum longitudinis punctum K;

Dico, totam planorum seriem MK esse ad primum terminum AM, vt est tota series basium imparium AB, CD, EF, &c. ad primam AB.

Demonstratio.



PEr octuagesimam secundam huius, tota planorum series MK est ad seriem NK, vt planum AM ad planũ BN: atqui cùm plana sint similia, duplicatam habent rationẽ basium AB, BC: ergo series MK ad seriem NK duplicatam habet rationem AB ad BC: quia autem per corollarium proposit. præcedentis, progressionis basium AB, BC, &c. terminus est K, erunt igitur AK, BK, CK tres cõtinuæ proportionales. vnde ratio AK ad CK, duplicata est rationis AK ad BK, idest rationis AB ad BC: ergo series MK est ad seriem NK, vt AK ad CK: quare per conuersionem rationis series MK, est ad planum AM, vt AK ad CA: deinde quia series AB, BC, CD, DE, &c. id est linea AK, est ad seriem AB, CD, &c. vt CA ad BA, erit alternando AK ad CA, vt series AB, CD, &c. ad AB: sed series planorum MK, est ad planum AM vt AK ad CA, ergo series MK est ad planum AM, vt series AB, CD, &c. ad AB. Quod erat demonstrandum.

a 82. huius.
b 1. huius.
c 103. huius.

Manifestum.

EX demonstrationis discursu patet totam planorum seriem esse ad primum planum, vt KA ad CA. Quod quia posteà vsui veniet, sigillatim notare placuit.

PROPOSITIO CXXVII.

IIsdem positis sit AI differentia primæ AB, & tertiæ CD.

Dico totam similium planorum seriem esse ad primum planum AM, vt AB prima basis, ad AI primæ & tertiæ differentiam.

Demonstratio.

d 79. huius. Fiat lineis AI, AB tertia ST continuè proportionalis. Igitur ST æqualis est toti seriei basium imparium AB, CD, EF, &c. ergo per præcedentem tota series planorum MK est ad planum AM vt ST ad AB: Atqui ex constructione AB est ad AI, vt ST ad AB; ergo tota series est ad planum AM, vt AB ad AI. Quod erat demonstrandum.

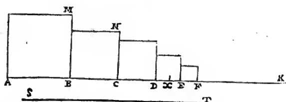
PROPOSITIO CXXVIII.

EAdem manente figurâ, data sit quadratorum series basibus in directum positis, terminum habens longitudinis, punctum K: fiat autem per octuagesimã huius ST, æqualis seriei basium imparium AB, CD, &c.

Dico rectangulum super ST in altitudine AB æquari toti seriei quadratorum MK.

Demon-

Demonstratio.



PEr propositionem centesimam vigesimam sextam huius, tota series quadratorum MK, est ad primum quadratum AM, vt ST ad AB; atqui rectangulum super ST in altitudine AB, est ad quadratum AM, vt [a] ST ad AB; ergo series quadratorum MK est ad quadratum AM, vt rectangulum STAB ad quadratum AM: æqualia sunt igitur rectangulum, & tota series. Quod erat demonstrandum. [a 1. sexti.]

Corollarium.

HInc sequitur quadratum ST, totam seriem MK, & quadratum AM in continuâ esse analogia: nam quadratum ST ad rectangulum super ST & AB, est vt ST linea ad AB lineam: sed rectangulum idem, hoc est tota series MK, est ad AM quadratum in eadem ratione: ergo, &c.

PROPOSITIO CXXIX.

IIsdem positis vt AB ad BC, sic fiat AX ad XK.
Dico rectangulum XAB, toti quadratorum seriei æquale esse.

Demonstratio.

QVia AX est ad XK, vt AB ad BC, erit inuertendo ac componendo, KA ad XA, vt CA ad BA: Atqui etiam KA [b] est ad seriem linearum AB, CD, vt CA ad BA; ergo KA eandem habet rationem ad XA, & ad seriem AB, CD, æquales sunt igitur series AB, CD & linea XA. vnde per præcedentem rectangulum XAB, toti quadratorum seriei est æquale. Quod erat demonstrandum. [b 103. huius.]

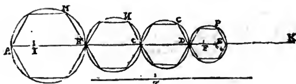
Corollarium.

EX duabus propositionibus colligere modum licet, quo quadratorum datæ seriei repetiri possit quadratum vnum æquale. nimirum si inter AB & ST, vel inter AB, &c. AX, media fiat proportionalis; erit hæc latus quadrati æqualis, toti seriei vt patet ex duobus iam demonstratis theorematibus: Verùm luculentius & vniuersalius hoc Theorema sequenti propositione construemus.

PROPOSITIO CXXX.

DAta sit series planorum quorumcumque basibus in directum AB, BC, CD, &c. positis, ac terminum habens longitudinis punctum K, petitur planis seriei vniuersæ planum æquale ac simile exhiberi.

Constructio ac demonstratio prima.



Fiat vt AC ad AK, sic primum seriei planum AM, ad aliud simile cuius diameter vel basis sit Z. Dico hoc toti seriei æquale esse.

Per manifestum propositionis 126. huius, tota planorum series MK, est ad planum AM, vt AK ad AC, id est ex constructione vt planum Z, ad AM planum: ergo planum Z est ad planum AM, vt tota series MK, ad idem planum AM. æquantur igitur inter se planum Z, & tota series MK. Cùm itaque etiam simile sit ex constructione planum Z, planis seriei datæ MK, perfecimus quod in problemate petebatur.

Constructio & demonstratio secunda.

SVmatur AI primæ AB. ac tertiæ CD, basium differentia: fiatque vt AI ad AB, sic primum seriei planum AM, ad aliud sibi simile Z:

Dico Z planum satisfacere problemati. Nam tota series MK est ad planum AM
a 127. huius. vt a AB ad AI: Atqui ex constructione etiam planum Z est ad idem planum AM, vt AB ad AI; ergo planum Z, & tota series æqualia sunt. Inuenimus igitur datæ planorum similium seriei, planum æquale ac simile. Quod erat demonstrandum.

Constructio ac demonstratio tertia.

Fiat vt AB ad seriem basium imparium AB, CD, &c. sic primum planum ad aliud simile Z.

Dico hoc seriei planorum datæ æquari. vel (quod idem est) Fiat vt AB ad BC, sic AF ad FK, vtque AB est ad AF, sic planum primum fiat ad aliud simile.

Dico etiam hoc conficere problema: demonstratio eadem est quæ primæ ac secundæ constructionis, ea tantùm differentia, quod propositio 126. huius, sit adhibenda. Dixi autem secundum huius tertiæ constructionis modum coincidere cum primo, eiusdem constructionis tertiæ, quod ex præcedenti manifestum fit, FA æqualem esse seriei basium imparium.

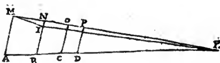
Scholion.

ADuerte constructionem illam triplicem propositionis octuagesima huius, cùm vniuersalis sit, huic etiam seriei conuenire: verùm quia in progressionibus huius generis, faciliores subinde ac magis expedita constructiones suppetunt, visum est operæ pretium, illas tum hoc loco, tum alijs etiam deinceps in medium proferre.

Lemma.

Lemma.

Esto linearum AB, BC, CD progressio terminata in K, & ex punctis A, B, C, &c. erigantur parallelę AM, BN, CO, &c. quæ proportionales sint ipsis AB, BC, CD, &c. ducaturq; ex puncto M ad terminum progressionis K, linea MK. Dico hanc per omnium parallelarum extremitates, N, O, P, &c. transire.



Demonstratio.

COnsideremus primò lineam BN; si ergo MK non transit per N, secabit lineam BN supra aut infra N, in I. erit ergo MIK vna recta. Et quoniam progressionis AB, BC, &c. terminus est K per 82. huius, erit vt AK ad BK sic AB ad BC, hoc est, ex datis AM ad BN: atqui etiam vt AK est ad BK, sic AM ad BI; ergo AM est ad BN, vt AM ad BI maiorem aut minorem quàm BN, quod est impossibile. Non ergo secabit MK ipsam BN supra aut infra N; ergò in N: similiter ostendemus rectam NK (hoc est rectam MNK. ostendimus enim modò puncto MNK esse in vna recta) transire per O. & sic de ceteris in infinitum: Patet igitur veritas lemmatis.

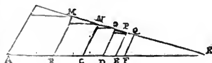
PROPOSITIO CXXXI.

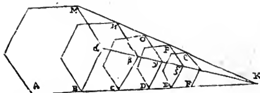
Esto planorum rectilineorum similium similiterque positorum series MK, basibus indirectum collocatis, terminum habens longitudinis punctum K. Ex vertice autem M, ad K ducatur recta MK.

Dico hanc per omnes omnium angulorum totius seriei vertices N, O, P, Q; &c. transire: siue totam planorum seriem angulo AKM inscriptam esse.

Demonstratio.

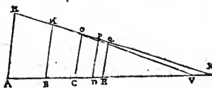
DAta sit primùm series figurarum trium quatuorúe laterum. Cùm igitur ex hypothesi planorum series terminetur in K; basium quoque progressionis terminus erit K per 124. huius: & quoniam plana AM, BN, &c. similia sunt, similiterq; posita, ex elementis patet latera BM, CN, DO, &c. inter se parallela esse, ipsisque AB, BC, &c. proportionalia. ergo per lemma præcedens MK transit per omnes vertices N, O, P, Q. &c. Quod erat demonstrandum.





Sint iam plurium laterum figuræ quarum series terminetur in K. Quoniam igitur plana AM, BN, &c. similia sunt similiterque posita, erunt Bα, Cβ, Dγ, Eξ, parallelæ inter se, ipsisque AB, BC proportionales. quare per lemma præcedens puncta α, β, γ, &c. cum puncto K sunt in vnâ eademque linea αK. quę cùm similiter diuisa sit, ac linea BK, manifestum est progressionem linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, &c. terminari quoque in K. Sunt autem ex punctis α, β, γ, &c. erecta parallela latera αM βN, γO, &c. quæ lateribus BC, CD, DE, hoc est ipsis $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\xi$, sunt proportionalia (quæ omnia patent ex eo quod AM, BN, CO, &c. similia plana sint similiterque posita) ergo per lemma, linea MK transit per omnia puncta M, N, O, P, Q, &c. Quod erat demonstrandum.

Lemma.



Esto linearum AB, BC, CD, &c. progreſsio terminata in K. & ex punctis A, B, C, &c. erigantur AM, BN, CO, DP, &c. inter se parallelæ, & proportionales ipsis AB, BC, CD, &c. assumptisque duabus lineis AM, CO, per M & O ducatur recta MO.

Dico hanc productam incidere in K ac per omnium reliquarum extremitates transire.

Demonstratio.

SI enim ita non sit; igitur MO producta, eis vel vltra K in B concurret cum linea AK; & quoniam progreſsionis AB, BC, CD terminus est K, erunt AK, BK, [a] CK, DK, EK proportionales continuæ. quare etiam AK, CK, EK ex æquo sunt continuæ. vnde [b] vt AK ad CK, sic AC ad CE. Atqui [c] AC est ad CE, in duplicata rationis AB ad BC, id est ex hypothesi rationis AM ad BN; ergo AK est ad CK, in duplicata rationis AM ad BN: sed & ratio AM ad CO (vt ex datis colligitur) duplicata est rationis AM ad BN, ergo AM est ad CO, hoc est MOV ad OV, vt AK ad CK; quod est impoſsibile: non igitur occurret MO ipsi AK cis vel vltra K. Quod erat primum. hoc autem sic demonstrato, patet secunda pars ex lemmate propositionis præcedentis. Quæ erant demonstranda.

a 81. huius. b 1. huius. c 106. huius.

PROPOSITIO CXXXII.

ESto planorum rectilineorum similium similiterque positorum series MK, vti priùs, & terminus sit K, per quorumlibet autem duorum planorum AM, CO vertices ducatur recta MO.

Dico hanc productam cadere in terminum K ac per omnium reliquorum

quorum vertices N, P, Q, &c. transire, siue totam planorum seriem angulo AKM inscriptam esse.

Demonstratio.

Discursus demonstrationis planè idem erit qui propositionis præcedentis. Nam quemadmodum illic per lemma illi propositioni appositum demonstrauimus propositum, ita hic per lemmatis proximi applicationem propositionis veritatem concludemus.

Lemma.

A α B β C γ D E K

Sint AK, BK, CK, DK, &c. in continua analogia, & differentiæ illarum nempè AB, BC, CD, DE, &c. bisectæ sint in α, β, γ, &c. Dico etiam αK, βK, γK, &c. esse continuas.

Demonstratio.

Quia AK, BK, CK, &c. sunt continuæ per primam huius, AB est ad BC, hoc est Aα est ad Bβ, vt AK ad BK. cùm ergo ablatum Aα sit ad ablatum Bβ vt totum AK ad totum BK, erit & reliquum αK ad reliquum βK, vt totum AK ad totum BK. similiter ostendemus βK esse ad γK vt BK est ad CK, hoc est ex hypothesi vt AK ad BK, hoc est ex demonstratis vt αK ad βK. Sunt igitur αK, βK, γK continuæ. Quod erat demonstrandum.

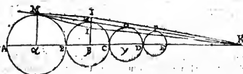
PROPOSITIO CXXXIII.

Esto circulorum progressio diametris in directum positis, terminum habens longitudinis punctum K: & ex K ducta linea KM tangat quemuis datæ seriei circulum, verbi gratia circulum AMB.

Dico lineam KM totam circulorum seriem contingere.

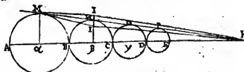
Demonstratio.

Ex centro α ad contactum ducatur αM linea, cui ex centro β parallela sit βX secans circulum BNC in N. Recta igitur MK occurrit ipsi βX vel in puncto N, vel supra aut infra N in I. non autem supra aut infra posse occurrere, sic demonstro.



occurrat enim, si fieri potest, supra vel infra N in I. quoniam igitur dantur circuli in continua analogia, etiam per 124. huius AB, BC, CD, &c. sunt continuæ: ergo AB est ad BC, vt BC ad CD, hoc est vt Bβ ad Cγ: sed & AB est ad BC, vt αβ ad βC: ergo vt AB est ad BC, sic αβ est ad βγ. Præterea quoniam K terminus est progressionis basium AB, BC, &c. per corollarium 125. huius, erunt per 82. huius continuæ proportionales AK, BK, CK, DK, quare per lemma etiam αK, βK, γK erunt continuæ. ergo per primam huius vt αK ad βK, sic est αβ ad βγ. hoc est sicut antè ostendimus AB ad BC; hoc est αM ad βN. Atqui etiam est vt α K ad βK, sic αM ad βI: sunt enim

ex



ex constructione lineæ αM, βI parallelæ; ergo αM est ad βI, vt αM ad BN maiorem aut minorem quàm BI. quod est absurdum. Nō igitur recta MK occurret rectæ βI supra vel infra N: ergo in N. Quoniam autem ex centro ad contactum ducta est αM angulus KMα a rectus est; quare cùm ex constructione βN parallela sit αM, angulus quoque KNβ rectus erit: ergo b linea KM tangit circulum BNC. simili ratiocinatione demonstrabimus KM reliquos etiam omnes circulos contingere. Quod erat demonstrandum.

a 17 quinti.
b 16. tertij.

Corollarium.

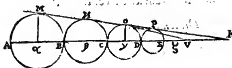
QVod in hoc Theor. de circulis demonstrauimus, etiam de similibus Ellipsibus, Parabolis, Hyperbolis demonstrari potest.

PROPOSITIO CXXXIV.

IIsdem positis duos quoscumque circulos serici datæ circulos, verbi gratia AMB, COD tangat recta MO.

Dico hanc productam cadere in terminum longitudinis K, & reliquos circulos omnes contingere.

Demonstratio.



CEntra circulorum sint $\alpha, \beta, \gamma, \xi$, &c. tum ex α ac γ ad contactus ducantur αM, γO. si igitur negetur assertio, tangens MO producta occurret lineæ AK cis vel vltra K in V. & quoniam per corollarium propositionis 125. huius terminus progressionis basium est in K, erunt c AK, BK, CK, DK, EK, &c. ac proinde per lemma propositionis præcedentis etiam αK, βK, γK, in continua analogia. Quare patet ex æquo etiam αK, γK, ξK esse continuas; ergo αK est d ad γK, vt $\alpha\gamma$ ad $\gamma\xi$. Atqui $\alpha\gamma$ est ad $\gamma\xi$, vt AC ad CE (quod simili modo ostendemus quo in præcedenti ostendimus AB esse ad BC vt αB ad Bγ) & AC est ad CE in e duplicata rationis AB ad BC, id est vt AB ad CD; & AB est ad CD vt αM ad γO, ergo αK est ad γK, vt αM ad γO. Deinde cùm αM, γO ex centris ad contactus ductæ sint, erunt perpendiculares ad MV, ideòque parallelæ inter se. Quare MV erit ad OV, vt αM ad γO, hoc est per iam demonstrata vt αK ad γK, quod est absurdum. non igitur MO occurret ipsi AK cis vel vltra K, sed in K. Quod erat primum. Quo demonstrato, patet per præcedentem secunda pars, quæ erant demonstranda.

c 81. huius.
d 1. huius.
e 106. huius.

Quòd si loco circuli COD assumatur circulus BNC, ita vt linea duos vicinos circulos contingat, demonstratio longè erit facilior, quam proinde omisimus.

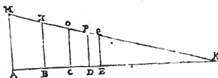
Corol-

Corollarium.

HOc quoque Theorema non tantùm circulis, sed etiam alijs similibus sectionibus applicari potest.

PROPOSITIO CXXXV.

LInearum AB, BC, CD, &c. progressio terminetur in K: erectâq; ad quemuis angulum rectâ AM, ducatur MK: Deinde ex singulis punctis in progressione AK repertis, ad AM, parallelæ erigantur BN, CO, DP, atque ita semper.



Dico ex triangulo AMK relinquendum tandem triangulum aliquod quauis data superficie minus.

Demonstratio.

QVoniam similia sunt triangula AMK, BNK, COK, &c. erit duplicata eorum proportio, proportionis laterum AK, BK, CK, &c. quia autem progressionis AB, BC terminus est K, erunt [a] AK, BK, CK, &c. continuæ proportionales. vndè similia triangula AMK, BNK, &c. etiam sunt in ratione continuâ & diuidendo trapezium AMNB ad triangulũ BNK, vt trapezium BNOC ad triangulum COK, & trapezium CP ad triangulum DPK: atque ita semper. Igitur [b] relinquetur tandem triangulum dato minus. Quod erat demonstrandum.

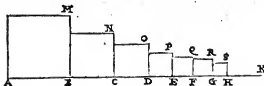
[a] 81. huius.
[b] 78. huius.

PROPOSITIO CXXXVI.

ESto planorum series lateribus homologis indirectum constitutis, terminus autem longitudinis sit K.

Dico ex ablatione continuata planorum AM, BN, CO, &c. relinqui residuum seriei, quouis dato plano minus.

Demonstratio.

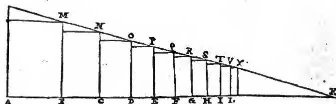


PEr octuagesimam secundam huius, AM est ad reliquam seriem planorum NK, vt planum BN est ad reliquam seriem OK: & per eandem planum BN est ad reliquam seriem OK, vt planum CO, est ad seriem reliquam PK: Atque ita in infinitum. ergo ex perpetua planorum AM, BN, &c. ablatione residuum seriei propositę [c] erit tandem quouis dato plano minus. Quod erat demonstrandum.

[c] 78. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

DEtur series planorum similium, homologis basibus in directum collocatis, terminum habens longitudinis punctum K: sumpro autem quouis plano CO, numerentur alia plana in infinitum EQ, GS, IV, &c. totidem semper intermissis quot inter planum CO & primum seriei planum AM intercedunt. Petuntur omnia plana AM, CO, EQ, GS, &c. ex proposita serie auferri.



Constructio & demonstratio.

QVoniam ex hypothesi plana AM, BN, CO, DP, EQ, FR, GS, sunt in continua ratione, etiam ex æquo plana AM, CO, EQ, IV, in continua sunt analogia. igitur per propositionem 126. huius, seriei planorum continuè proportionalium AM, CO, EQ, &c. inueniatur planum æquale. hoc si aufers ex plano, quod per eandem propositionem 126. factum fuerit æquale seriei datæ MK, habebitur propositum.

PROPOSITIO CXXXVIII.

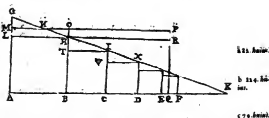
DEtur progressio quadratorum habens bases in directum, & terminum longitudinis K: & ex K per H ducatur recta KH, quæ per propositionem 131. huius contingat omnia seriei quadrata & concurrat cum AL in G.

Dico triangulum AGK, toti trapeziorum GB, HC, ID, &c. siue vtrique quadratorum AH, BI, &c. ac triangulorum LGH, THI, &c. progressioni, æquale esse.

Demon-

Demonstratio.

PEr corollarium propositionis 125. huius series basium AB, BC, CD terminatur in K: vnde AK, [a]BK, CK; &c. sunt continuæ proportionales,& triangula [b] AGK, BHK, CIK, &c.in cōtinua sunt analogia. Quare toti seriei proportionis quam habet trapezium GB ad trapezium HC, sine statu continuatę, triangulum AGK æquale est. Atqui trapezia ID, XE, &c.continuant rationem trapezij GB, ad trapezium HC; (cūm enim triangula AGK, BHK, CIK, &c. sint continuè proportionalia,eorum quoque differentiæ nempè dicta trapezia erunt continua) ergo triangulum AGK, trapeziorum seriei vniuersæ est æquale: Quod erat demonstrandum.

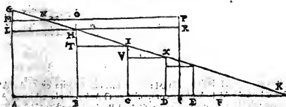


a 22. huius.
b 124. huius.
c 79. huius.

PROPOSITIO CXXXIX.

ESto quadratorum series HK, bases habens in directum,& terminum longitudinis K: & ex K per H ducta recta KH tangat per propositionem 131.huius omnia seriei quadrata,ac concurrat cum AL in G; inuentâ deinde per propos.80.huius lineâ AQ,quæ æqualis sit seriei basium impariū AB,CD,EF,diuisâq; bifariam LG in M,fiat rectangulū QAMP: Dico hoc triangulo AGK, æquale esse.

Demonstratio.



PRoducatur LH in R,& BH in O; linea MNO parallela est ex datis ad AQ,quę æquidistat LH: ergo MNO parallela est ad LH. & quia GM æqualis est ML; etiam GN æqualis erit NH; sunt autem & OH, ML, id est MG æquales,& anguli OHN, MGN, æquales: ergo æquantur triangula MGN, NOH: additoque communi LMNH,triangulum LGH, rectangulo LO æquale est: quare quadratum AH est ad triangulum LGH, vt idem quadratum; ad rectangulum LO; hoc [d] est vt linea AL ad lineam LM. Præterea triangula LGH, THI, VIX, similia sunt; & homologa latera LH, TI, VX; adeoque in duplicata [e] ratione laterum LH, TI, VX, &c: igitur cūm quadrata AH, BI, &c. sint in eorundem laterum duplicata ratione, patet triangula dicta, quadratis proportionalia esse,vnde permutando vt quadratum AH ad triangulum LGH, sic quadratum BI ad triangulum THI, & quadratum CX, ad triangulum VIX: atque ita in infinitum. Ergo vt quadratum AH ad triangulum LGH, hoc est ex antè demonstratis vt AL ad

d 1. Sexti.
e 19. Sexti.

 LM,

a 12. quinti. L M, [a] sic omnia quadrata, ad omnia triangula. Atqui vt AL ad LM sic etiam est rectangulum A R ad rectangulum L P. Igitur vt omnia quadrata, ad omnia triangula, sic rectangulum A R ad rectangulum L P. Atqui rectangulum A R, æquale est toti [b] quadratorum seriei, (est enim A Q æqualis seriei basium imparium A B, CD, &c. & AL, A B) ergo cùm series quadratorum ostensa sit æqualis esse rectangulo A R; etiam tota triangulorum series rectangulo L P [c] æqualis erit. quare totum rectangulum A P, vtrique seriei quadratorum ac triangulorum, hoc est seriei trapeziorum G B, H C, I D, &c. æquabitur: sed trapeziorum series, [d] constituit triangulum A G K. ergo rectangulum A P triangulo A G K æquale est. Quod erat demonstrandum.

b 79. huius

c 14. quinti.

d 138. huius.

Corollarium.

EX discursu demonstrationis colligitur, rectangulum M L R P, progressioni triangulorum G L H, H T I, &c. esse æquale: rectangulum verò G L R, duplum esse eiusdem triangulorum progressionis.

PROPOSITIO CXL.

ESto, vt priùs, quadratorum series HK, inscripta triangulo A G K; sitque A Q æqualis seriei basium imparium A B, C D, &c.

Dico rectangulum sub A Q, & lineis G A, A B, tamquam vna contentum, rectangulo G A K æquale esse.

Demonstratio.

DIuidatur enim L G bifariam in M: igitur linea composita ex G A, A B, bis continet lineas L M, L A. quare composita ex G A, A B dupla est lineæ A M ergo rectangulum sub A Q & composita ex G A, A B, duplum est [e] rectanguli sub A Q & A M. Atqui per rectangulum sub A Q & AM, æquatur [f] triangulo A G K: ergo rectangulum sub A Q & G A, A B tanquam vna linea, duplum est trianguli A G K. Quare cùm & rectangulum G A K, eiusdem trianguli G A K sit duplum, æquabuntur inter se, rectangulum sub A Q & composita ex G A, A B, & rectangulum G A K. Quod erat demonstrandum.

e 1. sexti.

f 139. huius.

Lemma.

LAtus A K trianguli A F K, sit diuisum per lineas lateri A F parallelas, in continuè proportionales A K, B K, C K, &c.

Dico trapezia F B, G C, H D, &c. esse similia.

Demonstratio.

OB linearum AF, BG, CH æquidistantiam, angulus FAB, angulo GBC & GFA, angulo HGB, & BGF, angulo CHG, & ABG, angulo BCH, æqualis est. Deinde quia AK, BK, CK, &c. sunt continuæ proportionales, erit AB ad BC, [a] & BC ad CD, vt AK ad BK. Cùm igitur etiam FA sit ad GB, vt AK ad BK, erit FA ad GB, vt AB ad BC, & permutando FA ad AB, vt GB ad BC: similiter cùm AB sit ad BC [b] vt AK ad BK, hoc est ex hypothesi, vt BK ad CK, hoc est vt BG ad HC; erit permutando AB ad BG, vt BC ad CH: non aliter etiam ostendemus BG esse ad GF, vt CH ad HG, & GF ad FA, vt HG ad GB. quare cum trapeziorum FB, GC & anguli omnes sint æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia, Trapezia [c] FB, GC & omnia reliqua, erunt similia. Quod erat demonstrandum. a 1. huius. b Ibid. c Def. 1. sexti.

PROPOSITIO CXLI.

DAta sit quadratorum series, habens bases indirectum, & terminum longitudinis K, inscripta triangulo AGK; ac primi quadrati latere LM bisecto in F, per F ducatur recta FK, occurrens ipsi AG in I.

Dico triangulum AIK seriei quadratorum; triangulum verò IGK, seriei triangulorum LGM, TMN, &c. æquale esse.

Demonstratio.

CVm LM bisecta sit in F, & SM, IL ex hypothesi sint parallelæ, patet triangula IFL, SFM æqualia esse, ac proinde addito communi ALFSB, trapezium AISB quadrato AM æquale. Deinde cum per corollarium propositionis 125. huius, progressionis basium AB, BC terminus sit K, erunt [d] AK, BK, &c. continuæ: quare cùm etiam AI, BS, CX, &c. sint parallelę, erunt per lemma, trapezia IB, SC, XD, &c. similia inter se. vnde & [e] trapezia IB, SC, XD, &c. sunt in duplicata ratione laterum homologorum AB, BC, CD, &c. atqui & quadrata AM, BN, CO, &c. sunt in dictorum laterum duplicata ratione, ergo trapezia sunt quadratis proportionalia, & vt primum [f] trapezium IB, ad primum quadratum, ita tota trapeziorum series, ad quadratorum seriem. Atqui primum trapezium, ostendimus primo quadrato æquale esse, ergo trapeziorum etiam & quadratorum series æquales sunt. Deinde series trapeziorum [g] GB, MC, ND, constituit triangulum AGK, ergo & series trapeziorum IB, SC, triangulo AIK æqualis erit; Quare triangulum AIK, quadratorum seriei æquabitur: Quod erat primum; ex quo etiam patet secundum. quæ erant demonstranda. d 2. huius. e 20. sexti. f 12. sexti. g 118. huius.

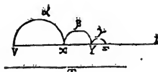
PROPOSITIO CXLII.

DAta sit planorum similium series habens bases homologas in directum, & terminum longitudinis punctum K; sitque seriei rationis AB primæ, ad tertiam CD, æqualis linea VI: linea verò T seriei rationis AB primæ, ad EF quintam sit æqualis;

Dico feriem totam planorum AM, BN, CO, DP, &c. effe ad feriem planorum imparium AM, CO, EQ, &c. vt linea VI eft ad lineam T.

Demonſtratio.





Series bafium imparium AB, CD, EF, &c. conftituatur feparatim, vt VX ipfi AB, & XY ipfi CD, & YZ ipfi EF fit æqualis: itemque plana fuper his facta planis AM, CO, EQ, æqualia fint, & fimilia. patet igitur feries rationis AB ad EF, & rationis VX ad YZ, eafdem effe. quare cùm T æqualis fit feriei AB, EF, etiam feriei VX, YZ, æqualis erit. Deinde feries, planorum AM, BN, CO, eft ad planum AM, vt linea VI ad AB: & feries planorum Vα, Xβ, &c. eft ad planum VX, id eft ad planum AM, vt T ad Vα, id eft AB: Atqui vt VI ad AB, fic rectangulum fub VI & AB, ad quadratum AB: & vt T ad AB, fic rectangulum fub T & AB, ad quadratum AB: ergo feries planorum AM, BN, &c. eft ad planum AM vt rectangulum fub VI & AB, ad quadratum AB: & feries planorum Vα, Xβ, &c. eft ad planum Vα, hoc eft AM, vt rectangulum TAB ad quadratum AB. Igitur permutando feries AM, BN. eft ad rectangulum fub VI, AB, vt planum AM, ad quadratum AB: itemque permutando feries Vα, Xβ eft ad rectangulum TAB, vt idem planum AM ad idem quadratum AB. ergo feries AM, BN, eft ad rectangulum fub VIAB vt feries Vα, Xβ ad rectangulum TAB: & permutando feries AM, BN, eft ad feriem Vα, Xβ, id eft ex conftructione ad feriem AM, CO, EQ, vt rectangulum fub VIAB ad rectangulum TAB, hoc eft vt linea VI ad lineam T: Quod erat demonftrandum.

a 116. huius.

PROPOSITIO CXLIII.

Datæ fint quadratorum feries binæ, quæ habeant bafes indirectum, & longitudinum terminos puncta K & R. fit autem AK diuifa in O, in ratione AB ad BC, & FR diuifa fit in P, fecundùm rationem FG ad GH.

Dico feriem quadratorum NK, ad feriem quadratorum NR, rationem habere compofitam ex rationibus AB ad FG, & AO ad FP.

PRO-

Demonſtratio.

SEries quadratorum MK, a æquatur rectangulo O A B. & ſeries quadratorum N R, rectangulo P F G æqualis eſt. Atqui ratio rectangulorum O A B, P F G ex laterum A B, F G, & A O, F P, rationibus componitur, ergo etiam ſerierum M K, N R, ex iiſdem rationibus proportio componitur. Quod erat demonſtrandum. Sed hoc Theorema vniuerſale reddamus. a 139. huius.

PROPOSITIO CXLIV.

EAdem manente figura, datæ ſint ſeries binæ planorum ſimilium, quarum longitudines ſunt A K, F R: ſit autem A K diuiſa in O, in ratione A B ad B C, & F R in P, in ratione F G ad G H.

Dico ſeriem planorum ſimilium M K, ad ſeriem planorum ſimilium N R, habere rationem compoſitam ex rationibus A B ad F G, & A O ad F P.

Demonſtratio.

SVper iiſdem baſibus fiant binæ quadratorum ſeries, & lineis C D, H I, æquales fiant αB, ξG: deinde vt Aα, ad A B, & Fξ, ad F G fiat quadratum A B, ad Aβ quadratũ, & quadratum F G ad quadratum Fθ. itaque quadratum ſuper Aβ æquabitur b ſeriei quadratorum M K: planum verò ſuper Aβ ſimile planis A S, B T, F V, G X, &c. æquabitur ſeriei planorum S K: ſimiliter ab altera parte quadratum ſuper Fθ ſeriei quadratorum N R, & planum ſimile ſuper eadem Fθ, planorum ſeriei V R æqualia erunt. Itaque ſeries planorum S K eſt ad ſeriem planorum V R, vt planum ſuper Aβ, ad planum Fθ: Item ſeries quadratorum M K eſt ad ſeriem quadratorum N R, vt quadratum ſuper Aβ, ad quadratum ſuper Fθ. Atqui planum Aβ eſt ad planum Fθ, vt quadratum Aβ ad quadratum Fθ; (cùm enim tam quadrata, quàm plana ex conſtructione ſint ſimilia, vtraque ſunt in duplicata rationis Aβ ad Fθ:) ergo ſeries planorum S K eſt ad ſeriem planorum V R, vt ſeries quadratorum M K ad ſeriem quadratorum N R. Atqui per præcedent. ſeries quadratorum MK ad ſeriem quadratorum N R, rationem habet compoſitam, ex rationibus AB ad FG, & A O ad F P, ergo & planorum ſeries S K ad ſeriem planorum V R, rationem habet ex iiſdem rationibus compoſitam: quod erat demonſtrandum. b 130. huius.

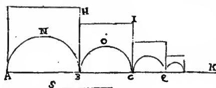
PROPOSITIO CXLV.

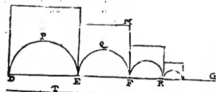
DAtæ ſint quadratorum ſeries H K, L G, in quibuſuis rationibus, ab æqualibus quadratis incipientes: ſitque linea S ſeriei rationis primæ A B ad tertiam C Q, itemque linea T, ſeriei rationis D E primæ ad tertiam F R æqualis.

Dico ſeries quadratorum eam proportionem habere quam lineæ, S, T.

Demon-

Demonstratio.





a 118. huius.

b 1. sexti.

Series H K, [a] æquatur rectangulo S A B, item series L G æquatur rectãgulo T D E, hoc est, (quoniam quadrata A H, D L, ideoque & lineæ A B, D E, ex hypothesi æquantur) rectangulo T A B. eadem igitur est serierum, & S A B, T A B rectangulorum ratio. Atqui rectangulorum S A B, T A B, eadem est ratio [b] quæ rectarum S, T, ergo & serierum eadem quæ S, T, linearum est proportio. Quod erat demonstrandum. Hoc quoque Theorema faciamus vniuersale.

PROPOSITIO CXLVI.

Eadem manente figurâ; dentur planorum similium binæ series quarumuis proportionum N K, P G, quæ ab æqualibus incipiant planis, sintque lineæ S, T, æquales seriebus A B, C Q, &c. A B, F R, &c.

Dico eandem esse serierum & rectarum S, T, proportionem.

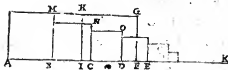
Demonstratio.

Ad huius Theorematis demonstrationem, eandem lector constructionem ac ratiocinationem si adhibeat, quâ propositione præcedenti fuimus vsi, non aliter propositionis præsentis veritatem ex præcedenti deducet, quàm propositionis 144. ex 143. huius deduximus.

PROPOSITIO CXLVII.

Esto rectangulum altera parte longius A G, à quo A M quadratum ablatum sit. Petitur exhiberi series quadratorum, quæ æqualis sit rectangulo A G, & incipiat à quadrato A M.

Constructio & demonstratio.



c 115. huius.

Vt A F ad B F, sic A B fiat ad B I: & ex I ducta I H, parallela ad B M rectangulo I B M H, æqualo fac quadratum B N, basi B C indirectum posita cum A B: tum progressionis quadratorum A M, B N, [c] continuatæ inueniatur K terminus longitudinis. Dico seriem quadratorum M K, problemati

blemati satisfacere. Nam cùm ex constructione AB sit ad BI, vt AF ad BF; erit AF æqualis a seriei rationis AB ad BI. Deinde ex constructione rectangulum BH æquatur quadrato BN, ergo quadratum AM ad rectangulum BH, & quadratum BN, eandem habet rationem: vnde cùm quadratum AM, sit ad quadratum BN vt AB ad CD, erit quoque quadratum AM ad rectangulum BH, vt AB ad CD. atqui vt quadratum AM ad rectangulum BH, sic AB ad BI: ergo AB est ad CD, vt AB ad BI: æquantur igitur CD, BI, ergo AF etiam æqualis est seriei rationis AB ad CD: quare rectangulum FAB, id est rectangulum AG b æquale est seriei quadratorum AM, BN, CO, &c. hoc est seriei MK. factum igitur est quod postulabatur. a 79. huius. b 118. huius.

Demonstratio alia.

Tota series quadratorum MK est per 82 huius ad reliquam seriem NK, vt quadratum AM ad quadratum BN, hoc est ex const. ad rectangulum BH. Atqui ex constructione, rectangulum AG est ad rectangulum BG, vt rectangulum AM ad rectangulum BH, ergo series MK est ad seriem NK, vt AG ad BG. Igitur diuidendo quadratum AM, est ad reliquam seriem NK, vt quadratum idem AM ad reliquum rectangulum BG: ergo series NK, & rectangulum BG æquantur. Quare communi addito quadrato AM, tota series MK, & rectangulum AG sunt æqualia.

Corollarium.

Esto linea AI secta in B, Petitur addi IK, vt AI sit ad IK, vt AK ad BK.

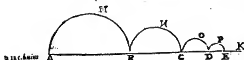
Constructio & demonstratio.

Super AI fiat in altitudine AB rectangulum AG, cui æqualis c inueniatur series quadratorum basibus in directum positis MNK: incipiens à quadrato AB, siue AM, & terminum habens longitudinis K: Dico factum quod petebatur. Cùm enim rectangulum AG ex constructione sit æquale seriei MK, AI erit ad IK, vt AB ad BC, vti ex 129. huius facilè demonstrari potest: & quia terminus longitudinis seriei quadratorum est K, progressionis etiam basium terminus d erit K; ergo AK est e ad BK, vt AB ad BC, hoc est per demonstrata vt AI ad IK. Factum igitur est quod petebatur. c 147. huius. d 115. huius. e 82. huius.

PROPOSITIO CXLVIII.

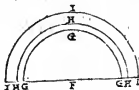
Esto figura plana quæcumque FI, à qua similis auferatur FG, petitur exhiberi series planorum similium, quæ incipiat à plano ablato FG, & dato plano FI sit æqualis.

Constructio & demonstratio.



a 115. huius

b 82. huius.



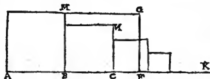
VT planum FI ad segmentum GI, sic planum FG, fiat ad segmentum aliquod GH, deinde plano FG fac simile & æquale AM, & segmento GH æquale sit planum BN, simile autem planis AM, FG, FI. Denique progressionis planorum AM, BN, continuatæ a inueniatur terminus lõgitudinis K. Dico seriem planorum similium MK postulato satisfacere, est enim tota series planorum MK, ad reliquam seriem NK, vt b planum AM ad planum BN, hoc est ex constructione, vt planum FG ad segmentum GH: sed rursum ex constructione planum FI est ad segmentum GI, vt planum FG ad segmentum GH, ergo series MK, est ad reliquã NK, vt planum FI ad segmentum GI. Quare per conuersionem rationis series MK, est ad planum AM, vt planum FI ad planum FG: sed ex constructione plana AM, FG æqualia sunt: ergo etiam series planorum similium MK, & planum FI æqualia sunt. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CXLIX.

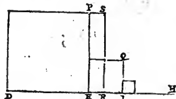
DAta sit progressio quadratorum MK, & quadratum aliud DP, quod minus esse debet serie MK. petitur exhiberi alia series quadratorum, incipiens à quadrato DP, æqualis seriei MK.

Constructio & demonstratio.

c 129. huius



d 147. huius.



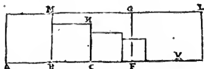
Fiat rectangulum AG in altitudine AB, c æquale seriei datæ MK. deinde, (quoniam quadratum DP ponitur minus serie MK, id est ex constructione rectangulo AG,) auge quadratum DP, rectangulo ES, vt rectangulum totum DS, æquale sit rectangulo AG: tum rectangulo DS d inueniatur æqualis series quadratorũ PQH, incipiens à quadrato DP. Dico seriem PQH soluere Problema. Nam ex constr. series quadratorum PQH incipit à quadrato dato DP, & æqualis est rectangulo DS, hoc est ex constructione rectangulo AG, hoc est rursum ex constructione seriei datæ MK. Factum igitur est quod petebatur.

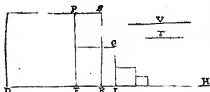
PRO-

PROPOSITIO CL.

DAta sit iterum quadratorum series MK, & aliud quadratum DP, item ratio quæuis siue maioris siue minoris inæqualitatis V ad T. petitur exhiberi series quadratorum incipiens à quadrato DP, & habens ad seriem MK, rationem datam V ad T.

Constructio & demonstratio.





FIat a rectangulum AG æquale seriei MK, & in eadem altitudine rectangulum AL, quod ad rectangulum AG, datam habeat rationem. si iam quadratum DP maius sit aut æquale rectangulo AL, impossibile est problema. Minus ergo sit oportet quadratum DP rectangulo AL. Itaque augeatur rectangulo ES, ita vt totum DS b rectangulo AL æquale sit. Tum rectangulo DS inueniatur æqualis series, quadratorũ PQH incipiens à quadrato DP. Dico hanc soluere problema.

a 119. huius.
b 147. huius.

Ex constructione enim series PQH incipit à quadrato DP, & æqualis est rectangulo DS, id est ex constructione rectangulo AL. quare cum rectangulum AL ex constructione sit ad rectangulum AG, vt V ad T, etiam series PQH erit ad rectangulum AG, id est rursum ex constructione ad seriem datam MK, vt V ad T. Fecimus ergo quod petebatur. Nunc verò vtramque propositionem præcedentem vniuersalem faciamus.

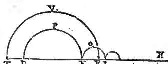
PROPOSITIO CLI.

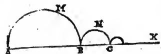
DAta sit planorum similium progressio vt priùs disposita MK, & aliud planum DP simile planis seriei MK: Petitur exhiberi similium planorum series, incipiens à dato plano DP, æqualis verò seriei datæ MK.

Constructio & demonstratio.

a 150. huius.

b 148. huius.





PLanis a seriei MK æquale ac simile fiat planum TVR, si iam planum datum DP, æquale aut maius sit plano TVR, fieri problema non poterit: minus ergo sit necesse est. Itaque inueniatur series b planorum similium PQH, quæ æqualis sit plano TVR, & incipiat à plano dato DP. Dico hanc soluere problema.

Nam ex constructione, series PQH incipit à dato plano DP, & æqualis est plano TVR, id est ex constructione seriei datæ MK: Factum igitur est quod postulabatur.

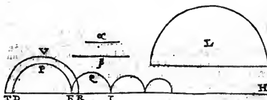
PROPOSITIO CLII.

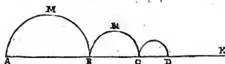
DAta sit iterum planorum similium series MK, & aliud planum DP, simile datæ seriei planis, itemque ratio quæuis, siue maioris, siue minoris inæqualitatis α ad β. Petitur exhiberi series planorum similium, quæ incipiat à plano DP, & ad seriem MK, datam habeat rationē.

Constructio & demonstratio.

c 150. huius.

d 148. huius.





FIat planis seriei MK c æquale planum L, deinde vt α ad β, sic fiat planum simile TVR ad planum L, si iam planum datum DP, æquale vel maius est plano TVR, fieri problema non poterit. Minus ergo planum DP sit oportet, plano TVR: Itaque inueniatur d series planorū similium PQH, incipiens à plano DP, æqualis verò plano TVR. Dico hanc problema soluere. nam ex constructione series PQH, incipit à plano dato DP, & æqualis est plano TVR, quare cùm planum TVR ex constructione datam habeat rationem ad planum L, etiam series PQH ad planum L, hoc est rursum ex constructione ad seriem datam MK, habebit rationem datam: Factum igitur est quod petebatur.

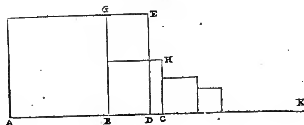
PRO-

PROPOSITIO CLIII.

ESto progreſſio quadratorum G H K, baſibus in directum poſitis, & terminum longitudinis habens punctum K.

Dico quadratum ſuper tota A K factum, ad ſeriem datam, proportionem habere compoſitam, ex ratione K A ad B A, & C A ad B A.

Demonſtratio.



Fiat enim A D ad D K, vt A B ad B C. Igitur rectangulum D A B, ſiue A E, [a] æquatur ſeriei G K. ergo quadratum A F, eandem ad ſeriem G K, & ad rectangulum A E habet rationem. quoniam autem A D eſt ad D K, vt A B ad B C, erit inuertendo ac componendo K A ad D A, vt C A ad B A. Ergo cùm quadratum A F ad rectangulum A E, rationem habeat [b] compoſitam ex rationibus K A ad D E, & K A ad D A, habebit quoque quadratum A F, ad idem rectangulum, compoſitam ex rationibus K A ad D E, & C A ad B A: quare cùm ſeries G K & rectangulum A E, æqualia ſint, habebit quoque quadratum A F ad ſeriem G K rationem compoſitam ex rationibus K A ad D E, hoc eſt B A, & C A ad B A. Quod erat demonſtrandum. placet hoc quoque theorema vniuerſaliter demonſtrare.

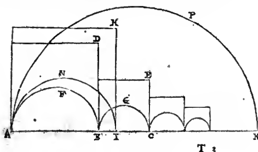
a 129. huius.

b 23. ſexti.

PROPOSITIO CLIV.

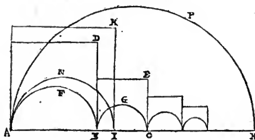
DAta ſit planorum ſimilium quorumcunque progreſſio F G K, habens baſes homologas in directum, & terminum longitudinis K, datæ progreſſionis.

Dico planum A P K ad totam ſeriem F G K habere rationem compoſitam, ex rationibus K A ad B A, & C A ad B A.



Demon-

Demonstratio.



SVper iisdem basibus AB, BC, &c. construatur quadratorum series DEK: fiatque quadratum AD ad aliud AHI, vt AC ad AK, quod toti a seriei quadratorum DEK æquabitur. Super AI verò fac planum ANI simile plano AF. Itaque planum AF est ad planum ANI b vt quadratum AD ad quadratum AHI, hoc est ex constructione vt AC ad AK. Quare etiam planum ANI, seriei planorum similium FGK c æquale erit; ergo series FGK est ad planum ANI, vt series DEK ad quadratum AHI: atqui planum ANI est ad planum APK, d vt quadratum AHI ad quadratum totius AK: igitur ex æqualitate series FGK est ad planum APK, vt series DEK ad quadratum AK, & inuertendo planum APK est ad seriem FGK, vt quadratum AK ad seriem DEK. sed quadratum AK e ad seriem DEK, proportionem habet compositam ex rationibus KA ad BA, & CA ad BA. ergo & planum APK ad seriem FGK, proportionem habet ex iisdem rationibus compositam; quod erat demonstrandum.

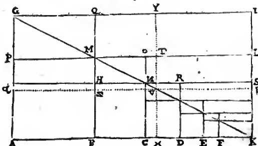
a 130. huius.
b 22. Sexti.
c 130. huius.
d 22. sexti.
e 153. huius.

PROPOSITIO CLV.

ESto quadratorum series habens bases in directum, & terminum longitudinis K, inscripta triangulo AGK, iuxta propositionem 131. huius, & completo rectangulo AI, latera quadratorum producantur in LS, &c. item in Q, O, R, &c.

Dico ex hac laterum productione perpetua, oriri progresſionem rectangulorum MI, NL, &c. similium, & continuè proportionalium, quæ progresſioni quadratorum quoque sit æqualis.

Demonstratio.



QVoniam ex hypothesi K terminus est longitudinis quadratorum seriei, etiam K terminus f erit progresſionis basium AB, BC, &c. igitur BK g est ad CK, vt AB ad

f 125 huius.
g 82. huius.

AB ad BC, hoc est vt PM ad HN, hoc est vt GM ad MN, hoc est (quia QGM, HMN similia sunt triangula) vt QM ad MH, hoc est denique vt QM ad ON: à primo igitur ad vltimum, BK est ad CK, hoc est ML ad NS, vt QM ad ON: rectangula igitur MI, NL, proportionalia habent latera. Quare cùm sint & æquiangula, erunt similia; quod erat primum.

Deinde dicta rectangula complementa sunt eorum, quę circa diametrum sunt. Ergo singula quadratis singulis datæ seriei a æquantur. ergo & progressio tota toti progressioni æqualis erit; ex quo etiam secundum patet. Cùm enim quadrata ex hypothesi sint in ratione continua, etiam complementa illis æqualia, in continua erunt analogia; quæ erant demonstranda. a 43. primi.

PROPOSITIO CLVI.

IIsdem positis fiat AX b æqualis seriei rationis AB ad CD, & ex puncto X, ducta normalis XY secet lineas PL, GK, in T & V. b 80. huius.

Dico rectangulum sub BKVY, toti complementorum seriei MI, NL, &c. æquari.

Demonstratio.

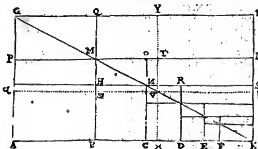
DVcatur enim AK per punctum V parallela αβ. Igitur rectangula c VI, AV, itemque rectangula MY, αM, æqualia sunt inter se. Igitur figura MQIβV figuræ MPAXV æqualis est. quare communi addito rectangulo ZT, erunt rectangula ZI, AT ęqualia. Atqui rectangulum ZI est rectangulum sub Zβ, id est BK, & sub ZQ, id est VY; rectangulum verò AT seriei quadratorum, d est æquale. ergo rectangulum sub BKVY, seriei quadratorum, hoc est per præcedentem seriei complementorum est æquale. Quod erat demonstrandum. c 43. primi. d 118. huius.

PROPOSITIO CLVII.

IIsdem positis, quæ suprà,

Dico ea quæ circa diametrum sunt rectangula PQ, HO, &c. esse similia inter se & continuè proportionalia; rectangulum verò sub AB & VY, toti eorum progresioni esse æquale.

Demonstratio.



VT PM est ad MO, siue HN, sic GP est ad ON, ob triangulorum GMP, MON, similitudinem: quare cùm rectangula PQ, HO, & latera habeant proportionalia, & angulos æquales, erunt similia; ac proinde & reliqua omnia eodem discursu simlia erunt: quod fuit primum. Deinde cùm similia sint dicta rectangula, erunt in duplicata homologorum laterum PM, HN, &c. ratione. Quare cùm & quadrata sint in eorumdem laterum ratione duplicata, eadem erit rectangulorum ac quadratorum proportio. Atqui hæc ex hypothesi sunt in continua analogia, ergo & illa; quod erat alterum. Deniq; rectangulum αM, æquatur e rectangulo MY. Ad- e 43. primi.

dito

dito igitur communi P Q, æquabitur rectangulum a Q, hoc est rectangulum sub AB & VY, rectangulo P Y: Atqui rectangulum P Y, a duplum est progressionis triangulorum G P M, M H N, &c. ergo & rectangulum sub AB & VY, progressionis triangulorum est duplum: quare cùm progressio rectangulorum P Q, H O, &c. etiam sit progressionis triangulorum dupla, rectangulum sub AB & VY, & progressio rectangulorum æqualia erunt: Quod postremum fuit eorum, quæ erant demonstranda.

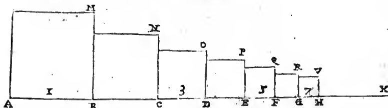
a 159. huius.

PROPOSITIO CLVIII.

DAta sit quadratorum series, basibus indirectum positis, & terminum habens longitudinis K: impares autem quadratorum bases AB, CD, EF, &c. notentur numeris imparibus 1. 3. 5. 7. &c.

Dico, primum quadratum AM esse ad secundum BN, vt AB ad CD: & rursum primum quadratum AM esse ad tertium CO, vt AB ad EF; & ad quartum DP, vt AB ad GH. Atque ita in infinitum, bases notatæ imparibus numeris, sunt primo quadrato cum subsequentibus comparato, proportionales.

Demonstratio.



COmparemus exempli gratia quadratum AM, cum tertio CO; Quoniam quadrata omnia AM, BN, CO, &c. in continua sunt analogia, erunt b & bases continuę proportionales; ex æqualitate igitur etiam AB, CD, EF, erunt continuæ; (cùm inter ipsas æqualis continuè proportionalium numerus intercedit) ergo quadratum AM est ad quadratum CO, vt AB ad EF; (cùm rationes tam quadrati ad quadratum, quàm lineæ AB ad lineam EF, sint rationis AB ad CD duplicatæ) eadem valebit demonstratio, si quadratum AM cum quouis alio compararetur. Constat ergo propositionis conclusio.

b 124. huius.

PROPOSITIO CLXIX.

EAdem positâ figurâ, data sit planorum similium series MK habens bases homologas in directum, & terminum longitudinis K.

Dico seriem MK ad nullam sui partem, verbi gratia ad seriem NK aut seriem OK, vel seriem PK, &c. eam habere rationem, quam inter se habent duæ quæcumque in hac basium serie, rectæ lineæ, inter quas par linearum numerus intercedit.

Demonstratio.

SEries enim data MK, cum ea sui parte comparatur, vt inter vtrusque primum terminum, vel par intercedat planorum numerus, vel impar; comparentur primò series MK & OK, inter quarum initia, impar terminorum numerus intercedit; quia igitur

igitur plana sunt in continua analogia, etiam bases A B, B C, &c. erunt [a] continuæ proportionales. Quare ex æquo etiam A B, C D, E F, erunt continuæ: ergo planum A M est ad planum C O, vt [b] A B ad E F. Atqui series M K [c] est ad seriem O K, vt planum A M ad planum C O, (sunt enim similium rationum series) ergo series M K est ad seriem O K, vt A B ad E F; inter quas impar numerus basium intercedit, nempè, 3. Atqui in tota serie basium, non possunt reperiri duę aliæ lineæ, quæ eandem rationem habeant, quàm A B, E F, nisi illæ inter quas idem ternatius numerus linearum intercedit, vti ex elementis demonstratur; igitur nullæ lineæ ex serie basium, inter quas impar linearum numerus interiicitur, eandem habent rationem, quam series M K ad sui partem O K. a 124. huius. b 10. sexti. c 84. huius

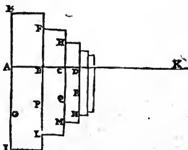
Comparentur modò duæ series M K, P K, inter quarum initia par planorum sit numerus: Rursum igitur ostendemus vti priùs seriem M K esse ad seriem P K, vt A B ad G H. quare cùm inter A B & G H, impar linearum sit numerus, nempe 5; tota demonstratio primæ partis huic etiam quadrat: vnde patet propositionis veritas.

PROPOSITIO CLX.

Data sit quadratorum series habens bases in directum & terminum longitudinis K. Deinde ex singulis punctis B, C, D, &c. erectæ sint perpendiculares A I, B L, C M, &c. proportionales continuæ in ratione dimidiata proportionis A B ad B C; & super illis perpendicularibus in altitudine linearum A B, B C, &c. fiant rectangula I B, L C, M D, &c.

Dico seriem rectangulorum I K, ad seriem rectangulorum L K, triplicatam habere proportionem rationis A I ad B L; cuius quadruplicatam habet series quadratorum E K, ad seriem quadratorum F K.

Demonstratio.



Primum enim rectangula I B, L C, &c. esse in continua analogia sic ostendo. ratio rectanguli I B ad L C, cōponitur ex rationibus A I ad B L, hoc est ex hypothesi B L ad C M, & A B ad B C, hoc est B C ad C D; Atqui etiam rectangulorum L C, M D, ratio componitur ex rationibus B L ad C M, & B C ad C D; ergo eadem est rectanguli I B ad L C, & L C ad M D ratio: ergo illa rectangula sunt in continua analogia, habeturque progressio continuè proportionalium rectangulorum I, L, M, N, K: quare series I K est [d] ad seriem L K, vt rectangulum I B, ad rectangulum L C: Atqui ratio rectanguli I B ad L C, componitur ex ratione A I ad B L, & ex ratione A B ad B C, quæ ponitur esse duplicata rationis A I ad B L; ergo ratio rectanguli I B ad L C, hoc est sicut modò ostendimus, ratio seriei I K ad seriem L K, est triplicata rationis A I ad B L. Series autem quadratorum E K est ad seriem F K, [e] vt quadratum B E ad quadratum C F, hoc est in duplicata rationis A B ad B C, hoc est (vt ex hypothesi colligitur) in quadruplicata rationis A I ad B L, cuius triplicata est ratio seriei rectangulorum I K, ad seriem L K. Quod erat demonstrandum. d 81. huius. e Ibid.

V PRO-

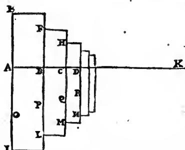
PROPOSITIO CLXI.

Iisdem positis loco rectangulorum intelligatur super normalibus AI, BL, &c. construi series quadratorum.

Dico seriem quadratorum EK, ad seriem FK, duplicatam habere rationem eius, quam habet series quadratorum AI, BL, CM, &c. ad seriem quadratorum BL, CM, DN, &c.

Demonstratio.

a ibid.



Series EK est ad seriem a FK vt quadratum BE ad quadratum CF, hoc est in duplicata rationis AB ad BC. similiter ratio fieri quadratorum AI, BL, &c. ad seriem quadratorum BL, CM, &c. eadem est quæ quadrati AI ad quadratum BL, hoc est duplicata rationis AI, ad BL: hoc est ex hypothesi ratio seriei quadrarorum AI, &c. ad seriem quadratorum BL, &c. eadem est quæ AB ad BC. quare cùm ostensum sit rationem seriei EK, ad seriem FK, esse duplicatam rationis AB ad BE, erit quoque duplicata rationis, quam habet series rectangulorum IK, ad seriem rectangulorum LK: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

Iisdem positis quæ suprà, inter BA, AI, CB, BL, DC, CM, &c. inueniantur mediæ proportionales AO, BP, CQ, &c.

Dico quadrata AO, BP, CQ, &c. cubis AI, BL, CM, &c. esse proportionalia.

Demonstratio.

b 17. sexti. c 160. huius. d 33. vndecimi.

Quoniam BA, AO, AI, sunt continuæ proportionales, erit quadratum AO, rectangulo BAI b æquale: similiter reliqua quadrata BP, CQ, &c. reliquis rectangulis CBL, DCM, &c. erunt æqualia. quare cùm rectangula c dicta sunt continuè proportionalia in ratione triplicata AI ad BL, quadrata quoque AO, BP, &c. erunt in dictorum laterum AI, BL, &c. triplicata ratione continuè proportionalia. Atqui etiam cubi AI, BL, &c. sunt in laterum AI, BL, &c. d triplicata ratione; ergo quadrata AO, BP, &c. cubis AI, BL, &c. sunt proportionalia. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM
PARS QVARTA

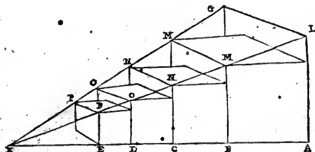
Doctrinam præcedenti parte in planis demonstratam, corporibus, solidisq́; applicat.

PROPOSITIO CLXIII.

DAta sit quadratorum continuè proportionalium series, basibus in directum positis, cuius longitudinis terminus sit K; super singulis autem quadratis cubi construantur.

Dico constitui seriem cuborum continuè proportionalium, quæ eumdem quoque habeant terminum longitudinis K.

Demonstratio.



RAtio cubi AM ad cubum BN, triplicata est rationis [a] AB ad BC, item ratio cubi BN ad cubum CO, triplicata est rationis [b] BC ad CD; id est rationis AB ad BC; (ponuntur enim quadrata AM, BN, CO &c. in continua analogia) quare cùm rationes vtræque, cubi AM ad cubum BN, & cubi BN ad cubum CO, triplicatæ sint rationis AB ad BC, eædem erunt. Sunt igitur cubi AM, BN, CO in continua analogia; eodem modo erunt & reliqui omnes continuè proportionales. Quod erat primum. ex quo patet etiam secundum: Cùm enim quadratorum & cuborum series, pariter semper procedant, idem vtriusque terminus sit longitudinis necesse est. Quæ erant demonstranda.

[a] 33 vndecimi. [b] 22 sexti.

PROPOSITIO CLXVI.

IIsdem positis, primæ AB, & quartæ DE, æquales fiant RS, ST: continueturq́ue ratio RS ad ST, per plures semper terminos TV, VX, &c.

Dico cubum primum AM, esse ad quemlibet cubum seriei propositę, verbi gratia ad quartum DP, vt est linea RS ad quartam VX.

R S T V X

Demonstratio.

R S T V X

a 33. undecimi.
CVbus AM ad cubum DP, est in triplicata a rationis AB ad DE, hoc est per constructionem rationis RS ad ST. Atqui etiam RS ad quartam VX, est in triplicata ratione eius, quam habet RS ad ST: ergo vt RS ad VX, sic cubus AM ad cubum DP. Simili ratiocinatione ostendemus cubum primum, ad quemuis seriei cubum, eandem habere rationem, quam habet RS ad lineam quæ æquè distabit à prima RS, atque cubus à cubo primo AM. Quod erat demonstrandum.

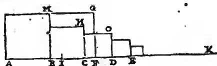
Corollarium.

DVo hæc theoremata eâdem seruatâ demonstratione, ad omnia similium corporum genera licebit extendere.

PROPOSITIO CLXV.

DAta sit quadratorum series, habens bases in directum, & terminum longitudinis K. super quadratis autem singulis, exstructi sint cubi: Petitur seriei cubicæ æquale parallelepipedum exhiberi.

Constructio & demonstratio.



b 80. huius.
SEriei rationis primæ baseos AB, ad quartam DE, fac b æqualem AF; & super AF, in altitudine AB, rectangulum AG: deinde super rectangulo AG, in altitudine AB, construe parallelepipedum rectangulum. Dico hoc seriei cubicæ æquari. Vel super quadrato AB in altitudine lineæ, æqualis seriei rationis AB ad DE, fac parallelepipedum. Dico hoc esse quæsitum. Fiat enim BI æqualis DE. Quoniam igitur ex constructione seriei rationis AB ad BI, siue
c 81. huius.
AB ad DE, æqualis est AF, erit c AF ad BF, vt AB ad BI, hoc est vt AB
d 22. sexti.
ad DE: quia autem quadrata ex hypothesi sunt continua, erunt d lineæ AB, BC,
e 33. undecimi.
CD, DE, &c. in continua analogia: vnde & cubus e AM ad cubum BN, vt AB ad DE, hoc est (sicut ostendi) vt AF ad BF: Quare cùm parallelepipedum AG,
f 25. undecimi.
sit ad parallelepipedum BG, f vt basis AG ad basim BG, hoc est vt g AF ad BF,
g 1. sexti.
erit cubus AM ad cubum BN, vt parallelepipedum AG, ad parallelepipedum BG: Atqui tota h series cubica MK, est ad seriem cubicam NK, vt cubus AM ad
h 81. huius.
cubum BN, ergo parallelepipedum AG, est ad parallelepipedum BG, vt series cubica MK, ad seriem cubicam NK: ergo diuidendo cubus AM, est ad parallelepipedum BG, vt cubus idem AM, ad seriem cubicam NK: (cùm enim parallelepipeda AG, BG constructa sint supra bases AG, BG, in communi altitudine AB, patet cubum AM esse excessum parallelepipedi AG super parallelepipedum BG.) Itaque series cubica NK & parallelepipedum BG, erunt æqualia: communique addito cubo AM, tota series cubica, & parallelepipedum AG æqualia erunt. Factum igitur est quod petebatur.

Corol-

Corollarium.

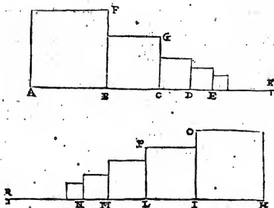
Itaque si fuerint propositæ binæ; vel plures cuborum progressiones, etiam rationum dissimilium, cognoscetur earum propottio inter se, si per hanc propositionem singulis cuborum progressionibus æqualia parallelepipeda constituantur.

PROPOSITIO CLXVI.

Dentur binæ, sed æquales cuborum progressiones rationum dissimilium.

Dico seriem cubicam AK, ad seriem cubicam HR, rationem habere compositam, ex ratione primi quadrati AF, ad primum quadratum HO, & ratione seriei rationis AB primæ, ad quartam DE, ad seriem rationis HI, primæ, ad quartam MN.

Demonstratio.



Parallelepipedum factum super quadrato AB, in altitudine lineæ seriei rationis AB ad DE, per præcedentem seriei cubicæ AK, erit æquale: similiter parallelepipedum super quadrato HI, in altitudine lineæ seriei rationis HI ad MN, seriei cubicæ HR æquale est. Quare cùm series cubicæ ponantur æquales, dicta quoque parallelepipeda æqualia erunt: ergo reciprocam habent basium & [a] altitudinum rationem, hoc est habent rationem compositam ex rationibus basium & altitudinũ: Quare & series cubicę AK & HR illis æquales, rationem habent compositam ex ratione dictarum altitudinum, hoc est ex ratione seriei AB, DE, &c. ad seriem HI, MN, &c. & ex ratione basium, hoc est ex ratione quadrati AF ad quadratum HO. Quod erat demonstrandum.

a 34. undecimi.

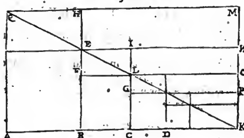
PROPOSITIO CLXVII.

Data sit quadratorum progressio, basibus in directum positis; quæ terminum longitudinis habeat K. & iuxta 131. huius inscripta sit triangulo AQK; completo autem rectangulo AM, producantur latera quadratorum in N, O, P, &c. & in H, I, L, &c.

 Dico

Dico seriem parallelepipedorum, super rectangulis E M, F N, G O, &c. in altitudine linearum B E, C F, D G, &c. æqualem esse seriei cubicæ, super quadratis exstructæ.

Demonstratio.



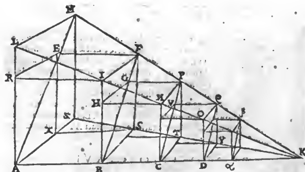
a 43. primi. b 7. duodecimi.

Dicta enim E M, F N, &c. rectangula, sunt complementa rectangulorum, quæ sunt circa diametrum, ergo[a] singula quadratis singulis ordine sunt æqualia. Quare parallelepipeda super complementis illis exstructa, cùm easdem quoque cum cubis quadratorum habeant altitudines B E, C F, &c. patet singula[b] parallelepipeda singulis cubis æqualia esse: ergo tota parallelepipedorum series, toti seriei cubicę æquatur: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

Data sit progressio linearum A B, B C, C D, &c. terminata in K, & super lineis quadrata, super quadratis autem cubi. Petitur cuborum series inscribi pyramidi, quadratam basim habenti.

Constructio & demonstratio.



Ex puncto K, per I, S, F, ducantur rectę K I, K S, K F, quarum duę primę K I, K S, occurrant lineis A R, A X productis in L & Z: producto deinde plano A E, occurrat linea K F in M, iunganturque L M, Z M. Dico factum quod petebatur; Ducantur enim in aduersis cuborum planis diametri A E, B F, C P, D Q, &c. primò igitur ex hypothesi manifestum est vtriusq; seriei quadrata A I, B N, C O, &c.

A S,

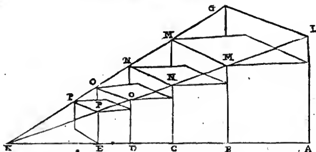
AS, BT, &c. esse in eodem plano. quare lineæ [a] KIL, KSZ transeunt per omnia puncta N, O, &c. T, Y, &c. hoc est tangunt totam cuborum seriem. Superest ergo vt demonstremus lineam KFM transire etiam per omnia puncta P, Q, &c. quod sic præstabimus. IF est ad HG, vt IB ad HB, id est vt IK ad NK, hoc est vt BK ad CK; Atqui cùm seriei AB, BC, CD terminus sit K, [b] AK, BK, CK sunt continuæ proportionales; ergo BK est ad CK, vt AB ad BC: & IF ad HG vt AB ad BC: quare cùm AB, IF æquales sint, etiam BC & intercepta HG, æquales erunt; ergo BF transit per verticem anguli G, quadrati SBHG, cùm intercipiat parallelam HG æqualem lateri dicti quadrati; vnde B, G, F sunt in directum. Itaque cùm ex elementis constet diametros aduersas CP, BG esse parallelas, etiam CP, BF erunt parallelæ. Quia igitur linea BF est in [c] plano BFK, etiam CP in eodem [d] plano BFK erit. Similiter ostendemus lineas DQ, CP, esse parallelas, & proinde cùm CP sit in plano BFK, etiam DQ esse in plano BFK. eodem discursu demonstrabimus omnes BF, CP, DQ, Xβ, &c. esse in eodem plano BFK, siue AMK: deinde BF, CP, &c. cùm sint in oppositis planis parallelis, productæ nunquam conuenient. quare cùm sint omnes in plano BFC, erunt omnes inter [e] se parallelæ. Præterea ex elementis & ex datis patet diametros BF, CP, &c. esse lateribus IB, NC, &c. hoc est AB, BC, CD, &c. proportionales: quare [f] KFM transit per omnia puncta P, Q, β, &c. Quod autem etiam basis ZM quadrata sit, sic ostendo: ZA est ad XA, vt ZK ad SK, hoc est vt AK ad BK, hoc est vt LK ad IK, hoc est denique vt LA ad RA: Quia ergo XA, RA æquales sunt, etiam ZA, LA [g] æquales erunt. Præterea LM est ad IF vt LK ad IK, hoc est vt AK ad BK, hoc est vt AZ ad BS, atqui IF, BS æquales sunt, ergo etiam LM, AZ æquales erunt. Deinde cùm LK sit ad IK, vt [h] MK ad FK, erit LM parallela ad IF, quę cùm ad AXZ parallela sit, etiam LM ad AXZ parallela erit. Quia igitur MZ & AL æquales & parallelas LM, AZ connectunt, ipsę quoque [i] æquales & parallelæ erunt; est autem angulus LAZ rectus, ac proinde etiam angulus MZA, & consequenter anguli illis oppositi sunt recti, basis igitur ZL est quadrata: Factum ergo est quod petebatur.

[a] 131 huius. [b] 82. huius. [c] 2. vndecimi. [d] Defin. 34. primi. [e] Ibid. [f] Lemma ad 131 huius. [g] 14. quinti. [h] 17. vndecimi. [i] 33. primi.

PROPOSITIO CLXIX.

Series seu pyramis cubica inscripta sit pyramidi ALGK. Oporteat pyramidis includentis, & inclusæ differentiam exhibere.

Constructio & demonstratio.



Super quadrato AB in altitudine lineæ æqualis seriei rationis AB ad DE fac parallelepipedum, hoc est seriei [k] cubicæ æquale erit. Deinde fiat vt quadratum AB ad quadratum ALG, ita pyramidis GLK altitudo AK ad aliquam Q: denique super quadrato AB in altitudine lineæ, quę contineat vnam tertiam rectæ Q fiat parallelepipedum, erit hoc pyramidi LK æquale; nam parallelepipedum super quadrato

[k] 165. huius.

a 14. undecimi. dratò A B in altitudine lineæ Q, æquale est [a] parallelepipedo super quadrato A G in altitudine A K, cùm habeant bases ex constr. & altitudines reciprocas. Quare
b 7. undecimi. cùm pyramis [b] L K sit vna tertia parallelepipedi super A G in altitudine A K (est enim A K altitudo pyramidis, quia A K vt ex construct. præcedentis propositionis patet, est normalis ad A L) itemque parallelepipedum super quadrato A G in altitudine tertiæ partis rectæ Q, sit eiusdem parallelepipedi tertia pars, erunt pyramis & dictum parallelepipedum æqualia. Quare cùm pyramis maior sit inscripta cubica pyramide, etiam dictum parallelepipedum nempe super quadrato A B in altitudine tertiæ partis rectæ Q, erit maius parallelepipedo quod pyramidi cubicæ æquale feceramus. Eadem igitur erit pyramidis includentis & inclusæ quæ horum parallelepipedorum differentia. exhibuimus ergo, &c. quod petebatur.

PROPOSITIO CLXX.

Datæ seriei siue pyramidi cubicæ, pyramidem super F quadrato dato, æqualem exhibere.

Constructio & demonstratio.

Sit series cuborum AM, BN, CO, &c. & datum quadratum sit F, & fiat vt quadratum F ad quadratum A B, ita linea æqualis seriei rationis A B ad D E ad lineam Q. Dico pyramidem cuius basis sit quadratum F, altitudo autem tripla ipsius Q seriei cubicæ æqualem esse. Nam parallelepipedum
c 34. undecimi. dum cuius basis sit quadratum F altitudo Q æquatur [c] parallelepipedo, cuius basis sit quadratum A B, altitudo verò se-
d 165. huius ries rationis A B ad D E, hoc est [d] seriei cubicæ. Ergo parallelepipedum cuius basis sit quadratum F & altitudo tripla
e 7. duodecimi. rectæ Q triplum erit seriei cubicæ. atqui [e] idem parallelepipedum triplum est pyramidis habentis basim F, altitudinem verò triplam rectæ Q, ergo pyramis illi seriei cubicæ æqualis erit. Factum igitur est quod petebatur.

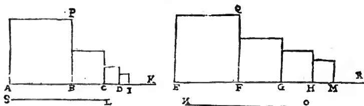
PRO-

PROPOSITIO CLXXI.

Binæ cuborum series quarumuis rationum ab æqualibus cubis A D, E Q incipianr.

Dico cubicas series eamdem habere ad inuicem proportionem, quam habent lineæ S L, N O æquales seriebus rationum A B ad D I, & E F ad H M.

Demonstratio.



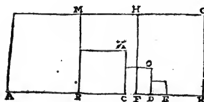
Parallelepipedum super quadrato A B in altitudine S L, æquatur [a] seriei cubicæ P K. Item parallelepipedum super quadrato E F in altitudine N O, æquatur seriei cubicæ Q R: cùm autem cubi A P, E Q ponantur æquales, etiam quadrata A B, E F æqualia erunt. Quare dicta parallelepipeda easdem bases habebunt; itaque dicta parallelepipeda, hoc est series cubicæ eamdem habebunt rationem, quam altitudines S L, N O, hoc est quam habent series rationis A B ad D I, & rationis E F ad H M: quod erat demonstrandum. [a 165. huius]

PROPOSITIO CLXXII.

Data sit quadratorum progressio solita, superque illis exstructa series cuborum, & inscripta parallelepipedo A G, cuius basis sit quadratum A B, altitudo A K, eadem nempè quæ longitudo seriei cubicæ.

Dico parallelepipedi ad seriem cubicam, eamdem esse rationem, quæ est D A trium primorum laterum, ad latus primum A B.

Demonstratio.

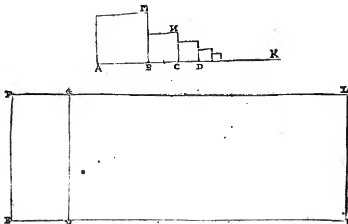


Linea A F æqualis fiat seriei rationis A B ad D E; erit parallelepipedum super quadrato A B in altitudine A L (quod vocemus parallelepipedum A H) æquale [b] seriei cubicæ; sed parallelepipedū A G est ad parallelepipedum A H, (cùm eadem sit basis vtriusque) vt A K ad A F, hoc est vt [c] D A ad B A; ergo parallelepipedum A G etiam erit ad seriem cubicam vt D A ad B A. Quod erat demonstrandum. [b Ibid.] [c 103. huius.]

PROPOSITIO CLXXIII.

Data sit vt suprà cuborum series. Oportet exhibere superficiem omnibus superficiebus omnium cuborum progressionis datæ æqualē.

Demonstratio.



a 130. huius Fiat a rectangulum EHGF æquale progressioni quadratorum AM, BN, &c. tum EI sextupla fiat lineæ EH. Dico rectangulum FI esse id quod quæritur. Cùm superficies singulorum cuborum constet sex quadratis æqualibus, manifestum est omnes seriei cubicæ superficies constitui ex sex seriebus quadratorum AM, BN, &c. atqui rectangulum HF ex constructione seriei quadratorum AM, BN, est æquale. Ergo sex rectangula FH, hoc est ex construct. rectangulum FI, constituet omnes seriei cubicæ datæ superficies. Fecimus ergo quod petebatur.

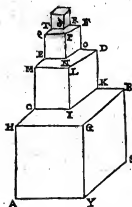
PROPOSITIO CLXXIV.

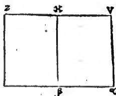
Data sit cuborum progressio sibi mutuo insistentium, constituens pyramidem cubicam.

Dico residuas basium superficies, nempè BKICHG, DONEML & reliquas omnes in infinitum simul sumptas, quadrato primi cubi æquales esse.

Demonstratio.

Fiat enim seriei rationis primæ AH ad tertiam EQ æqualis VZ; super qua in altitudine AH fiat rectangulum Zα, sumptâque VX æquali, AH ducatur ad Vα parallela Xβ, quæ abscindat quadratum Xα æquale quadrato AG seu HB. Rectangulum αZ per 79. huius æquatur seriei quadratorum AG, CL, EP, &c. hoc est (quoniam cuborum plana omnia sunt quadrata æqualia) seriei quadratorum HB, MD, QF, &c. ergo cum αX ex constr. quadrato AB æquale sit, erit reliquum βZ reliquæ quadratorum seriei MD, QF, &c. æquale. Atqui series quadratorum





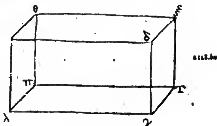
dratorum M D, Q F, &c. eadem est cum serie quadratorum K C, O E, &c. rectangulum igitur βZ seriei quadratorum C K, O E, &c. æquatur. Quare cùm rectangulum αZ & series quadratorum H B, M D, Q F, &c. itemque rectangulum βZ & series quadratorum C K, E O, &c. æqualia sint, etiam excessus rectanguli αZ super βZ, & excessus seriei H B, M D, &c. super seriem C K, E O, &c. æquales erunt. Atqui excessus αZ super βZ est αX, id est ex construct. quadratum H B: excessus verò seriei quadratorum B H, M D, &c. super seriem quadratorum C K, E O, &c. sunt figuræ B K I C H G, D O N E M L, F R δ T Q P, &c. ergo figuræ illæ omnes simul sumptæ æquantur quadrato H B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXV.

Iisdem positis,

Dico superficiem cubicæ pyramidis, æqualem esse superficiei parallelepipedi $\gamma\theta$, cuius basis $\gamma\xi$ sit primi cubi quadratū, altitudo verò $\gamma\lambda$ æqualis seriei rationis primæ A H ad tertiam E Q. Per superficiem autem pyramidis cubicæ intelligo hîc superficies omnium cuborum, exceptis quadratis C K, E O, T R, &c.

Demonstratio.



a 118. hu.

Rectangulum $\lambda\delta$ continetur lineâ $\gamma\lambda$, æquali seriei rationis A H ad E Q, & altitudine $\gamma\delta$, quę æqualis est A H: est enim quadratum $\gamma\xi$ æquale quadrato A G: igitur [a] rectāgulum $\lambda\delta$ omnibus quadratis A G, C L, &c. æquale est: reliquæ igitur hederæ $\tau\theta$, $\delta\theta$, $\gamma\pi$ æquales sunt seriei quadratorum oppositæ seriei A G, C L, &c. & seriei quadratorum B Y, D I, &c. nec non illi quę infra huius opposita est: est autem & quadratum $\gamma\xi$ basis parallelepipedi æqualis qua-

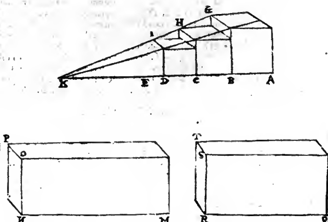
drato AS basi pyramidis cubicæ, & per præcedentem, quadratum HB, id est λϕ æquale est omnium basium residuis. Ergo tota superficies parallelepipedi, toti pyramidis cubicæ superficiei æqualis est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVI.

Data sit quadratorum progressio cui terminus longitudinis sit K; super quadratis autem exstructa sit cuborum series. Deinde per 165. huius factum sit parallelepipedum MP, æquale seriei cubicæ.

Dico superficiem huius parallelepipedi, ad superficiem pyramidis cubicæ (sumendo hic superficiem pyramidis cubicæ, vt in propositione præcedenti sumpsimus) eam habere rationem, quam linea æqualis seriei rationis AB primæ ad DE quartam, vnà cum dimidia ipsius AB, habet ad æqualem seriei rationis primæ AB ad CD tertiam, vnà cum dimidia AB.

Demonstratio.



Parallelepipedum MP factum est æquale seriei cubicæ, igitur latus MN æquale est a seriei rationis AB ad DE, & NO, OP æquales sunt singulæ ipsi AB. Fiat iam super quadrato RT quod sit æquale quadrato AB, parallelepipedum QT, in altitudine QR, æquali seriei rationis AB ad CD. ergo per præcedentem superficies parallelepipedi QT æqualis erit superficiei cubicæ pyramidis. Deinde superficies parallelepipedi MP æqualis est rectangulo b quod lineâ compositâ ex quadrupla MN & dupla NO, & altitudine NO siue OP continetur. Similiter superficies parallelepipedi QT æqualis est rectangulo cuius basis sit composita ex quadrupla QR & dupla RS; altitudo verò RS siue ST (sunt enim RS, ST æquales) quia latera sunt quadrati RT. Quare cùm dicta rectangula sint vt bases (altitudines enim NO, RS æquales habent eidem AB, ideoque æquales inter se) etiam erit parallelepipedi MP superficies, ad superficiem

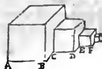
a 165. huius.
b 1. sexti.

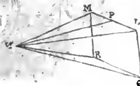
ciem parallelepipedi QT, vt basis ad basim, nempè vt composita ex quadrupla MN & dupla NO, ad compositam ex quadrupla QR & dupla RS. Atqui vt quadrupla MN cum dupla NO, ad quadruplam QR cum dupla RS, sic MN cum dimidia NO ad QR cum dimidia RS; ergo superficies parallelepipedi MP, est ad superficiem parallelepipedi QT, hoc est ad superficiem pyramidis cubicę, vt MN cum dimidia NO, hoc est vt series rationis AB ad DE cum dimidia AB, ad QR cum dimidia RS, hoc est ad seriem rationis AB ad CD cum dimidia AB: quod erat demonstrandum.

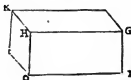
PROPOSITIO CLXXVII.

PRoportionem exhibere quam superficies pyramidis habet ad inscriptæ sibi pyramidis cubicæ superficiem: eo modo intelligendo superficiem seriei cubicæ, quo in præcedenti propositione.

Constructio & demonstratio.







ASsumemus hoc loco pyramidem isosceliam, facilitatis gratiâ. sit ergo pyramis QLMRN isoscelis, cuius basis sit quadratum QM, cui pyramis cubica AB, CD, &c. inscripta intelligatur, factoque quadrato OK æquali quadrato AB reperiatur linea GH æqualis seriei rationis AB primę ad tertiam EF; & super quadrato OK in altitudine GH, fac parallelepipedum, cuius superficies æquabitur [a] superficiei pyramidis cubicæ. Dico vt rectangulum super dupla LN & LM tamquam vnâ rectâ, in altitudine LM, est ad rectangulum super quadrupla GH & dupla AO tamquam vnâ rectâ, in altitudine HO, sic pyramidis includentis superficies, ad superficiem inclusæ pyramidis cubicæ. Ducatur enim ex vertice pyramidis N ad LM normalis NP, quæ vt ex datis facilè colliges, bisecat LM in P: rectangulum igitur NLP duplum est trianguli rectanguli LPN, vt patet ex elementis; ergo rectangulum NLP, æquale est triangulo LMN. & rectangulum NLM duplum est trianguli LMN. ergo rectangulum super dupla LN, in altitudine LM, est quadruplum trianguli LMN, hoc est æquatur toti superficiei pyramidis prę̨ter basim: quare rectangulum super dupla LN & LM tam- [a] 175. huius.

a 1. *secundi.* quam vnâ rectâ in altitudine LM, æquatur toti a superficiei pyramidis. simili discursu demonstrabimus rectangulum super quadrupla GH & dupla HO tamquam vnâ rectâ, in altitudine HO æquari superficiei parallelepipedi; ergo superficies pyramidis N, est ad superficiem parallelepipedi, hoc est ex construct. ad superficiem pyramidis cubicæ, vt sunt dicta rectangula inter se. Exhibuimus ergo, &c. quod petebatur.

Libri secundi finis.



QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER TERTIVS DE CIRCVLIS.

ARGVMENTVM.

Liber hic omnis in quatuor partes veluti membra diuiditur.
Prima de linearum in circulis agit proportione.
Secunda angulos & arcus circulares inter se comparat.
Tertia circulorum mutuas interſectiones & contactus exhibet.
Quarta linearum in circulis potentiam contemplatur.

CIRCVLORVM PARS PRIMA.

De linearum in Circulis proportione.

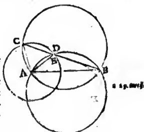
PROPOSITIO PRIMA.



Equales circuli ſeſe interſecent in A & B, centroque A, interuallo AC, circulus deſcribatur, occurrens æqualibus circulis in CD.

Dico C,D,B, puncta eſſe in directum.

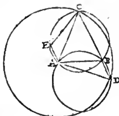
Demonſtratio.



Sit primò radius AC, minor AB, ducaturque CB, occurrens ADB, perimetro in E. iunganturque AE, AC Quoniam angulus ABC, vtrique circulorum æqualium ADB, ACB communis eſt, erunt arcus a AE, AC, illorumque ſubtenſæ æquales; hoc eſt recta AE, æqualis AC, & E punctum in peripheria circuli ADC; ſed idem E, per conſtructionem eſt in perimetro circuli ADB, igitur E punctum cum D, idem eſt, tranſirẽ; CB recta, per D, & C. quare in directum ſunt puncta C, D, B.

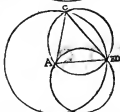
a 27. tertii.

2. Ra-



2. Radius A C maior sit rectâ A B: iunganrur C B, B D: & A B rectæ, æqualis applicetur C E, iunganturq́; A E, A D. Quoniam igitur C E linea, æqualis ponitur rectæ A B, & C A æqualis ipsi A D, sint autem & circuli A B C, A B D per construc. inter se æquales, erit arcus a C E æqualis arcui A B, & arcus C E A, æqualis arcui A B D: vnde angulus A B D, æqualis b angulo A E C. sed angulus A E C vnà cum angulo c A B C duobus rectis est æqualis, igitur & angulus A B D, cum angulo A B C duobus rectis æquatur. quare C B, B D lineæ in directum sunt.

a Ibid.
b 26. tertij.
c 22. tertij.

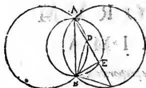


3. Radius A C. æqualis sit radio A B. pater punctum D, incidere in B. igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

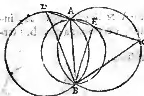
PROPOSITIO II.

Occurrant sibi denuo æquales duo circuli in A & B. circuli quoque A E B diameter sit A B, ducaturq́; recta quæuis A D, occurrens perimetris circulorum æqualium in D, & C, & circulo A E B in E. Dico in E bifariam diuidi rectam D C.

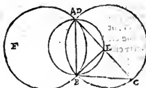
Demonstratio.



Cadant primò puncta E & D, ad eandem partem lineæ A B; ducantur rectæ D B, C B, E B: Quoniam angulus C A B, duobus arcubus D B, C B circulorum æqualium insistit, æquales erunt subtensę D B, C B: ac proinde anguli E D B, E C B, æquales; sunt autē anguli D E B, C E B, recti ob A E B semicirculum, & E B vtrique triangulorum D B E, B E C communis, triangula igitur D E B, C E B, æqualia sunt inter se, & similia: quare & C D in E bifariam diuisa.

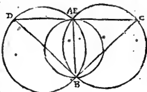


Secundò sit A punctum medium inter D, & E: Cum circuli A C B, A D B, sint æquales, & A B linea, vtrique communis triangulo D E B, E B C, erunt anguli A D B, A C B, inter se æquales; quare cùm anguli quoque ad E recti sint, erunt triangula D E B, E B C inter se æqualia & similia; ac proinde D E rectę E C æqualis.



d 32. tertij.

Tertiò linea A C contingat circulum A F B in A: punctum quoque D idem sit cum A, quia igitur A C contingit circulum A F B, erit angulus C A B, æqualis d angulo segmenti D F B, ac proinde angulo A C B (cùm A F B, A C B segmenta sunt æqualia). quare æquales quoque sunt anguli B A C, B C A: & quia angulus A E B rectus est in semi-



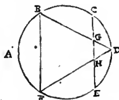
femicirculo A E B, erunt fimilia triangula & æqualia A B E, E B C: vnde & A E, E C æquales funt lineæ.

Quartò. Contingat recta C D, circulum diametri A B in A, adeoq; & punctum E, idem fit cum puncto A. cùm igitur D C fit contingens, a erunt B A D, B A C anguli recti: funt autem æquales anguli A D B, A C B, æqualium fegmentorum; igitur triangula A D B, A B C, fimilia funt & æqualia. Quod fuit demonftrandum. a 18. tertij.

PROPOSITIO III.

Diuifo circulo in fex partes æquales, punctis A, B, C, D, E, F. ductifque B F, C E, ponantur B D, F D, occurrentes C E in G & H. Dico C E lineam in G & H trifariam effe diuifam.

Demonftratio.



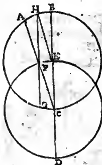
Cvm enim arcus B D, D F, F B ponantur æquales, erit B D F triangulum æquilaterum. vnde cùm C E æquidiftet B F, erit & G D H æquilaterum: eft autẽ G D æqualis b C G & H D æqualis H E; igitur C G, G H, H E lineæ, funt inter fe æquales, & C E in G & H trifariam diuifa. Quod erat demonftrandum. b Deductione 109. & 111. Pappi lib. 7.

PROPOSITIO IV.

Secent fe inuicem æquales duo circuli A B C, D E F per mutua centra C, E, tranfeuntes: lineæ verò B D, per vtriufque centrum actæ, parallela ponatur quæuis H G, occurrens perimetro in F; & per F linea C F A.

Dico G F, F A, æquales effe.

Demonftratio.



Dvcatur E H; quoniam H G, æquidiftat B C erit angulus F H E æqualis angulo H E B. & quia arcus H B, F E ob circulorum æqualitatem æquales quoque funt, erit angulus F C E æqualis angulo H E B, adeoque angulo F H E; vnde parallelogrammum vel Rhombus eft C H: & H F lineæ æqualis C E, id eft C F; eft autem rectangulo C F A, æquale c H F G rectangulum; igitur A F, G E lineæ d quoque inter fe æquantur. Quod fuit demonftrandum. c 35. tertij. d 1. fexti.

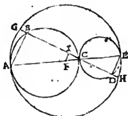
Corollarium.

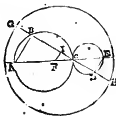
Hinc fequitur H F, B E lineas quoque inter fe æquari, cùm H F linea æquetur ipfi E C: & quia H G eft quæcumque æquidiftans diametro B C, fequitur parallelas omnes rectæ B E, cauâ circuli A B C, & conuexa F E D peripheria interceptas, effe inter fe æquales, cùm fingulæ æquentur ipfi B E.

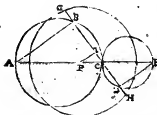
PROPOSITIO V.

Contingant sese circuli A B C, C D E. exterius in C, lineâ vero A E, per vtriusque centrum actâ, ac diuisâ bifariam in F, describatur quiuis circulus centro F, & per C, punctum contactus, recta ponatur G C H: Dico G B, D H æquales esse lineas.

Demonstratio.





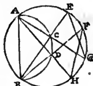


Iungantur A B, E D, illisq; æquidistans, ponatur F I, erit hæc normalis ad G H, cùm A B C angulus rectus sit; vnde & G H in I diuisa est bifariam, estque A F ad F C, vt B I ad I C: & permutando A F ad B I, vt F C ad I C. Deinde vt E C ad C F, ita D C est ad C I, & cōponendo, permutando, vt F C ad I C, ita E F ad I D: sed vt F C ad I C, sic A F ad B I, igitur vt A F ad B I, ita E F ad D I, & permutando vt A F ad E F, ita B I ad D I; sunt autem lineæ A F, F E ex hypothesi æquales inter se; ergo D I, B I, quoque inter se æquantur; quæ si demantur ab æqualibus I H, I G, manent residuæ G B, D H, inter se æquales. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Intersecent sese quiuis duo circuli in A & B; assumptisque in A C D perimetro punctis C, D, agantur per illa lineæ A C G, A D H: & B C E, B D F.

Dico iunctas E G, F H æquales esse.



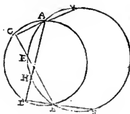
Demonstratio.

Primò, arcus A C B ambitu A G B interceptus, vtrumque punctorum C & D, contineat; quo casu cùm anguli C A D, C B D arcui C D insistentes [a] æquentur, erunt E F, G H arcus [b] quoque inter se æquales; addito igitur communi arcu F G, erunt F H, E G arcus adeoque & lineæ [c] æquales.

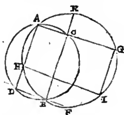
a 27. tertij.
b 26. tertij.
c 29. tertij.

Secundò arcus A C B, extra A F B ambitum; conten-

contentus, puncta C & D obtineat; cùm igitur anguli CAD, CBD, arcui CD insistentes sint æquales, erunt quoque anguli HAG, FBE reliqui æquales; ac proinde arcus FGE, FGH, adeoque iunctæ EG, HF ęquales.



Tertiò punctum C intra AGB circuli spatium contineatur; D verò punctum extra collocatum sit. Ducatur GI æquidistans CB, iunganturque HI: quoniam GI, CB æquidistant, anguli ACB, AGI, æquales sunt; vnde & angulus AHI æqualis est angulo ADB: quia AHI, a cum AGI, hoc est ACB duobus rectis ęqualis est, sicut est angulus ACB cum ADB. Vnde æquidistantes sunt HI & DF, adeoque & arcus HB, FI & consequenter HF, BI æquales. quare & iuncta HF id est BI ipsi EG æquatur. Quod erat demonstrandum.



a 22. tertij.

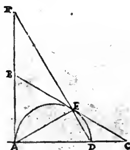
PROPOSITIO VII.

ESto ABC triangulo rectangulo, semicirculus inscriptus AED contingens AB, BC latera in A & E: & per E ponatur recta DE occurrens AB, in F.

Dico AB, BF lineas, ęquales esse.

Demonstratio.

IVngantur AE: erit igitur angulus AED in semicirculo rectus, vti & reliquus AEF: qui proinde æqualis est duobus angulis EFA, EAF: est autem angulo EAF æqualis BEA, cùm AB, BE sint contingentes ex eodem puncto eductæ; adeoque æquales; reliquus igitur angulus AFE, reliquo BEF æqualis est: quare BF rectę BE, hoc est AB, æqualis est. Quod erat demonstrandum.

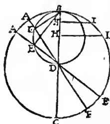


PROPOSITIO VIII.

CIrculum ABC, contingat intus circulus DEB, in B. transiens per D centrum circuli ABC; ductis insuper per D rectis ADF quæ circulo DEB occurrant in E: fiant DE rectis æquales DH, & perpendiculares ponantur HI ad diametrum BC.

Dico EB, HI lineas, æquales esse.

Demonstratio.

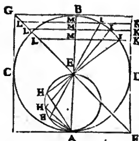


QVoniam BD, lineę ipsi DA sunt æquales; veluti & HD, rectis ED ex hypothesi, erunt residuæ HB, residuis EA æquales. quare AEF rectangula, rectangulis BHC æqualia, hoc est quadrata HI, quadratis EB: æquales igitur sunt EB, HI. Quod demonstrandum fuit.

PROPOSITIO IX.

ESto circulo ABC, cuius diameter AB, & centrum E circumscriptum quadratum GF: & super AE vt diametro, descripto circulo AHE, per centrum E, lineæ ponantur HL, & per I parallelæ rectæ AF, occurrentes FG, diametro quadrati in L, rectæ verò FD in K. Dico HL, KL lineas inter se ęquales esse.

Demonstratio.



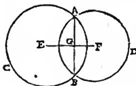
COniungantur H, A, & rectæ KL, secent AB, diametrum in M: Quoniam LK lineæ, tangenti GB æquidistant, erunt IM, a normales ad diametrum AB, adeóque anguli IME, angulis EHA æquales; sunt autem & IEM anguli, æquales angulis HEA, ad verticem positis, & EI lineæ, æquales rectæ EA; triangula igitur HEA, triangulis IME sunt æqualia: vnde HE, lineis EM, & HA, rectis MI æquales. Rursum cùm LM, lineæ GB æquidistent, erit vt GB ad BE, ita LM, ad ME. sunt autem GB, BE æquales, ergo & LM, EM æquales quoque sunt. Quare cùm MK, hoc est EB, lineis EI, & rectæ LM, ipsis ME, id est HE, ex demonstratis sint æquales, erunt HI lineę, æquales rectis LK; quod fuit demonstrandum.

a 18. tertij.

PROPOSITIO X.

QVod si per circulorum sese secantium centra, recta ducta sit, quam altera intersecet, sectionum puncta coniungens. Dico duas illas sese orthogonaliter decussare.

Demonstratio.



SInt enim circuli duo ABC, ADB quorum centra E, F, coniungat EF recta; & puncta intersectionum recta AB, occurrens EF lineæ in G, oportet ostendere angulos ad G rectos esse. ductâ EG normaliter ad AB, secta erit AB bifariam in G; sed recta quæ ex G ducitur, ad F centrum, diuidens AB bifariam in circulo ADB, eidem quoque AB orthogonaliter insistit; patet igitur

igitur lineas AB, EF sibi inuicem normales esse. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

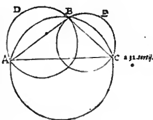
Hinc patet, EF lineam, quæ circulorum sese intersecantium centra coniungit, bifariam quoque diuidere arcus, mutuis peripherijs interceptos.

PROPOSITIO XI.

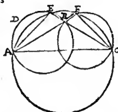
Esto ABC triangulum, super cuius basi AC, descriptum sit quodlibet circuli segmentum; oportet super reliquis trianguli lateribus, segmenta describere, similia illi, quod super base descriptũ est segmento.

Constructio & demonstratio.

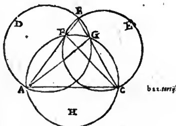
Transeat primò segmentum super basi positum, per singula trianguli extrema; describatur autem circulus per BC, vti & per BA, qui rectas AB, BC contingat in B. Dico factum quod postulatur. Quoniam BC linea contingit circulum ADB in B: erit angulo ABC, æqualis angulus ᵃ segmenti ADB. eodem modo angulus segmenti BEC, æqualis est angulo ABC. quare segmentorum anguli AEB, ABC, BDC, æquales sunt inter se; & similia proinde segmenta. a 32. tertij.



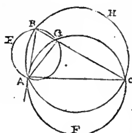
Secundò B vertex trianguli ABC, cadat infra perimetrum segmenti, super AC exstructi: productis lateribus AB, BC, donec occurrant peripheriæ circuli AEC, in F & E, describantur circuli per AEB, BFC: eritque peractum quod postulatur: iunctis enim AE, CF. exsurgent anguli AEC, AFC eidem arcui insistentes æquales, ac proinde ADB, AEC segmenta similia erunt: rursum cùm angulus AEC sit æqualis angulo AFC, id est BFC, erunt & segmenta AEC, BFC, inter se similia. quare tria ADB, AEC, BFC, similia sunt.



Tertiò B vertex trianguli ABC, extra segmenti ambitum constitutus sit, quod super basi exstructum est; occurratque perimeter trianguli lateribus in punctis F, & G. Tum per BFC, BGA, circuli describantur. Dico factum esse quod petitur. Iungantur AG, FC. Quoniam anguli AFC, AGC æquales sunt, erunt & BFC, BGA reliqui æquales. quare & arcus ADB, BEC quibus insistunt, similes sunt. Rursus cùm angulus AGC tam cũ angulo ᵇ segmenti AHC, quàm cum AGB angulo, duobus rectis æquetur, dempto communi angulo AGC: erunt anguli AGB, AHC, adeoque & residuorum segmentorum anguli ADB, AGC, æquales, & AGC, BDA, segmenta similia: est autem BEC segmentum ostensum simile segmento ADB, tria igitur segmenta AGC, ADB, BEC sunt inter se similia. b 22. tertij.



Quartò B punctum cadens extra segmentum baseos, constituat BA, trianguli latus, contingens circulum AGC in A: latus verò BC, eundem secet in G. per puncta B, A, C, & A, B, G, circuli describantur; dico illos satisfacere petitioni



a 32. tertij. b 22. tertij.

iungantur A, G. Quoniam AB contingit circulum A G C in A, erit angulo a B A C, æqualis angulus segmenti AFC. vnde B A C, AFC, ideoque reliqua AGC, BHC segmenta sunt similia: vlterius cùm angulus A G C tam cum angulo A G B, quàm cum angulo segmenti AFC, b duobus rectis sit æqualis, dempto communi angulo A G C, erunt A G B, A F C æquales anguli; vnde & angulus segmenti A E B, æquatur angulo A G C, adeoque A E B, A G C segmenta sunt similia. igitur constat veritas propositionis.

Corollarium.

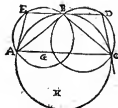
HInc patet in secundo casu, si super A B C. trianguli lateribus similia descripta sint circulorum segmenta rectas A B, C B productas cadere in communes intersectiones E, F: si enim per B & puncta quibus A E C perimetro occurrunt circuli describantur. erunt A E B, B F C segmenta similia segmento A B C.

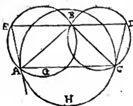
PROPOSITIO XII.

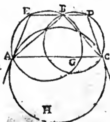
SVper A B C trianguli lateribus descripta sint A E B, A B C, B D C similia circulorum segmenta; ductæque lineæ ex A & C circulum A B C, contingant in A, & C, peripherijs autem occurrant in D, & E.

Dico E, B, D, puncta esse in directum posita.

Demonstratio.







c 32. tertij. d 22. tertij.

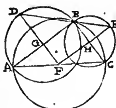
QVoniam E A, contingit circulum A B C erit angulo c E A C, æqualis angulus segmenti A H C, hoc est segmenti A G B quod illi simile est, sed angulus A E B, vnà cum angulo segmenti A G B, duobus rectis d est æqualis, igitur A E B, E A C anguli duobus rectis sunt æquales; adeoque E B, A C lineę parallelæ: eodem modo ostenduntur A C, B D, æquidistantes esse; quare constat E B, B D, in directum esse constitutas: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

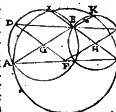
SVper lateribus trianguli A B C, similia circulorum segmenta descripta sint per quorum centra G, H, ex centro F, segmenti super A C basi

basi trianguli descripti educantur rectæ occurrentes perimetris in D & E. Dico puncta D, B, E, in directum constituta esse.

Demonstratio.



PRimò vertex trianguli ABC in perimetro sit circuli, qui super basi AC; describitur. iunganturque DB, EB. Quoniam FD, per centra F & G, acta est, secabit bifariam, tum a rectā AB, tum arcum ADB. eadem quoque ratione radius FH, diuidet bifariam cum BC rectam, tum BEC arcum. Igitur cū ADB. BEC similia sint segmenta anguli ABD, CBE similibus arcubus insistentes, æquales sunt: quare & angulus ABD æqualis est angulo BCE, quia EB arcus æqualis est arcui EC. est autem angulus ABC æquales angulo BEC ex hypothesi, igitur anguli ABD, ABC, CBE æquales sunt tribus angulis trianguli BEC adeoque duobus rectis æquales, quare lineæ DB, BE b sunt in directum. a 10. huius. b 14. primi.



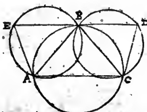
Secundò B apex trianguli, super basi ABC erecti, intra segmenti AKC aream cadat; producantur AB, CB, cadēt illæ in cōmunes c circulorum intersectiones I & K; Quoniam FG, FH lineæ centra cōiungunt circulorū sese intersecantium erunt arcus ADI, KEC in D & E bifariam d diuisi, vnde ABD, DBI anguli, item KBE, CBE sunt æquales, sed & anguli ABI, CBK ad verticem oppositi quoque inter se æquantur, igitur & angulus ABD, ipsi KBE & IBD, angulo EBC est æqualis, quare in directum sunt D, B, E puncta. Quod erat demonstrandum. c Coroll. prop. vndec. huius. d 10. huius.

PROPOSITIO XIV.

QVod si super ABC trianguli lateribus segmenta circulorum similia, descripta fuerint, & recta quædam ED, per B, verticem acta, circulorum AEB, BDC, perimetris occurrat in D, & E.

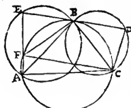
Dico lineas inter cauas circulorum AEB, BDC peripherias & extimam circuli ABC interceptas, æquales esse.

Demonstratio.

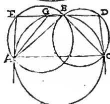


SIt primò triangulum Isosceliun ABC, & ED contingat circulum ABC in B: iunganturque AE, CD: Quoniam EB est contingens, erit angulo EBA, æqualis e angulus ACB: eadem ratione angulus CAB æqualis est angulo CBD: vnde cūm anguli BAC, BCA per hypothesim sint æquales, erunt quoque anguli EBA, CBD inter se æquales. sunt autem & anguli AEB, CDB, (ob AEB, CDB segmenta similia) æquales, insuper & AB, linea æqualis lineæ BC; igitur triangulum AEB, triangulo CBD & EB latus, lateri BD est æquale. e 32. tertij.

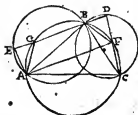
Secundò ED ponatur contingens, triangulo ABC existente Scaleno, dico ED in B bifariam secari. sit AB latus, altero BC maius, & ED contingenti, ponatur



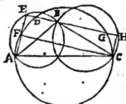
natur æquidistans C F: iunctaque AF, concurrat cum D B, producta in E. quoniam parallelæ sunt CF, DE, erit angulus AFC angulo AED æqualis: sed AFC æqualis ponitur angulo segmenti AEB: igitur concursus AF, cum DB producta, fit in perimetro circuli AEB: Rursum quia contingens est ED, eidemque æquidistat CF, erunt segmenta BF, BC æqualia, ac proinde iunctæ FB, BC, quoque inter se æquales. vnde similia sunt, & æqualia triangula FEB, BDC, ideoque EB æqualis BD.



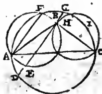
Tertiò, recta ED circulum non contingat super basi AC erectum, sed intersecet in puncto quodam G. sitque ED æquidistans AC. dico EG, BD lineas æquari. cùm enim ED, AC æquidistent, erunt, AG, BC arcus adeoque & subtensæ æquales: vnde & anguli GAC, BCA æquales sunt, vti & anguli illis alternatim positi EGA, DBC; quocirca similia sunt & æqualia triangula EAG, BDC; & recta EG, ipsi BD æqualis.



Quartò, quod si recta ED per B ducta occurrens perimetro ABC in G, non æquidistet AC, ducatur AF parallela ED, & ducta CF, occurrat EB, productę in D. quoniam parallelæ sunt ED, AF, erit AFC angulus angulo EDC ęqualis: sed AFC ęquatur angulo segmenti BDC ex positione, igitur D in perimetro est circuli BDC; & quia æquidistant ED, AF erunt arcus AG, BF, æquales, adeoque & subtensę AG, BF. cumque æquales sint anguli GAF, BFA, ęqualibus arcubus insistentes, erunt & anguli EGA, DBF quoque æquales: sunt insuper æquales anguli AEG, BDF, ob segmenta similia; igitur triangula similia sunt & æqualia AEG, BDF; vnde & lineæ EG, BD, æquales.

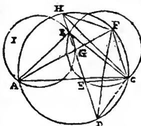


Quintò cadat B vertex trianguli ABC intra aream circuli supra basim trianguli descripti: & primò recta EH per apicē B transiens, basi trianguli non occurrat. ducatur CF æquidistans EH, donec conueniat cum AF producta in E. ostendetur vti priùs punctum E in perimetro esse circuli AEB, & FED, GHC triangula, adeoque & latera ED, GH inter se æquari. Secundò recta per apicē B acta, occurrat basi trianguli: quo casu demonstrandum est lineam ED, rectę GH æqualem esse. Quoniam EH per B ducta occurrit basi trianguli AC; vel alterum circulorum contingit in B, (quo casu apparet ED, GH, æquales esse: cum FHG, ADE triangula facile ex datis ostendantur æqualia.) vel vtrumque circulorum super lateribus trianguli ABC descriptorum secat in G, & E, circulū autem super basi factū, in D, & HI; quo casu ducatur ex A per G, linea AGF, iungāturque puncta EC, CF, FH, CD; angulus AGB vnà cum angulo segmenti AIB. æqualis est duobus rectis; sed angulo AIB, æqualis est angulus AFC ex hypothesi, & angulo AGB æqualis

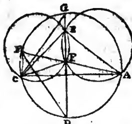


a 22. tertij.

lis angulus E G F ipsi A G B ad verticem positus; igitur anguli A F C, E G F, sunt duobus rectis æquales: adeoque B D, F C parallelæ, & arcus H F, C D, eorumque subtensæ æquales; vnde & anguli D H F, H D C æqualibus arcubus insistentes, æquales sunt: est autem angulus A G B, æqualis angulo C E B, (cum A G B, B E C segmenta reliqua sint similia) adeoque & reliquus F G H, æqualis reliquo C E D: igitur triangula F H G, C E D, sunt inter se æqualia: & H G latus æquale lateri E D.

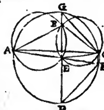


Sextò, quod si recta G D per apicem acta, per communem intersectionem E transeat: sic ostendetur æquales esse rectas G E, E D: sint primò segmenta similia, semicirculis maiora; ductaque ex A per E, recta A E F, iungantur C E, C F, F D, C G: Quoniam igitur segmenta similia, semicirculis sunt maiora, erit E extra lineam A C. si enim fieri possit, sit C E A vna eademque linea cum A C. cùm ergo ob similitudinem segmentorum, anguli B E A, B E C sint inter se æquales, erunt etiam recti: quod fieri non potest, cùm segmenta



sint semicirculis maiora. quare punctum E non est in linea A C. Cùm igitur angulus A F C, vnà cum angulo segmenti A D C, duobus rectis sit æqualis, sitque angulo A D C, æqualis angulus A E B (ob A D C, A E B segmenta similia) id est angulus D E F ad verticem oppositus, erit angulus A F C vnà cum angulo D E F, duobus rectis æqualis; vnde F C, B D, lineæ æquidistant: & arcus G F, D C, adeoque & arcus G C, D E eorumque subtensæ æquales, &c. vt priùs. *ibid.*

Si verò segmẽta similia minora fuerint semicirculis: demonstrabitur vt priùs, punctum E, esse extra lineam baseos A C. quia verò A F C, A E B segmenta sunt similia, erunt anguli A E B, A F C æquales; sed angulo A E B æqualis est angulus ad verticem D E F; igitur anguli D E F, A F C sunt æquales, & B D, F C rectæ æquidistantes: quare & arcus G C, D F, eorumque subtensæ æquales sunt: &c. vti priùs.



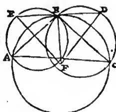
Reliquum esset casus eosdem explicare cùm vertex trianguli A B C cadit in peripheriam vel extra aream circuli qui supra basim A C constitutus est; sed quia omnes illi, demonstrationes communes habent & constructiones cum casibus quos explicuimus, dum nimirum vertex B, ipsa area continetur, lectorem non vlterius defatigandum censeo: hoc tamen præmoneo, vt dum B vertex trianguli, cadit extra segmentum baseos, casus excludat, quos in medium protulimus qui B D lineam iubent ea ratione duci, vt cum basi trianguli non conueniat, quos ineptos esse huic materiæ manifestum est.

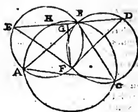
PROPOSITIO XV.

SI denuo super A B C trianguli lateribus segmenta circulorum similia constructa fuerint; ac per B verticem ponatur E D, ad cuius extrema ex centro F circuli super basi descripti, ducantur F E, F D.

Dico eas inter se æquales esse.

Demonstratio.





a 18. tertij. CONtingat recta E D, circulum A B C in B; erit igitur B F normalis[a] ipsi E D: vnde cùm lineæ B E, B D, per præcedentem æquales sint, erunt etiam æquales F E, F D:

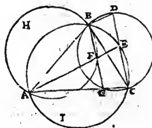
b 3 tertij. c 14. huius. Iam verò E D, circulum A B C secet in puncto quodam H: ducaturque ex F recta F G, perpendicularis ad E D: igitur[b] H G, G B æquales sunt; ostendimus autem E H,[c] B D quoque æquales esse; igitur F E, F D æquales sunt. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

SVper A B C, trianguli lateribus, segmenta circulorum similia constituta sint, & ex C recta educta C D; cui ex B vertice trianguli parallela ponatur B F, occurrens circulo A H B in F:

Dico E D, B F, æquales esse lineas.

Demonstratio.



SIt primò vertex trianguli in perimetro circuli A B C constitutus; linea verò D C sit extra triangulum A B C: ponatur iunctæ B D æquidistans A F, occurrens rectæ C D in E; igitur angulo B D C, æqualis est A E C, sed & B D C angulo æquatur angulus segmenti A E C, igitur punctum E, communis est intersectio circuli A B C & rectæ C D: & quia segmenta circulorum A B C, B D C similia sunt, erit angulus A F B æqualis illi qui segmento A I C continetur; igitur & punctum F communis est intersectio circuli A H B, & rectę B F: cùm igitur parallelogrammum sit B F E D, manifestum est E D, B F lineas inter se æquales esse. Quod oportuit demonstrare.

Secundò

Secundò, C D linea in directum posita sit, cum A C, & recta B F æquidistans basi A C; iungantur A F; & B D ponatur æquidistans ipsi A F occurrens A C in D. Quoniam A C, B F, item A F, B D æquidistant, erit angulus C A F (id est C D B in secunda figura) vnà cum angulo B F A (id est B D C in prima figura) æqualis duobus rectis. sed angulo B F A, per constructionem est æqualis angulus segmenti C G B. Igitur C D B angulus, vnà cum angulo segmenti C G B duobus rectis est æqualis. quare punctum D est in perimetro circuli C G B & A C linea eidem bis occurrit: quare cùm F D parallelogrammum sit: patet F B, E D lineas æquari.

Tertiò, recta C D cadat infra basim trianguli A B C, occurrens circulo B C D, in D; & circulo A B C in E; ita tamen vt ducta B F parallela ipsi C D, cadat supra latus A B, dico B F, D E lineas esse inter se æquales. ducatur enim ex E per A linea, occurrens B F in F iunganturque B D, cùm igitur segmenta B D C, A E C similia sint, erit angulus B D C, æqualis angulo A E C, adeoq; B D, F E lineæ æquidistantes. vnde F D parallelogrammum est & F B, D E latera æqualia. Rursum angulus E F B vnà cum angulo F E D id est angulo segmenti A G B æqualis est duobus rectis: quare punctum F, est in peripheria circuli A F B. in secunda verò figura, quia angulus B D C id est A B C vnà cum angulo A E C, duobus rectis est æqualis, erunt B D, A E parallelę: reliqua vt antè.

Quartò, sit B F linea eadem cum recta A B; ducatur ex C recta C E æquidistans A B: iunctaque F E, demittatur ex B recta B D, quæ æquidistet E F: occurrens C E in D: ostendetur vt priùs punctum D esse communem intersectionem circuli B D C, & rectarum B D, C E: quare cùm F B, C E & B D, F E, sint æquidistantes, patet F B, E D æquales esse.

Quin-

Quintò, quod si rectæ DE, BF infra latus AB constituantur, & BF quidem secet circulum AFB in F: ponatur recta AFE, occurrens CE in E: & AF æquidistans BD: ostendetur vt prius punctum E in perimetro AEC circuli consistere, vti & punctum D in perimetro circuli BDC: vnde cùm parallelæ sint FB, DE, FE, BD, manifestum est, FB, ED esse æquales.

Sextò, tandem lineæ FB, DC, supra basim AC constitutæ sint, & CD occurrat circulo ABC in E: agaturque per E, recta AE, occurrens FB in F: deinde ex B ponatur BD parallela ipsi AF: erit angulus AFB in segmento AFB: & punctum D, communis intersectio rectarum CD, BD, & perimetri BDC: cùm angulus BDC æqualis sit angulo segmenti AKC. qui cum angulo AEC, hoc est AFB, hoc est BDE, duobus rectis est æqualis: patet igitur lineas FB, DE, æquales esse inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVII.

Contingant sese intus in B circuli duo ABC, EBG: sitq; E centrum maioris; positâ deinde BF contingente, ducantur EF, occurrentes circulo EBG in G: ex quibus normales ponantur ad BD diametrum, rectæ GI.

Dico EI, EG, EH, EF esse quatuor in continua analogia.

Demonstratio.

Svnt enim ex elementis continuæ proportionales EI, EG, EB, hoc est EH: sed vt EI, ad EG, ita est EB, id est EH, ad EF; sunt igitur in continua ratione EI, EG, EH, EF. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

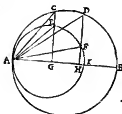
Contingant sese item circuli duo ABC, AEF, in A; quorum centra contineat diameter maioris AB, ad quam positis normaliter CG, DH, quæ occurrant perimetro AEI, in E & F. collocentur AC, AD: & AE, AF.

Dico AC ad AD, eandem rationem habere, quæ inter AE, AF, reperitur.

Demon-

Demonstratio.

QVadratum enim A C, ad A D quadratum est vt G A B rectangulum ad rectãgulum H A B per elemenra: hoc est vt G A linea ad lineam H A: sed vt G A ad H A, sic G A I rectangulum ad rectangulum H A I, id est quadratum A E, ad A F quadratum; ergo vt quadratum A C, ad A D quadratum, ita est A E quadratum ad quadratum A F, quare vt A C linea ad A D lineam, ita A E, ad A F. Quod erat demonstrandum. a 1. sexti.

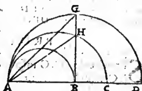


PROPOSITIO XIX.

SInt continuæ proportionales A B, A C, A D, diametri circulorum sese intus in eodem puncto contingentium, erectaque ex B normaliter B G occurrente perimetris in H & G, iungantur A G, A H.
Dico A B, A H, A G, esse in continua analogia.

Demonstratio.

SVnt enim in continuata ratione A B, A H, A C. veluti etiam A B, A G, A D per elementa. quare A G media est inter A B, A D; sed ex hypothesi ipsa quoq; A C media ponitur inter A B, A D. Igitur A C, A G lineæ sunt æquales; adeoque in continua sunt ratione A B, A H, A G. Quod fuit demonstrandum.

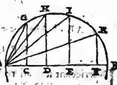


PROPOSITIO XX.

SI diuisa fuerit diameter A B in cõtinuè proportionales A C, A D, A E, A F, &c. ponanturque normaliter ad diametrum, C G, D H, E I, F K. Dico iunctas A G, A H, A I, A K, in continua quoque esse analogia.

Demonstratio.

SVnt enim quadrata A G, A H, A I, A K inter se vt rectangula B A C, B A D, B A E, B A F vt ex elementis patet; sed rectangula illa sunt vt A C, A D, A E, A F; igitur & quadrata A G, A H, A I, A K sunt vt lineæ A C, A D, A E, A F: quæ cùm ponantur continuæ proportionales, patet & quadrata A G, A H, A I, A K, adeoque & lineas, in continua esse analogia. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO XXI.

IN semicirculo A B C recta collocata sit B D perpendicularis ad diametrum A C, quâ diuisa bifariam in H: centro H, interuallo H B, de-

ſcribatur circulus B G D, ponanturq; H C, quidem occurrens perimetro circuli B G D in G, recta verò B G, diametro A C in E.

Dico A D, D E, E C, tres lineas, eandem rationem continuare.

Demonſtratio.

POnatur E F, æquidiſtans B D, iunganturque D G, G F, A B, quoniam E F æquidiſtat B D quæ in H diuiſa eſt biſariam, erit E I æqualis I F: vnde vt E I ad B H, id eſt F I ad H D, ſic E G ad G B id eſt I G ad G H, & permutando vt F I ad I G, ita D H ad H G. quare cùm anguli D H G, F I G lateribus proportionalibus contenti ſint æquales (ob H D, F I parallelas) ſimilia erunt triangula F I G, H D G: ſicut & G I E, B H G, item F E G, B D G: ſunt ergo in directum D, G, F, puncta, vt ex elementis patet. Vlterius quia ſimilia ſunt triangula B D G, D G E, erit B D ad D E vt B G, ad D G: id eſt E G ad G F: ſed vt E G ad G F ſic D E eſt ad E F cùm D G E, G E F ſimilia ſint triangula, igitur B D eſt ad D E vt D E ad E F: quare ſunt proportionales B D, D E, E F & rectangulum B D F E, quadrato D E æquale. ſunt autem ſimilia quoque triangula A D B, E F C. igitur vt A D, ad D B, ita F E ad E C. vnde rectangulo A D E C. æquale eſt rectangulum B D E F, hoc eſt quadratum D E. ſunt igitur continuæ proportionales A D, D E, E C: quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

SEmicirculo A B C inſcriptum eſto triangulum cuius alterum latus B C, ſemidiametro ſit æquale.

Dico B C, A B, & aggregatum ex A C, C B, tres eſſe in continua ratione.

Demonſtratio.

a 16. primi.

FIat A D ſeſquialtera A C: iungaturque B D: arcus A B duplus eſt arcus B C, quia C B latus hexagoni eſt; igitur & angulus B C A, duplus anguli B A C: ſed angulus B C A, quoque duplus eſt anguli a B D A cùm ſit B C D Iſoſceles per conſtructionem: igitur angulus B D A æqualis eſt angulo B A D & A B, B D latera æqualia inter ſe; vnde ſimilia ſunt triangula B D C, B D A: & vt C D id eſt B C ad D B, ita D B hoc eſt A B ad A D, hoc eſt ad A C, C B. Quod fuit demonſtrandum.

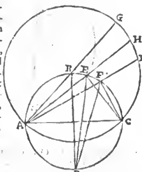
PROPOSITIO XXIII.

INterſecent ſeſe ad rectos, diametri A C, B D; poſitiſque A E C, A F C, iungantur E D, F D.

Dico D E, ad D F, eandem habere rationem quam aggregatum duarum A E, E C, ad aggregatum A F, F C.

Demon-

Demonstratio.



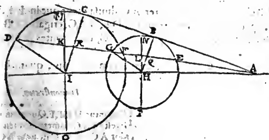
Centro B, interuallo A B describatur circulus A C G, cui productæ A B, A E, A F, occurrant in G, H, I; Quoniam A G, B D, circulorum suorum diametri sunt, anguli A H G, A I G æquales erunt angulis D E B, D F B, sed & anguli B A E, E A F æquales sunt angulis B D E, E D F, quòd iisdem insistant arcubus; similia igitur sunt triangula G A H, H A I triangulis B D E, E D F, & A H, A I lineę proportionales ipsis E D, F D. quare cùm sint ęquales A H, A I, rectis [a] A E C, A F C, patet aggregatum A E, E C, ad aggregatum A F, F C, eandem obtinere rationem, quam recta D E, ad D F. Quod fuit demonstrandum. a Serenus l. 1. prop. 45

PROPOSITIO XXIV.

Contingat A B inæquales circulos, conueniens cum recta per vtriusque centrum acta in A: ex quo ponatur A D occurrens circulis in E, F, G, D.

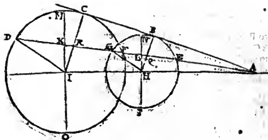
Dico A B ad A C eandem continere rationem, quam obtinet A G ad A D, vel A E ad A F.

Demonstratio.



Ad puncta contactuum ex centris ducantur diametri I C, H B, itemque aliæ binę diametri H N, I M, & ad rectam D A normales, quoniam igitur anguli ad B & C recti sunt, parallelæ erunt rectæ H B, I C. Ergo vt A B, ad A C, sic H B ad I C, hoc est H Q ad I R. Deinde, quia anguli, I K R, H L Q recti sunt, & I R K, H Q L anguli (quòd H Q, I R sint parallelę,) sunt ęquales; triangula I R K, H Q L, erunt similia, ac proinde H L est ad I K, vt H Q ad I R, hoc est (sicut iam ostendi) vt H B ad I C, hoc est (quoniam H N, I M diametri, æquantur diametris H B, I C) vt H N ad I M. Quia igitur est H L ad I K, vt H N ad I M, erit permutando ac inuertendo N H ad P H, vt M I ad K I, adeoque quadratum N H ad quadratum L H, vt quadratum M I ad quadratum K I. sed [b] quadratū N H æquatur rectāgulo N L P cū quadrato L H, & quadratū M I, rectangulo M K O cū quadrato K I. ergo rectangulū N L P, cum quadrato L H est ad quadratū L H, vt rectāngulū M K O cū quadrato K I ad quadratū K I: ergo diuidendo rectangulū N L P est ad quadratū L H, b 5. secundi

vt



vt rectangulum MKO ad quadratū KI. Atqui rectangula NLP, MKO æquantur quadratis GL, DK, quòd GL, DK sint ad diametros NP, MO normales: ergo quadratum GL est ad quadratum LH vt quadratum DK ad quadratum KI. ergo recta GL est ad rectam LH, vt recta DK ad rectam KI: quoniam igitur anguli quoque GLH, DKI, vtpote recti ex constr. æquales sunt, erunt triangula a GLH, DKI similia, adeoque anguli HGL, IDK æquales. ergo GH, DI parallelæ sunt. Ergo vt AG est ad AD, sic AH, ad AI, hoc est quia HB, IC etiam sunt parallelæ, vt AB ad AC. Quod erat primum. simili ratione ostenduntur iunctæ IF, HE æquidistare, adeoque esse vt AH ad AI, id est AB ad AC, sic AE ad AF. Quod erat demonstrandum.

a 6 sexti.

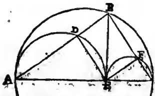
PROPOSITIO XXV.

SIt ABC semicirculi diameter AC diuisa vtcunque in E: descriptisque super AE, EC semicirculis ADE, EFC, erigatur EB normaliter ad diametrum, ponanturque AB, BC, occurrentes perimetris in D & F.

Dico rationem CF ad DA, triplicatam esse illius, quam habet CB, ad AB.

Demonstratio.

IVngantur DE, EF. Quoniam EB normalis est ad AC diametrū semicirculi ABC, erunt AC, CB, CE, item AC, AB, AE continuę proportionales; sed vt BC ad CE sic EC ad CF (ob EFC, BEC triangula similia,) & vt AB ad AE sic AE ad AD (ob ABE, ADE triangula similia) igitur tam AC, CB, CE, CF, quàm AC, AB, AE, AD sunt continuæ proportionales: vnde cùm vtrique seriei prima sit communis AC, erit b CF ad AD quarta ad quartam, in triplicata ratione CB ad AB, secundæ ad secundam. Quod erat demonstrandum.



b 17. de pro. gressionib.

PROPOSITIO XXVI.

SEcent sese tres circuli in punctis A, B, & ex A quæuis rectæ AC, AD, eductæ perimetris occurrant in E, F, G, H:

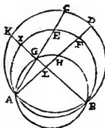
Dico GE, EC, rectis HF, FD, esse proportionales.

Demon-

Demonstratio.

AGatur recta BK per G, occurrens AD in L & perimetris in I & K, cùm rectangula ALH, GLB,[a] æqualia sint; vti & rectangula ILB, ALF, & KLB, ALD; erunt rationes [b] laterum reciprocæ: hoc est, erit AL ad LB, vt GL ad HL, & AL ad LB, vt IL ad LF, vel KL ad LD: quare etiam vt GL ad LH, [c] ita IG ad HF, & LK ad LD, siue IK ad FD. rursum cùm sit vt AG ad GB, ita IG ad EG vel KG ad GC (ob AGE, IGB, item KGB, AGC rectangulorum æqualitatem) erit IG ad GE, vt KI ad EC. quare ex æquo EC ad FD vt GE ad HF. Quod fuit demonstrandum.

[a] 35 tertij.
[b] 14 sexti.
[c] 19 quinti.



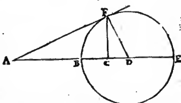
PROPOSITIO XXVII.

E Puncto A extra circulum posito, ducta ad centrum eiusdem linea AD diuisa sit in tres continuò proportionales. quarum media sit semidiameter BD, tertia CD: erectaque ex C perpendiculari CF, iungantur AF.

Dico AF contingentem esse & contra.

Demonstratio.

POnatur DF. Quoniam DC, DB id est DF, DA, circum angulum communem ADF proportionales sunt, erunt FCD, AFD triangula similia: vnde angulus AFD æqualis est angulo FCD per hypothesim recto: quare AF circulũ cõtingit. Quod erat primũ.



Iam verò sit AF contingens & FC normaliter ad AD diametrum posita. Dico AD, BD, CD in continuâ esse analogia: cùm enim AF sit contingens & FD diameter, erit angulus AFD rectus adeoque æqualis angulo FCD, est autem angulus ADF communis triangulis AFD, FCD, igitur triangula illa similia sunt, & AD ad DF, id est DB, vt DF ad DC. Quod erat demonstrandum.

Est hæc Apollonij l. prim. propos. 35. aliter demonstrata.

PROPOSITIO XXVIII.

COntingat AB linea circulum BCD: ductaque AD per centrum ponatur ad illam orthogonalis BE, quam in G secet quædam AF, occurrens circulo in H, F:

Dico quadratum AB, æquari rectangulo FGH, vnà cum quadrato GA.

Demonstratio.

EST enim quadratũ AB æquale quadratis BE, EA, hoc est rectangulo BGI, vnà cũ quadratis GE, EA, vt ex elementis patet: est autem quadratum GA, æquale duobus GE, EA: ergo AB quadratum æquatur BGI hoc est GFH rectangulo vnà cum quadrato GA: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

IIsdem positis si iungantur HE, FE;
Dico lineas tres HE, BE, FE, in continua esse analogia:

Demonstratio.

SI enim HE intelligatur produci in K, erit EK æqualis ipsi EF, vt ex elementis educitur, vnde & HEF rectangulum, æquale est rectangulo BEI, id est quadrato BE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXX.

IIsdem positis:
Dico AF ad AH, eandem habere rationem quam FG ad GH, siue AF in G & H diuisam, extrema & media ratione proportionali.

Demonstratio.

a 28. huius. b 35. tertij. REctangulum FGH, vnà cum quadrato GA, æquatur BA [a] quadrato, sed BA, quadrato æquale est [b] rectangulum FAH, igitur FGH rectangulum vnà
c 2. secundi. cum GA quadrato æquatur FAH rectangulo: quadratum autem AG, æquale est [c] rectangulis AGH, GAH; rectangula igitur FGH, AGH, GAH, æquantur
d 1. secundi. FAH rectangulo: Rectangulo autem FAH, æqualia quoque sunt [d] rectangula FGHA, GAH, ablato igitur communi rectangulo GAH, manet FGHA rectangulum, rectangulis AGH, FGH, id est rectangulo FAGH æquale, vnde vt FA, ad HA, sic FG ad GH. Quod fuit demonstrandum.

Scholion.

H*Aec propositio proponitur à Pappo libro septimo propositione* 154. *sed quia soli casui videtur applicata quo recta* AD, *per centrum ducta est circuli* BDC. *adeoq; & videatur casum recta* AF *excludere, placuit ostendere vniuersalem prorsus esse: Quod ipsum præstat Apollonius lib.* 3. *propositione* 37. *sed diuerso à præsenti discursu.*

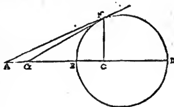
PRO-

PROPOSITIO XXXI.

EX A ducta sit per centrum circuli B D F recta A D, sitque A D ad A B ratio eadem, cum ratione D C, ad C B: erecta deinde normali C F, iungatur A F.

Dico A F contingere circulum.

Demonstratio.

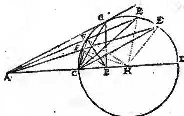


SI enim non contingat, ponatur per F contingens F G occurrens A D in G: erit ergo per praecedentem D G ad G B, vt D C ad C B; sed ex hypothesi vt est D C ad C B, ita est D A ad A B, Igitur vt D G ad G B sic D A ad A B, & diuidendo vt D B ad B G, sic D B ad B A: quod fieri non potest; cùm puncta A & G supponantur diuersa: quare F G non est tangens: sed A F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

SIt A B vtcunque diuisa in C, & ex A ducta quæuis A E, exhibens angulum E A B recto minorem: Oporteat in linea A E, puncta assignare E & F, è quibus ad C & B rectæ eductæ, angulos A F B, A E B bifariam secent.

Constructio & demonstratio.



PRoducta A B in D, fiat vt A C ad C B, ita A D ad D B: & super C D diametro descriptus sit circulus C F D: cuius centrum H: secabit autem ille, vel continget rectam A D vel neutrum præstabit: Secet igitur primò A E lineam in F & E punctis; Dico illa esse, quę desiderantur: erecta enim B G, perpendiculariter ad diametrum C D, iungantur A G, F C, F B, F H: C E, B E, H E. quoniam igitur vt A C ad C B, ita est A D ad D B, & normalis sit B G, diametro C D: erit A G recta contingens [a] circulum vnde & A H, C H, [b] B H, continuæ sunt proportionales. est autem F H, vel E H, mediæ C H, æqualis; ergo [c] anguli A F B, A E B, per rectas C F, C E, diuisi sunt bifariam.

Quod si circulum C G D contingat A G, in G: iungantur puncta G B. G C, G H: quoniam A H, C H, B H, sunt in continuata ratione; & G H linea mediæ C H, æqualis est, [d] erit A G B angulus bifariam diuisus per rectam C G:

Manifestum autem est si A E F recta circulo non occurrit, cessare materiam propositam.

a 31. huius.
b 17. huius.
c 11. de progressionibus.
d Ibid.

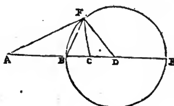
Corollarium.

IN idem recidit, eodemq; modo soluitur problema, quo iisdē positis petuntur in A E lineа exhiberi puncta F & E, ad quę ductis ex C & B lineis; fiant A C, CB proportionales rectę A F, F B, A E, E B: inuenta enim per præcedentem puncta F & E à quibus ad C & B ductæ lineæ, angulos A F B, A E B bifariam secant, problema soluunt: nam angulis A F B, A E B, diuisis bifariam per rectas F C, E C, erunt A F ad F B; & A E ad E B vt A C ad C B.

PROPOSITIO XXXIII.

SIt B F E circuli diameter B E producta vtcunque in A: ex quà secans ponatur A F: & ex F, recta C F, vt A F sit ad F C, sicut A B ad B C. Dico A B ad B C eandem rationem obtinere quam A E ad E C.

Demonstratio.



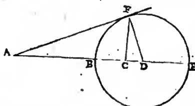
a 3. sexti.
b 11. de progressionibus.
c 1. de progressionibus.
d 5. lib. de lineis.

IVngantur D F, B F: cùm igitur sit A F ad F C vt A B ad B C, erunt anguli A F B, B F C æquales; Rursum cùm D F, æqualis sit D B, erunt a A D, B D, C D in continua analogia. vnde A B est ad B C, vt b c A D ad B D. & cùm D E recta sit æqualis D B, erit vt d A B ad B C ita A E ad E C. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

SIt A B ad B C, vt A E ad E C sitque B E diuisa bifariam in D. Dico A D, B D, C D fore in continua analogia.

Demonstratio.



e 31. huius.
f 17. huius.

DEscribatur circulus centro D, interuallo B D, & erigatur C F normaliter ad A E: ocurrens circulo in F. ducanturque D F, A F: cùm igitur sit A B ad B C, vt A E ad E C, erit linea e A F contingens circulum, f vnde A D, B D, C D lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrādum.

Inuenies hanc in libro de lineis propositione quarta vel quinta aliter demonstratam.

PROPOSITIO XXXV.

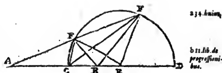
SIt A B recta, per centrum circuli C F D ducta; fiat autem vt A C ad A D, ita C B ad B D, & ducta A F secante circulum in F: iungantur B F, C F:

Dico A C, C B, & A F, F B, proportionales esse lineas.

Demon-

Demonstratio.

EX E centro ponatur E F. Quoniam ponitur vt A D ad A C, sic D B ad C B, erunt A E, C E, B E lineæ [a] in continua ratione. Igitur cùm F E sit æqualis mediæ C E, est A C [b] ad B C, vt A F ad F B: *Est hæc conuersa trigesimæ tertiæ huius.*



a 34. huius.
b 11. lib. de progressionibus.

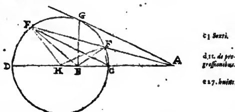
PROPOSITIO XXXVI.

SIt A D linea vtcunque diuisa in C: descriptoq; super C D circulo, ponatur ex A linea A E occurrens circulo in F: ducatur autem F B, vt A F, F B proportionales sint, lineis A C, C B, & ex B erecta normalis occurrat circulo in G.

Dico A G lineam circulum contingere.

Demonstratio.

CVm sit A F ad F B, vt A C ad C B, erit angulus A F B diuisus [c] bifariam: quia verò linea F H, rectæ C H æqualis est, erunt A H, [d] C H, B H in continua ratione: vnde & G A circulum [e] contingit. Quod fuit demonstrandum.



c 3 Sexti.
d 11. de progressionibus.
e 17. huius.

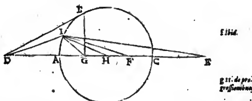
PROPOSITIO XXXVII.

CIrculi A B C diameter A C, vtrimque producta sit in D & E puncta, æqualiterà centro H distantia, positâ deinde D B contingente in B, demissaque normaliter B G, ad G A diametrum, fiat C F, æqualis A G: ductisque rectis D I, I E: iungantur I G, I F.

Dico D I, I E, ipsis I G, I F proportionales esse.

Demonstratio.

IVngatur H I. quoniam D B contingit circulum & B G normalis ponitur ad diametrum, erunt [f] D H, A H, G H in continua analogia vti & E H, C H, F H: est autem H I, ipsi A H æqualis; igitur vt E C ad C F ita [g] E I ad I F. sed vt E C ad C F, ita D A ad A G, hoc est D I ad I G, quare vt E I ad I F; ita D I ad I G. & per mutando inuertendo D I ad I E vt I G ad I F.



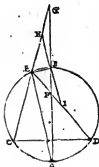
f Ibid.
g 11. de progressionibus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Circuli ABC diametrum AB, secet in F recta quæuis DE, sumptoque AC arcu æquali AD, ponatur ex C per E linea CG conueniens cum diametro in G.

Dico AG ad GB eandem habere rationem quam AF ad FB.

Demonstratio.



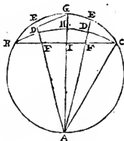
IVngantur AE, EB, & per B ponatur IK æquidistans ipsi AE: quoniam AC, AD arcus sunt æquales, erunt & anguli AEC, AED quoque æquales: quia verò angulus AEB in semicirculo rectus est, adeoque duobus AEC, GEB angulis æqualis, demptis AEC, AED æqualibus, æquales remanent anguli DEB, GEB. sunt autem & anguli EBG, EBI recti, cùm IK æquidistet AE, æqualia igitur sunt latera IB, KB: quare vt AE ad IB est B,ad est AF, ad FB, sic AE est ad KB, id est AG ad GB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

Circulum ABC intersecet alter, centrum habens in perimetro ABC: iunctisque intersectionum punctis BC, ponantur ex A centro circuli intersecantis, quæuis AE, occurrentes perimetris in D & E, rectæ verò BC in F.

Dico lineas AF, AD, AE in continua esse analogia.

Demonstratio.



POnatur ex A per centrum circuli ABE diameter AG occurrens perimetris in G & H, rectæ verò BC in I, iunganturque GE, AC: cùm igitur AG transeat per centra circulorū sese intersecantium, erit BC in I a normaliter diuisa: vnde angulus AIF æqualis angulo AEG in semicirculo posito: est autem GAE angulus communis vtrique triangulorum AIF, AGE, similia sunt igitur triangula AIF, AGE: quare vt AI, AF, sic AE ad GA: adeoque FAE rectangulum æquale, rectangulo IAG, id est quadrato AC, id est AD quadrato: proportionales igitur sunt AF, AD, AE. Quod erat demonstrandum.

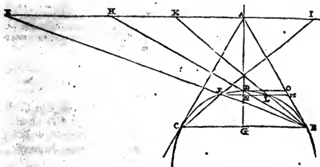
a 10. huius.

PROPOSITIO XL.

Sint A B, A C contingentes circulum B D C. ductæque B C, ponatur æquidistans A E, & ex A diameter A G, occurrens perimetro in D: per quod ex B, agatur B H; dein per quodlibet punctum in perimetro assumptum F ducantur C F I, B F E.

Dico rectangulum I A E quadrato A H æquale esse.

Demonstratio.



SVmatur arcui C F, æqualis B L, & per L ducta B L occurrat A E in K: L F quoque iuncta fecet A B, contingentem in M, & H B in N: denique ponatur D O contingens. Quoniam C F, B L arcus ponuntur æquales, erit L F ipsi B C adeoque & rectæ A H æquidistans: quia verò O D, O B contingentes ex eodem educuntur puncto æquales sunt O B, O D, adeoque & M B, M N: ac proinde quia M L, M B, M F sunt proportionales, erunt & M L, M N, M F quoque continuę: sed vt M L ad MN sic A K ad A H, & vt M N ad M F sic A H est ad A E, proportionales igitur sunt A K, A H, A E: est autem ipsi A K æqualis A I (quia B C illi æquidistans, ab A G diametro diuisa sit bifariam) igitur A I, A H, A E in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

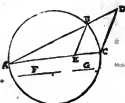
PROPOSITIO. XLI.

DAto segmento circuli A B C & recta C D, vtcunque ad A C posita; oporteat rectam ducere A D, quam diuidat arcus A B C in B, secundùm datam rationem F ad G.

Constructio & demonstratio.

DIuidatur A C basis segmenti in E, secundùm datam rationem F ad G: et ecta deinde E B, quæ æquidistet C D, occurrente perimetro in B, ponatur A B D: Dico factum quod petitur. patet ex elementis.

Hic notatu dignum est, quod punctum C, assumi possit non solùm in termino recta A C, sed vel intra, vel extra circulum, in quauis parte A C producta.

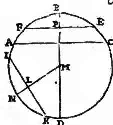


PRO-

PROPOSITIO XLII.

Dato circulo ABC, lineâ AC, quæ non ſit maior diametro BD, & ratione G ad H, oporteat alteram FE, circulo inſcribere, quæ æquidiſtet AC, vt quam G, ad H, habet rationem, habeat quoque FE ad AC.

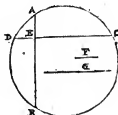
Conſtructio & demonſtratio.





Ponatur BD diameter normaliter ad AC, fiatque vt H ad G, ita AC ad IK: quæ in circulo ABC applicata, diuidatur bifariam in puncto L; iunctaque ML, fiat rectæ ML æqualis MP, ponaturq; FPE, quæ æquidiſtet AC; patet factum quod quæritur. nam rectæ FE, IK cùm ſint æquè à centro remotæ, inter ſe æquales ſunt.

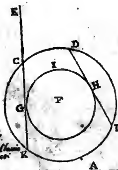
PROPOSITIO XLIII.



Rectam AB quæ non ſit diameter, altera CD interſecet ad angulos rectos in E, vt DE ad EC datam habeat rationem F, ad G.

Conſtructionem & demonſtrationem huius inuenies in libro noſtro de ellipſi: quas hic non ponendas iudico eò quod ab ellipſi planè ſit dependens.

PROPOSITIO XLIV.



A Puncto extra circulum dato, lineam circulo immittere quæ datæ ſit æqualis; modò ea diametro circuli non ſit maior.

Conſtructio & demonſtratio.

Applicetur datę rectæ A in circulo BCD æqualis BD; dein ex F centro deſcribatur alter circellus, contingens BD, in H: Deinde tum ex E puncto dato ponatur EG, contingens eundem circellum in G; occurrens verò circulo ABDC in K & C. Dico CK, fore quæſitam; cùm enim æqualiter DB, CK, diſtent à centro F (quia contingunt eundem circulum GIH;) æquales ſunt inter ſe: ac proinde rectæ A, ęqualem poſuimus CK: quod fuit præſtandum.

PROPOSITIO XLV.

IDem præstare à puncto intra aream circuli posito. oportet autem datā A hoc casu non minorem esse rectâ illâ, quæ per E posita ad diametrum, per E quoque transeuntem normalis sit.

Demonstratio.

DAtæ A vt prius, accommodetur in circulo, æqualis B D: centroque F circulus describatur contingens B D in H, transibit ille per punctum datum E, vel infra illud cadet: cùm enim ex hypothesi normalis per E ducta ad diametrum, per E quoque ductam, maior esse non possit datâ lineâ A, id est D B: patet & E F diametrum, quæ rectam per E ductam secat orthogonaliter, maiorem non esse diametro, quæ lineam D B datæ A æqualem orthogonaliter diuideret. vnde circulus radio F H descriptus, vel transit per E, vel infrà cadet. vtroque casu agatur per E contingens circulum radio F H descriptum, patet illam æquari rectæ D B, id est datæ A: quare fecimus quod postulabatur.

PROPOSITIO XLVI.

A Dato extra circulum puncto lineam educere quæ in data ratione à perimetro diuidatur: oportet autem rationem datam, maiorem non esse illa quę reperitur inter partes lineæ quæ à dato puncto per centrum ducitur.

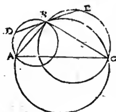
Constructio & demonstratio.

SIt datum punctum A & circulus B C D: data quoque ratio sit E ad F, quæ minor sit rationis A B ad B D, partium diametri: fiat rectis E, F æqualis G H, & G I quidem ipsi E, inuentaque K media inter I G, G H, ponatur ex A contingens A C, & vt K ad G I sic A C fiat ad A L: patet ex datis A L minorem esse A C, & non minorem A B, adeoque punctum L in perimetro esse circuli: ducatur igitur per L ex A linea A M occurrens circulo in L & M, dico A M satisfacere petitioni; cùm enim L A M rectangulum æquale sit quadrato A C & I G H rectangulum quadrato K, ponatur autem & L A ad A C vt I G ad K, erunt G I, K, G H lineæ proportionales eiusdem rationis cum A L, A C, A M; vnde vt prima G I ad excessum H I, id est per constructionem vt E ad F, sic A L quarta ad excessum L M. eduximus igitur à dato puncto, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XLVII.

INtersecent sese inuicem duo circuli A B D, B E C in B. Oporteat per B, rectam D B E ponere, quæ B D rectæ, æqualem B E constituat.

Constructio & demonstratio.



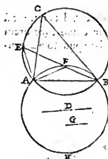
POnantur A B, C B contingentes in B, circulos A B D, B E C; occurrentes perimetris in A & C: dein per A, B, C, circulus describatur A B C, quem in B contingat D E: dico factum quod postulatur, ostensum est enim segmenta, A D B, B E C, A B C esse inter [a] se similia adeoque D E tangentem in B diuisam [b] bifariam: posuimus igitur per B rectam, &c. Quod erat faciendum.

a 11. huius.
b 14. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

SEcent inuicem vt priùs circuli duo A B C, A H B in A & B. Oporteat ex B rectam educere B E F, vt E F perimetris intercepta sit datæ D, æqualis.

Constructio & demonstratio.

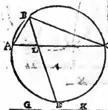


COnstituatur B C contingens circulum A H B in B. oportet datam lineam D, hac contingente maiorem non esse; iunctis A C fiat vt C B, ad A B, ita D, ad G. Dein ipsi G, fiat æqualis A F, & iuncta B F pertingat in E: dico factum esse quod petitur. Ducatur enim A E. quoniam angulus A F B tam cum angulo segmenti A H B, id est A B C angulo (ob C B tangentem) quàm cum A F E, duobus rectis est æqualis; dempto communi A F B remanebunt æquales anguli A F E, A B C; sunt autem & anguli A C B, A E B eidem insistentes arcui æquales: similia igitur sunt triangula A E F, A C B. vnde A F est ad F E vt A B ad B C, id est per constructionem vt G ad D: & permutando vt A F ad G, sic E F ad D: quare cùm A F, & G æquales ponantur, erunt & E F, D lineæ æquales. Perfecimus igitur quod postulabatur.

PROPOSITIO XLIX.

IN dato segmẽto circuli A B C, ex A, & C duas lineas inclinare, sese in perimetro decussantes: quæ datam inter se rationem contineant G ad H.

Constructio & demonstratio.



DIuisâ in D rectâ A C, segmentum subtendente, secundùm rationem G, ad H; bisecetur arcus A E C in E, & per D ex E, recta ponatur E D B, iungantur A B, B C: Dico A B, B C esse quæsitas. Cùm enim anguli A B E, E B C æqualibus arcubus insistentes æquales sint, erit [c] A B ad B C vt A D ad D C, id est per constructionem vt G ad H.

c 3. sexti.

CIRCVLORVM PARS SECVNDA.

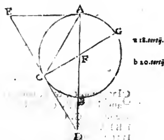
De Angulorum & arcuum circularium comparatione.

PROPOSITIO L.

Circulum ABC, cuius diameter AB, contingat in A recta AE, in qua assumpto quouis puncto E, ponatur EC contingens quidem circulum in C, occurrens autem diametro AB protractæ in D, iunganturque CA.

Dico angulum CEA duplum esse anguli CAD.

Demonstratio.



Per centrum F diameter ponatur CG: Quoniam ED circulum contingit in C, & CG diameter est, erit [a] angulus GCD rectus, adeoque angulo EAD æqualis. est autem angulus EDA communis triangulis CFD, EDA; igitur CFD angulo, angulus AED æqualis est. sed angulus [b] CFD duplus est anguli CAD, igitur & angulus ABD, eiusdem CAD duplus est. Quod erat demonstrandum.

a 18. tertij.

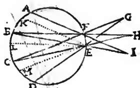
b 20. tertij.

PROPOSITIO LI.

Assumptis in perimetro ABC, tribus arcubus æqualibus, AB, BC, CD, ducantur per duo quædam puncta F,E, rectæ AF, BF, CF, & BE, CE, DE, occurrantque in G, H, I.

Dico angulos I, H, G, inter se æquales esse.

Demonstratio.



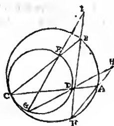
Ponantur ex puncto E, rectæ EK, EL, EM, quæ æquidistent lineis AF, BF, CF. erunt itaque anguli KEB, LEC, MED, æquales angulis I, H, G; quia verò arcus AB, BC, CD ponuntur æquales, & AK, BL, CM arcus æquantur arcui EF, adeoque & inter se, reliqui quoque arcus KB, LC, MD, & anguli KEB, LEC, MED illis insistentes æquales sunt: quare & anguli I, H, G, sunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

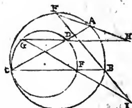
PROPOSITIO LII.

Contingant inuicem interius circuli duo ABC, DEC, in puncto C: ex quo eductis CA, CB, sumantur puncta G, F, in singulorum arcubus ex quibus rectæ ponantur GE, GD, FB, FA.

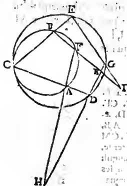
Dico si lineæ illæ conueniant, angulos GIF, FHG æquales esse.

Demonstratio.





a 21. tertij. Sint primò G, & F, puncta vel supra vel infra angulum ACB posita: Quoniam anguli CBF, CAF, CF arcui insistentes æquales a sunt, vti ob eandem causam, anguli CEG, CDG, id est IEB, HDA ad verticem positi, erunt anguli IEB, EBI simul sumpti, æquales angulis HDA, DAH; quare & tertius EIB, tertio DHA æqualis erit.



b 22. tertij. Quod si vtrumque punctorum F, & G, angulo ACB, contineantur, hac ratione assertionē demōstrabimus: cū anguli b ACB, AFB, duobus rectis æquales sint, vti & anguli ECD, EGD: dempto igitur communi angulo ECD, manet AFB, angulo EGD, ac proinde reliquis AFI, reliquo DGI æqualis. sunt autem ad verticem anguli FKH, GKI æquales, igitur reliqui FIG, FHG æquales quoque sunt.

c Ibid. Cadat iam alterutrum punctorum, puta F, intra, & aliud extra angulum ACB: dico rursum angulos H, I esse inter se æquales, cùm enim angulus FBC tam cum angulo FAC, quàm cum EBF duobus rectis sit c æqualis, dempto communi

muni FBC, erit angulus EBI æqualis angulo FAC id est DAH, sunt autem & anguli CEG, CDG eidem insistentes arcui æquales, igitur reliquus I, æquatur reliquo angulo H. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIII.

DVctæ sint normales à terminis trianguli ABC, ad opposita latera.

Dico illas sese in eodem puncto decussare.

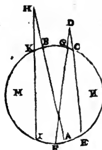
Demonstratio.

CIrcumscribatur ABC triangulo circulus, & per AC puncta alter circulus describatur ADC, æqualis circulo ABC. Productaque BI, occurrat perimetris in D, & K, & per D quidem ex A & C, agantur CDF, ADE, iunganturq; AF, CE, CK. erunt itaque anguli AFC, AEC arcui AC insistentes æquales; quia verò angulus EAC, vtrique circulorum æqualium communis est, arcus quoque DC, CE æquales sunt, vti illorũ subtensæ; ob eandem rationem quoque lineæ AF, AD sunt æquales. Rursum cùm angulo DKC, id est KDC (ob circulos æquales) duo anguli interni DCB, DBC, æquales sint, erunt duo arcus FB, KC id est DC æquales duobus arcubus BE, EC; ablatis itaque æqualibus arcubus KC, CE, remanent quoque æquales arcus FB, BE; quare anguli FCB, BCE quoque sunt æquales. sicut & anguli FAB, BAD. vnde cùm AF, AD lineę, adeoque & anguli AFD, ADF æquales sint, erunt & reliqui FHA, DHA quoque inter se æquales, adeoque & recti. eodem modo ostenditur angulos ad G positos, esse rectos. quare patet normales BI, CH, AG, sese in eodem puncto decussare. Quod fuit demonstrandum. a 21. tertij.

PROPOSITIO LIV.

IN datum circulum ABC, à dato extra eum puncto D, ductæ sint DCE, DGF auferentes arcus FE, GC. Oportet ex alio puncto extra circulum assignato, H, duas rectas in circulum immittere, quæ arcus duos intercipiant, duobus FE, GC arcubus æquales.

a 44 huius.



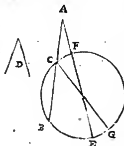
Constructio & demonstratio.

DVcantur ex H lineæ H I, H A, a vt K I, B A, circulo interceptæ, æquales sint rectis C E, G F: & factum erit quod fuit imperatum. cùm enim AB, F G sint æquales lineæ, erunt arcus GEF, AIB æquales, vti & arcus CNE, KMI, ob IK, CE æquales lineas. ablatis igitur æqualibus arcubus KMI, CNE, remanebunt arcus KB, I A, arcubus GC, FE æquales. demisimus igitur ex H puncto lineas, &c. Quod præstandum fuit.

PROPOSITIO LV.

ADato extra circulum puncto, demissa sit per eundem recta A B; oporteat alteram ducere AE, quæ arcus auferat C F, B E, qui simul sumpti, angulum contineant æqualem dato D.

b Ibid.



Constructio & demonstratio.

FIat angulo D, æqualis BCG: & ex A ponatur A E, quæ rectam FE, æqualem lineæ C G, b exhibeat; eritque peractum quod requiritur: cùm enim C G, F E lineæ æquentur, erit arcus F B E, æqualis arcui C B G; vnde ablato communi C B, remanet arcus B G, æqualis duobus B E, C F. quare angulo D, æqualis est angulus, qui duobus arcubus C F, B E simul sumptis continetur. perfecimus igitur quod petebatur.

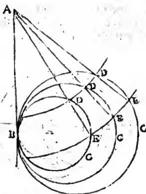
CIR-

CIRCVLORVM PARS TERTIA

De mutua circulorum interſectione & contactu.

PROPOSITIO LVI.

REcta AB, contingat circulos BDC, ſeſe in eodem B puncto, contingentes, centroque A, quouis interuallo circulus deſcribatur, occurrēs perimetris circulorū ſeſe contingentium in D, ponanturq; rectæ ADE. Dico DE rectas inter ſe æquales eſſe, ſiue ad eundem eſſe circulum.



Demonſtratio.

CVm enim AB ſit contingens rectangula DAE, æqualia erunt quadrato AB, adeoque & inter ſe: igitur lineæ DA, DB, DE, in continua ſunt analogia; ſunt autem DA primæ, inter ſe æquales & AB media communis, igitur etiam primarum & tertiarum differentiæ DE, æquales erunt. Quod fuit demonſtrandum.

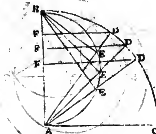
PROPOSITIO LVII.

SVper AB radio quadrantis circularis ABC, circulus deſcriptus ſit AEB; ductiſque rectis AED, occurrentibus circulo in E, per EE ponantur DF normales ad radium AB.

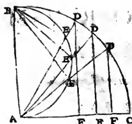
Dico rectis AF, æquales eſſe AE.

Demonſtratio.

IVngantur BE: cum AD æquales ſint AB, & anguli AEB, AFD recti; ſint autem & anguli FAE communes; erunt BEA triangula æqualia & ſimilia triangulis AFD, vnde reliqua AF, AE latera æqualibus angulis ſubtenſa ſunt æqualia.



Quod



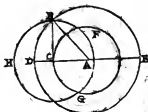
Quod si rectæ DF demittantur normaliter ad basim AC, sic ostendetur propositum: cùm DF sint æquidistantes AB, igitur anguli BAD, ADF, æquales sunt: proindeq; cũ & anguli AEB AFD, recti sint, similia sunt & æqualia triangula ABE, ADF, & latera æqualibus angulis subtensa. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LVIII.

PEr duorum circulorum parallelorum BDE, CFG centrum A actâ diametro DCE, ponatur CB contingens minorem à puncto quo à diametro interſecatur.

Dico circulum radio BC deſcriptum æqualem eſſe annulo duabus circumferentijs intercepto.

Demonſtratio.



DVcatur AB, vt AB quadratum, ad duo quadrata BC, CA, ita circulus [a] DBE, ad circulos HBG, CFG; ſed AB quadratum æquale eſt quadratis AC, CB, igitur & circulus DBE æqualis eſt circulis HBG, CFG, ſimul ſumptis. ablato igitur communi circulo CFG, remanebit annulus perimetris æquidiſtantium circulorum interceptus, circulo BHG æqualis: quod fuit demonſtrandum.

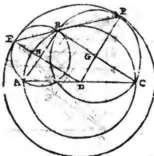
a 2. duodecimi.

PROPOSITIO LIX.

SVper trianguli ABC, lateribus ſegmenta circulorum ſimilia conſtituantur, centroque circuli, qui ſuper baſi extructus eſt, circulus deſcribatur qui alterutrum circulorum AEB, BFC contingat.

Dico quod & tertium quoque continget.

Demonſtratio.



DVcantur ex D, per H & G cẽtra circulorũ AEB, BFC rectæ DE, DF: & circulus ED radio deſcriptus contingat circulũ AEB in E, igitur recta DHE per centra D, & H tranſiens occurret vtrique in [b] puncto contactus E. quia verò ſegmenta ſuper trianguli lateribus deſcripta, ſimilia ſunt [c] iuncta, BF in directum erit ipſi EB; vnde cùm DE, [d] DF lineę ſint ęquales, erit F punctum commune peripherijs circulorũ EF, BFC; &

b 11. tertij.

c 13. huius.

d 15. huius.

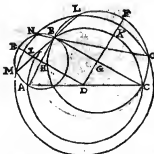
& cum eadem DF centra DG vtriusque coniungat, patet circulum EF, a in F contingere circulum BFC. Quod erat demonstrandum. a Schol. ad 13 tertij.

PROPOSITIO LX.

Iisdem positis: si circulus centro D descriptus alterutrum circulorum AEB, BFC secuerit:

Dico quod & alterum secabit; & secures ab vtroque auferet similes.

Demonstratio.



Occurrat circulus centro D descriptus, circulo AEB in M & N: cadet igitur infra E & ED lineam secabit in I; quia verò rectæ DE, DF b æquales sunt, patet circulum radio DI descriptum, quoque infra F cadere, adeoque & circulum BFC secare in L & O. Quod erat primum. b 15. huius.

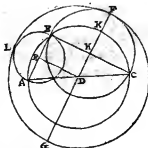
Hoc posito dico secures MEN, LFO ablatas inter se esse similes. ducta MB occurrat circulo LFO in L, ostensum est propositione 15. huius, iunctam DL, æquari rectæ DM, quare cùm punctum M in perimetro est circuli NLO, erit & punctum L in eadem perimetro. eadem ratione ostendetur, iunctam OB communi occurrere intersectioni circulorum MEB, MLO in N, vnde cùm NBM angulo angulus LBO ad verticem insistens, æqualis sit; similes erunt arcus MEN, LFO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXI.

Super ABC trianguli lateribus semicirculi describantur ALB, AKC, BFC quos contingat circulus centro D, descriptus, in F & L.

Dico FG diametrum circuli vtrumque contingentis, æqualem esse diametris circulorum ALB, BFC.

Demonstratio.



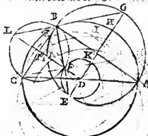
Per centra D & H ponatur recta FG, iunganturque centra D, E; quoniam segmenta similia super trianguli lateribus descripta, semicirculi sunt, & AB BC à diametris DH, DE in circulo ABC bifariam diuisæ, erunt anguli DHB, DEB recti, vnde AB, DH æquidistant & HE parallelogrāmum, adeoq; BE, HD, item BH, ED lineæ æquales sunt. quare cùm FG dupla sit DF id est dupla duarum FH, HD, id est BH, BE, erit FG æqualis duabus diametris AB, BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXII.

ITerum similia segmenta constructa sint super singulis lateribus trianguli ABC centroque D circuli super basi descripti, circulus describatur KFE, qui circulum AGB contingat interius in E.

Dico quod & alterum BLC continget in F.

Demonstratio.



PEr centra circulorum AGB, BLC; rectæ ponantur ex D, DG, DL: & DG quidem producta occurret perimetro circuli AGB in puncto contactus E: DL verò in aliquo puncto F circuli BLC, iunganturque BF, FE, cùm igitur DL, DG transeant per centra circulorum AGB, BLC, erunt LB, GB ductæ a in directum: quia verò LMF diameter est circuli BLC, erit angulus LBF adeoque & GBF rectus, ac proinde BF pertinget in E. Rursum eùm LD, DG lineæ sint æquales, erunt & anguli quoque BLD, BGD æquales; sunt autem anguli ad B ostensi recti, reliquus igitur BED æqualis reliquo est LFB, id est EFD: vnde & æquales lineæ sunt DE, DF & punctum F perimetro circuli KFE commune: & cùm MD, linea per F ducta, centra coniungat D & M, patet circulum KFE b in F contingere circulum BLC. Quod erat demonstrandum.

a 13. huius.

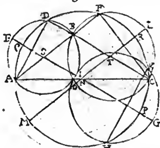
b 13. tertij.

PROPOSITIO LXIII.

SVper trianguli lateribus constructa sint segmenta similia AEB, AD, FC, BLC. & ab intersectionum punctis D, F, ad puncta A, C ductis lineis DA, FC, aptetur in circulo KH æqualis FC, & parallela rectæ DA: describatur deinde circulus IKGH æqualis circulo BLCO, & transiens per puncta K, H.

Dico hunc tangere circulum ADI.

Demonstratio.



TRium circulorum AEB, ADFC, BLC centra sint S, N, T. per centra S, N ducatur recta QSINPG, occurrens circulo AEB in I, & circulo KGH in G: per centra verò T, N ponatur recta LRTNO occurrens circulo BLC in O. Quoniam QG iungit centra N, S, normalis c est ad AD, ac proinde & ad HK ipsi AD parallelam. centrum igitur circuli KGH est quoque in linea QG. consideretur iam punctum I quatenus est intersectio circuli AEB ac rectæ QG. Quoniam NR, est æqualis NP, & RL d æqualis PG, erit NL æqualis NG. Est verò per demonstrata 63 huius, etiam ON æqualis IN. ergo OL æqualis est IG, quæ nempe posita est inter punctum G, & punctũ I, in

c 10. huius.

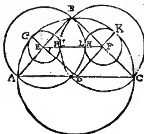
d patet ex elementis.

in quo circulus AEB secabat rectam QG. Quare cùm circuli KGH diameter æqualis sit rectæ OL, diametro circuli BLCO, æqualis quoque erit rectæ IG. circulus igitur KGH transit per I. Atqui etiam supra ostendimus centrum eius esse in recta QG transeunte per centrum circuli AEB: ergo circulus KGH tangit circulum AEBC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIV.

SVper ABC trianguli lateribus semicirculi describantur ABL, BIC, AGC, quorum centra sint D, E, F, centris autem F vel E, circuli construantur HG, KN, qui circulum AGC contingant in G & K. Dico eosdem, quoque reliquos contingere in I, & L.

Demonstratio.

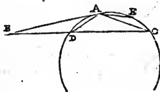


DVcantur FE, DEG, DF. quoniam diametri AB, CB bisectæ sunt in centris E, & F, erit EF parallela AC, ergo vt AB ad EB sic AC ad EF. quare cùm AB dupla sit EB, erit AC dupla quoque EF. Ergo AD dimidia ipsius AC, hoc est GD, æqualis erit EF. similiter quoniam tres diametri AC, AB, BC bisectæ sunt in centris D, E, F patet a ED, BC, & DF, AB esse parallelas; parallelogrammum igitur est EBFD. ergo FB hoc est FI æqualis est DE. Quare cùm tota FE toti GD, & pars FI, parti DE æqualis sit, residuum quoque IE æquale erit residuo GE, hoc est circuli diametro GE, siue EH. quare punctum I, commune est duabus peripherijs GH & BIC siue puncta H & I omnino eadem sunt inter se. Vnde cùm EF per centra circulorum ducta per I punctum transeat, manifestum est in eo contactum fieri. eodem pacto de altero circulo centro F descripto demonstratio proceder. a 1. Senti.

PROPOSITIO LXV.

IN triangulo ABC, sint in continua analogia BD, BA, BC: & per puncta A, D, C describatur circulus. Dico eum rectam AB contingere.

Demonstratio.



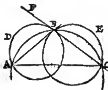
QVoniam ADC, puncta in perimetro sunt circuli, igitur si non contingat recta AB, circulum, occurrat eidem in altero puncto E: igitur rectangulū ABE, æquale erit rectangulo DBC., hoc est per hypothesim quadrato BA, quod b est absurdum: quare non occurret BA, circulo nisi in A. b Ex elementis.

PROPOSITIO LXVI.

SI super ABC trianguli lateribus segmenta circulorum similia descripta fuerint,

 Dico

Dico AB, CB latera trianguli producta contingere in B segmenta ADB, BEC.



Demonstratio.

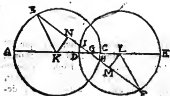
Angulus ABC tam cum angulo ABF quàm angulo segmenti residui in eodem circulo duobus rectis æqualis est; igitur angulus residui segmẽti, angulo FBA æqualis est: quia verò ADB, ABC segmenta sunt similia adeoque & illorum anguli æquales, erit angulus FBA simul cum angulo segmenti ADB duobus rectis æqualis: quare angulus ABF, æquatur angulo residui arcus circuli ADB: vnde FC eundem contingit in B, vt ex elementis patet, eodem modo ostenditur AB contingere in B circulum BEC. Quod erat demonstrandum.

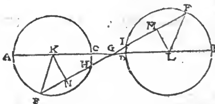
Est hæc conuersa vndecima huius.

PROPOSITIO LXVII.

Datis duobus circulis ABC, DEF, oporteat exhibere punctum G, per quod lineæ ductæ diuidant circulos in similes partes.

Constructio & demonstratio.





Actâ per vtriusque centra KL rectâ AE, diuidatur in G, vt ratio AG ad GE, sit eadem cum ratione AC ad DE. Dico punctum G esse quod quæritur. ducatur enim quæuis BGF occurrens perimetris in I & H: quoniam AG ad GE, eandem habet rationem quam AC ad DE, ex constructione, erit AC ad CG, vt DE ad DG, ac proinde AG ad GK vt EG, ad GL, & GK ad GL vt KA ad LE, id est BK ad LF. demissis igitur perpendicularibus KN, LM ad FB lineam, erit simile triangulum KGN, triangulo GML. quare vt KG ad GL, hoc est AK ad EL, id est AC ad DE, ita est KN, ad LM: igitur BH ad IF, est vt AC ad DE, cùm eadem proportione distent à centris quæ inter se sunt diametri circulorum, quare similia segmenta subtendunt & circulos similiter diuidunt, perfecimus igitur quod imperatum fuit.

CIR-

CIRCVLORVM
PARS QVARTA

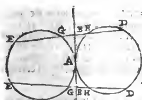
De linearum in circulis potentia.

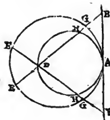
PROPOSITIO LXVIII.

Contingant sese circuli duo in A puncto, per quod acta contingens AB, occurrat cuiuis EBD secanti perimetros in E, G, H, D.

Dico GBE rectangulum, rectangulo HBD æquale esse.

Demonstratio.





Patet, cùm vtrumque quadrato contingentis AB, æquale sit.

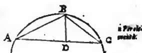
PROPOSITIO LXIX.

Segmento circuli ABC inscriptum sit triangulum ABC, à cuius vertice B, normalis demittatur BD.

Dico parallelogrammum ABC in angulo ABC, æquari rectangulo AC,BD.

Demonstratio.

Parallelogrammum ABC, duplum est a trianguli ABC; sed & AC, BD rectangulum, eiusdem duplum est, cùm basim habeat eandem AC, & BD altitudinem; igitur parallelogrammum ABC in angulo ABC, æquale est rectangulo ACBD. Quod erat demonstrandum.

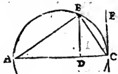


a Prælim.

PROPOSITIO LXX.

Si rursum segmento ABC inscriptum fuerit triangulum, à cuius vertice demissa BD, æquidistet contingenti CE.

Dico rectangulum ABC rectangulo ACBD æquale esse.



Demonstratio.

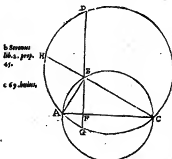
CVm enim EC, BD æquidistent, erunt anguli DBC, BCE, id est anguli DBC, BAC ob EC tangentem æquales; similia igitur sunt triangula DBC, ABC. vnde vt AC ad AB, ita [a] BC est ad BD: patet igitur ABBC, & ACBD. rectangula esse æqualia.

a 17. sexti.

PROPOSITIO LXXI.

SEcent inuicem circuli duo quorum vnus per centrum alterius transeat sic vt ducta AC quæ puncta sectionum coniungit, sit diameter circuli transeuntis per centrum alterius, ad quam erigatur per B, in perimetro ABC assumptum, normalis DBG, occurrens ADC perimetro in D & G, & AC in F:

Dico rectangulo DBG æquari ACBF rectangulum.



Demonstratio.

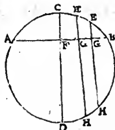
DVctâ CBH, cùm circulus ABC per alterius centrum transeat, erit [b] HB æqualis AB. vnde ABC rectangulum æquale est rectangulo HBC, sed HBC æquale est rectangulo DBG; igitur & DBG æquatur ABC id est [c] ACBF rectangulo. Quod erat demonstrandum.

b Serenus lib. 2. prop. 45.
c 69. huius.

PROPOSITIO LXXII.

DIametrum circuli ABC, secet AB, normaliter in F, ponanturq; quæuis EH, occurrentes AB in G.

Dico EGH rectangulum vnà cum FG quadrato, æquari EGH rectangulo vnà cum quadrato FG.



Demonstratio.

QVoniam AB normalis est ad diametrum CD, erit bifariam diuisa in F; & quia non bifariam diuisa est in G, erit AGB, rectangulum vnà cum quadrato FG, [d] æquale quadrato AF. sed AGB rectangulo æquale est EGH [e] rectangulum; addito igitur FG quadrato, erit EGH rectangulum vnà cum quadrato FG, quadrato AF æquale. igitur & EGH rectangulum, vnà cum quadrato FG, æquale est EGH rectangulo vnà cum quadrato FG. Quod erat demonstrandum.

d 5. secundi.
e 35. tertij.

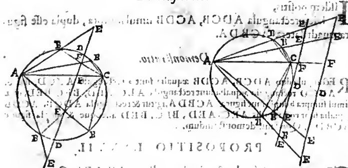
PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

SIt ABC segmentum circuli, cuius AC subtensa, secetur recta ED occurrente AC in F vt angulus AFE sit æqualis angulo segmenti ABC: ductæ deinde ex A quotuis rectæ AE occurrant perimetro in B: & ED lineæ in E.

Dico rectangula EAB, inter se esse æqualia.

Demonstratio.



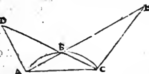
QVoniam æquales sunt anguli AFE, ABC, & communis angulus BAC, similia igitur existunt triangula AFE, ABC, vnde vt AF ad AE, sic AB ad AC, rectangulum igitur CAF rectangulo EAB [a] æquale est. quare & rectangula EAB, inter se sunt æqualia. Quod fuit demonstrandum. [a] 217 huius.

PROPOSITIO LXXIV.

SEgmento ABC inscripti trianguli ABC latera producta exhibeant triangula ADC, CAE habentia angulos DAC, ACE singulos angulo segmenti æquales.

Dico quadrato AC, æquari rectangulum ADCE.

Demonstratio.



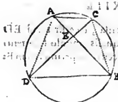
QVoniam angulus ABC æqualis est angulo DAC, & ACB communis triangulis ABC, ADC, similia erunt triangula ABC, ADC. eodem modo similia ostendentur triangula ABC, AEC: igitur & ADC triangulum simile est triangulo AEC, & DA, AC, CE latera proportionalia: vnde [b] AC quadrato æquale est rectangulum DACE. Quod fuit demonstrandum. [b] ibid.

PROPOSITIO LXXV.

OCcurrant inuicem ad rectos in circulo ABC lineæ AB, CD, in E, iunctisque extremis, exsurgat quadrilaterum ACBD.

Dico quadratis AC, BD, æquari AD, CB, quadrata.

Demon-



Demonstratio.

CVm enim anguli ad E recti sint, erunt quadrata A D, C B, æqualia quadratis A E, E D, C E, E B, sed iisdem æqualia quoque sunt quadrata A C, [illegible] quadratis A C, B D, æqualia sunt A [illegible]

PROP[illegible]

IIsdem positis,
Dico rectangula A D C B, A C D B sin[illegible] ræ quadrilateræ A C B D A.

Demonstratio [illegible]

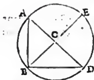
a *Lud. à Ceul. & alij.* REctangula duo A D C B, A C D B æqualia su[illegible] A B C D rectangulo æqualia sunt rectangula [illegible] simul sumpta b dupla sunt figuræ A C B D A, igitu[illegible]

b *Patet ex elementis.* æqualia sunt rectangulis A E C, A E D, B E C, B E D adeoque [illegible] A C B D A. Quod fuit demonstrandum.

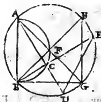
PROPOSITIO LXXVII.

SEcent iterum sese ad rectos in circulo lineæ A D, B E in C.
Dico quatuor quadrata partium A C, C D, C B, C E, simul sumpta, quadrato diametri esse æqualia.

Demonstratio.



TRanseat primò altera linearum, putà A D per centrū circuli, junganturque A B, B D. cùm igitur anguli, A C B, D C B recti sint, erunt quadrata A B, B D, æqualia quadratis A C, C B, & C B, C D siue C E, C D, (quia B E in C ab A D diametro diuisa est bifariam) sed quadratum A D, quadratis A B, B D quoque æquale est, cùm A B D sit angulus semicirculi adeoque rectus, igitur etiam quadratum A D, æquale est quatuor quadratis A C, C B, & C B, hoc est C E, C D: quod fuit primò demonstrandum.



Quod si neutra linearum A D, B E transeat per centrum, iunctâ A B, describatur semicirculus A C B, qui per C punctum transibit, cùm angulus A C B rectus ponatur. ex A, verò diameter ducatur A G occurrens circulo A C B in F, per quod collocetur B F H: iunganturque H G, E D, erunt igitur H G, E D lineæ adeoque quadrata inter c se æqualia: quia verò quadrata A B, H G, sunt æqualia quadratis H F, F G, A F, F B, id est quadrato diametri A G vt priùs ostensum est; igitur & quadrata E D, A B, quadrato diametri A G æqualia sunt; sed quadrata E D, A B, æqualia sunt quadratis E C, C D, & A C, C B, igitur & quadrata E C, C D, A C, C B, quadrato diametri sunt æqualia. Quod fuit demonstrandum.

c *18. huius.*

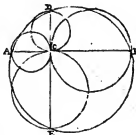
PRO-

PROPOSITIO LXXVIII.

SEcent ſeſe denuo in C ad rectos duæ quæuis AB, DE, in circulo ABD, & ſuper partibus, circuli deſcribantur.

Dico illos ſimul ſumptos æquales eſſe circulo ABD.

Demonſtratio.



Circuli inter ſe eam rationem habent quam à diametris a deſcripta quadrata: oſtendimus autem præcedenti propoſitione quadrata AC, CD, CB, CE, æquari quadrato diametri circuli ADB: igitur & circuli ſuper AC, CD, CB, CE, deſcripti æquales ſunt circulo ADB. Quod fuit demonſtrandum.

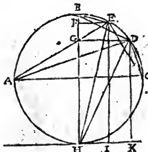
a 2. duodecimi.

PROPOSITIO LXXIX.

SEmicirculo ABC inſcripta ſint triangula quęcunque AEC, ADC, actaque contingente HK quæ AC diametro æquidiſtet, ponantur EI, DK normales contingenti HK.

Dico quadratum compoſitæ ex AE, EC, ad quadratum compoſitæ, ex AD, DC eam habere rationem quam continet EI ad DK.

Demonſtratio.



POſitâ HB diametro ducantur ad iſtam normaliter EF, DG, iunganturque EH, DH, EB, DB, quoniam FE normaliter inſiſtit rectę BH, erunt FH, HE, HB, lineæ in cõtinua analogia, vt ex elementis patet. vnde rectangulo FHB, æquatur HE quadratum; eademque de cauſa quadrato HD, rectangulum GHB; quare vt FH ad GH, hoc eſt EI, ad DK, ſic EH quadratum ad DH quadratum: Rurſum cùm ſit vt HE ad HD, ita compoſita b ex AE, EC, ad compoſitam ex AD, DC, erit vt quadratum HE, ad HD quadratum, ſic quadratum compoſitæ ex AE, EC, ad quadratum compoſitæ ex AD, DC: igitur vt EI ad DK, ita quadratum compoſitæ ex AE, EC, ad quadratum compoſitæ ex AD, DC. Quod demonſtrandum fuit.

b 14. huius.

PROPOSITIO LXXX.

SEmicirculo ABC inſcripta ſint triangula duo ABC, ADC; atque ex C, ad oppoſita latera rectę ducantur CE, CF, vtcunque.

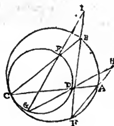
Dico ſi intra aream circuli occurrant rectis AB, AD, in E, F, quadra-

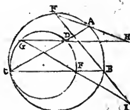
PROPOSITIO LII.

Contingant inuicem interius circuli duo ABC, DEC, in puncto C: ex quo eductis CA, CB, sumantur puncta G, F, in singulorum arcubus ex quibus rectæ ponantur GE, GD, FB, FA.

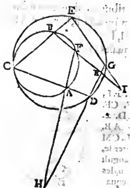
Dico si lineæ illæ conueniant, angulos GIF, FHG æquales esse.

Demonstratio.





a 21. tertij. Sint primò G, & F, puncta vel supra vel infra angulum ACB posita: Quoniam anguli CBF, CAF, CF arcui insistentes æquales a sunt, vti ob eandem causam, anguli CEG, CDG, id est IEB, HDA ad verticem positi, erunt anguli IEB, EBI simul sumpti, æquales angulis HDA, DAH; quare & tertius EIB, tertio DHA æqualis erit.



b 22. tertij. Quod si vtrumque punctorum F, & G, angulo ACB, contineantur, hac ratione assertionẽ demõstrabimus: cũ anguli b ACB, AFB, duobus rectis æquales sint, vti & anguli ECD, EGD: dempto igitur communi angulo ECD; manet AFB, angulo EGD, ac proinde reliquis AFI, reliquo DGI æqualis. sunt autem ad verticem anguli FKH, GKI æquales, igitur reliqui FIG, FHG æquales quoque sunt.

c Ibid. Cadat iam alterutrum punctorum, puta F, intra, & aliud extra angulum ACB: dico rursum angulos H, I esse inter se æquales, cùm enim angulus FBC tam cum angulo FAC, quàm cum EBF duobus rectis sit c æqualis, dempto communi

muni FBC, erit angulus EBI æqualis angulo FAC id est DAH, sunt autem & anguli CEG, CDG eidem insistentes arcui æquales, igitur reliquus I, æquatur reliquo angulo H. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIII.

DVctæ sint normales à terminis trianguli ABC, ad opposita latera.

Dico illas sese in eodem puncto decussare.

Demonstratio.

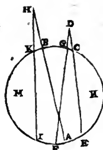
CIrcumscribatur ABC triangulo circulus, & per AC puncta alter circulus describatur ADC, æqualis circulo ABC. Productaque BI, occurrat perimetris in D, & K, & per D quidem ex A & C, agantur CDF, ADE, iunganturq; AF, CE, CK. erunt itaque anguli AFC, AEC arcui AC insistentes æquales; quia verò angulus EAC, vtrique circulorum æqualium communis est, arcus quoque DC, CE æquales sunt, vti illorũ subtensæ; ob eandem rationem quoque lineæ AF, AD sunt æquales. Rursùm cùm angulo DKC, id est KDC (ob circulos æquales) duo anguli interni DCB, DBC, æquales sint, erunt duo arcus FB, KC id est DC æquales duobus arcubus BE, EC; ablatis itaque æqualibus arcubus KC, CE, remanent quoque æquales arcus FB, BE; quare anguli FCB, BCE quoque sunt æquales. sicut & anguli FAB, BAD. vnde cùm AF, AD lineę, adeoque & anguli AFD, ADF æquales sint, erunt & reliqui FHA, DHA quoque inter se æquales, adeoque & recti. eodem modo ostenditur angulos ad G positos, esse rectos. quare patet normales BI, CH, AG, sese in eodem puncto decussare. Quod fuit demonstrandum.

a 21. tertij.

PROPOSITIO LIV.

IN datum circulum ABC, à dato extra eum puncto D, ductæ sint DCE, DGF auferentes arcus FE, GC. Oportet ex alio puncto extra circulum assignato, H, duas rectas in circulum immittere, quæ arcus duos intercipiant, duobus FE, GC arcubus æquales.

a 44. huius.



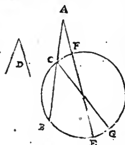
Constructio & demonstratio.

DVcantur ex H lineæ H I, H A, ᵃvt K I, B A, circulo intercepta, æquales sint rectis C E, G F: & factum erit quod fuit imperatum. cùm enim A B, F G sint æquales lineæ, erunt arcus G E F, A I B æquales, vti & arcus C N E, K M I, ob I K, C E æquales lineas. ablatis igitur æqualibus arcubus K M I, C N E, remanebunt arcus K B, I A, arcubus G C, F E æquales. demisimus igitur ex H puncto lineas, &c. Quod præstandum fuit.

PROPOSITIO LV.

A Dato extra circulum puncto, demissa sit per eundem recta A B; oporteat alteram ducere A E, quæ arcus auferat C F, B E, qui simul sumpti, angulum contineant æqualem dato D.

b Ibid.



Constructio & demonstratio.

FIat angulo D, æqualis B C G: & ex A ponatur A E, quæ rectam F E, æqualem lineæ C G, ᵇexhibeat; eritque peractum quod requiritur: cùm enim C G, F E lineæ æquentur, erit arcus F B E, æqualis arcui C B G; vnde ablato communi C B, remanet arcus B G, æqualis duobus B E, C F. quare angulo D, æqualis est angulus, qui duobus arcubus C F, B E simul sumptis continetur. perfecimus igitur quod petebatur.

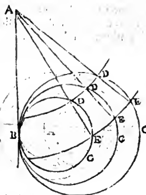
CIR-

CIRCVLORVM
PARS TERTIA

De mutua circulorum interſectione & contactu.

PROPOSITIO LVI.

RECta AB, contingat circulos BDC, ſeſe in eodem B puncto, contingentes, centroque A, quouis interuallo circulus deſcribatur, occurrẽs perimetris circulorũ ſeſe contingentium in D, ponanturq́; rectæ ADE. Dico DE rectas inter ſe æquales eſſe, ſiue ad eundem eſſe circulum.



Demonſtratio.

CVm enim AB ſit contingens rectangula DAE, æqualia erunt quadrato AB, adeoque & inter ſe igitur lineæ DA, DB, DE, in continua ſunt analogia: ſunt autem DA primæ, inter ſe æquales & AB media communis, igitur etiam primarum & tertiarum differentiæ DE, æquales erunt. Quod fuit demonſtrandum.

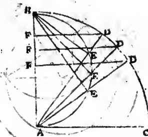
PROPOSITIO LVII.

SVper AB radio quadrantis circularis ABC, circulus deſcriptus ſit AEB; ductiſque rectis AED, occurrentibus circulo in EE, per EE ponantur DF normales ad radium AB.

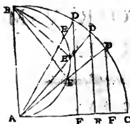
Dico rectis AF, æquales eſſe AE.

Demonſtratio.

IVngantur BE: cum AD æquales ſint AB, & anguli AEB, AFD recti; ſint autem & anguli FAE communes; erunt BEA triangula æqualia & ſimilia triangulis AFD, vnde reliqua AF, AE latera æqualibus angulis ſubtenſa ſunt æqualia.



Quod



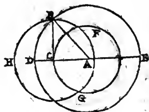
Quod si rectæ DF demittantur normaliter ad basim AC, sic ostendetur propositum: cùm DF sint æquidistantes AB, igitur anguli BAD, ADF, æquales sunt: proindeq; cũ & anguli AEB AFD, recti sint, similia sunt & æqualia triangula ABE, ADF, & latera æqualibus angulis subtensa. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LVIII.

PEr duorum circulorum parallelorum BDE, CFG centrum A actâ diametro DCE, ponatur CB contingens minorem à puncto quo à diametro intersecatur.

Dico circulum radio BC descriptum æqualem esse annulo duabus circumferentijs intercepto.

Demonstratio.



a 2. duodecimi.

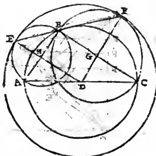
DVcatur AB, vt AB quadratum, ad duo quadrata BC, CA, ita circulus a DBE, ad circulos HBG, CFG; sed AB quadratum æquale est quadratis AC, CB, igitur & circulus DBE æqualis est circulis HBG, CFG, simul sumptis, ablato igitur communi circulo CFG, remanebit annulus perimetris æquidistantium circulorum interceptus, circulo BHG æqualis: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

SVper trianguli ABC, lateribus segmenta circulorum similia constituantur, centroque circuli, qui super basi exstructus est, circulus describatur qui alterutrum circulorum AEB, BFC contingat.

Dico quod & tertium quoque continget.

Demonstratio.



b 11. tertij.

c 13. huius.

d 15. huius.

DVcantur ex D, per H & G cẽtra circulorũ AEB, BFC rectæ DE, DF: & circulus ED radio descriptus contingat circulũ AEB in E, igitur recta DHE per centra D, & H transiens occurret vtrique in b puncto contactus E. quia verò segmenta super trianguli lateribus descripta, similia sunt iunctá c BF in circulum erit ipsi EB; vnde cùm DE, d DF lineę sint ęquales, erit F punctum commune peripherijs circulorũ EF, BFC; &

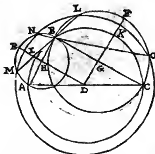
& cum eadem DF centra DG vtriusque contingat, patet circulum EF, a in F contingere circulum BFC. Quod erat demonstrandum. a Schol. ad 13 tertij.

PROPOSITIO LX.

Iisdem positis: si circulus centro D descriptus alterutrum circulorum AEB, BFC secuerit:

Dico quod & alterum secabit; & secures ab vtroque auferet similes.

Demonstratio.



Occurrat circulus centro D descriptus, circulo AEB in M & N: cadet igitur infra E & ED lineam secabit in I; quia verò rectæ DE, DF b æquales sunt, patet circulum radio DI descriptum, quoque infra F cadere, adeoque & circulum BFC secare in L & O. Quod erat primum. b 15. huius.

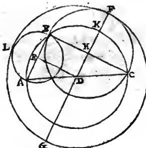
Hoc posito dico secures MEN, LFO ablatas inter se esse similes. ducta MB occurrat circulo LFO in L, ostensum est propositione 15. huius, iunctam DL, æquari rectæ DM, quare cùm punctum M in perimetro est circuli NLO, erit & punctum L in eadem perimetro. eadem ratione ostendetur, iunctam OB communi occurrere intersectioni circulorum MEB, MLO in N, vnde cùm NBM angulo angulus LBO ad verticem insistens, æqualis sit; similes erunt arcus MEN, LFO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXI.

Super ABC trianguli lateribus semicirculi describantur ALB, AKC, BFC quos contingat circulus centro D, descriptus, in F & L.

Dico FG diametrum circuli vtrumque contingentis, æqualem esse diametris circulorum ALB, BFC.

Demonstratio.



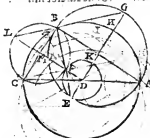
Per centra D & H ponatur recta FG, iunganturque centra D, E; quoniam segmenta similia super trianguli lateribus descripta, semicirculi sunt, & AB BC à diametris DH, DE in circulo ABC bifariam diuisæ, erunt anguli DHB, DEB recti, vnde AB, DH æquidistant & HE parallelogrammum, adeoq; BE, HD, item BH, ED lineæ æquales sunt. quare cùm FG dupla sit DF id est dupla duarum FH, HD, id est BH, BE, erit FG æqualis duabus diametris AB, BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXII.

ITerum ſimilia ſegmenta conſtructa ſint ſuper ſingulis lateribus trianguli A B C centroque D circuli ſuper baſi deſcripti, circulus deſcribatur K F E, qui circulum A G B contingat interius in E.

Dico quod & alterum B L C continget in F.

Demonſtratio.



PEr cētra circulorum A G B, B L C; rectæ ponantur ex D, D G, D L: & D G quidem producta occurret perimetro circuli A G B in puncto contactus E: D L verò in aliquo puncto F circuli B L C, iunganturque B F, F E, cùm igitur D L, D G tranſeant per centra circulorum A G B, B L C, erunt L B, G B ductæ ᵃin directum: quia verò L M F diameter eſt circuli B L C, erit angulus L B F adeoque & G B F rectus, ac proinde B F pertinget in E. Rurſum cùm L D, D G lineæ ſint æquales, erunt & anguli quoque B L D, B G D æquales; ſunt autem anguli ad B oſtenſi recti, reliquus igitur B E D æqualis reliquo eſt L F B, id eſt E F D: vnde & æquales lineæ ſunt D E, D F & punctum F perimetro circuli K F E commune: & cùm M D, linea per F ducta, centra coniungat D & M, patet circulum K F E ᵇ in F contingere circulum B L C. Quod erat demonſtrandum.

ᵃ 13. huius

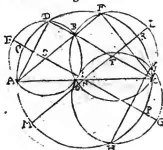
ᵇ 13. tertij.

PROPOSITIO LXIII.

SVper trianguli lateribus conſtructa ſint ſegmenta ſimilia A E B, A D, F C, B L C. & ab interſectionum punctis D, F, ad puncta A, C ductis lineis D A, F C, aptetur in circulo K H æqualis F C, & parallela rectæ D A: deſcribatur deinde circulus I K G H æqualis circulo B L C O, & tranſiens per puncta K, H.

Dico hunc tangere circulum A D I.

Demonſtratio.



TRium circulorum A E B, A D F C, B L C centra ſint S, N, T. per centra S, N ducatur recta Q S I N P G, occurrens circulo A E B in I, & circulo K G H in G: per centra verò T, N ponatur recta L R T N O occurrens circulo B L C in O. Quoniam Q G iungit centra N, S, normalis ᶜ eſt ad A D, ac proinde & ad H K ipſi A D parallelam. centrum igitur circuli K G H eſt quoque in linea Q G. conſideretur iam punctum I quatenus eſt interſectio circuli A E B ac rectæ Q G. Quoniam N R, eſt æqualis N P, & R L ᵈ æqualis P G, erit N L æqualis N G. Eſt verò per demonſtrata 63 huius, etiam O N æqualis I N, ergo O L æqualis eſt I G, quæ nempe poſita eſt inter punctum G, & punctū I, in

ᶜ 10. huius.

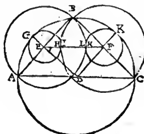
ᵈ patet ex elementis.

in quo circulus A E B secabat rectam Q G. Quare cùm circuli K G H diameter æqualis sit rectæ O L, diametro circuli B L C O, æqualis quoque erit rectæ I G. circulus igitur K G H transit per I. Atqui etiam supra ostendimus centrum eius esse in recta Q G transeunte per centrum circuli A E B; ergo circulus K G H tangit circulum A E B C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIV.

SVper A B C trianguli lateribus semicirculi describantur A B L, B I C, A G C, quorum centra sint D, E, F, centris autem F vel E, circuli construantur H G, K N, qui circulum A G C contingant in G & K. Dico eosdem, quoque reliquos contingere in I, & L.

Demonstratio.



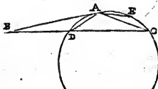
DVcantur F E, D E G, D F. quoniam diametri A B, C B bisectæ sunt in centris E, & F, erit E F parallela A C, ergo vt A B ad E B sic A C ad E F. quare cùm A B dupla sit E B, erit A C dupla quoque E F. Ergo A D dimidia ipsius A C, hoc est G D, æqualis erit E F. similiter quoniam tres diametri A C, A B, B C bisectæ sunt in centris D, E, F patet a E D, B C, & D F, A B esse parallelas; parallelogrammum igitur est E B F D. ergo F B hoc est F I æqualis est D E. Quare cùm tota F E toti G D, & pars F I, parti D E æqualis sit, residuum quoque I E æquale erit residuo G E, hoc est circuli diametro G E, siue E H. quare punctum I, commune est duabus peripherijs G H & B I C siue puncta H & I omnino eadem sunt inter se. Vnde cùm E F per centra circulorum ducta per I punctum transeat, manifestum est in eo contactum fieri. eodem pacto de altero circulo centro F descripto demonstratio procedet.

a 2. Sexti.

PROPOSITIO LXV.

IN triangulo A B C, sint in continua analogia B D, B A, B C: & per puncta A, D, C describatur circulus. Dico eum rectam A B contingere.

Demonstratio.



QVoniam A D C, puncta in perimetro sunt circuli, igitur si non contingat recta A B, circulum, occurrat eidem in altero puncto E: igitur rectangulũ A B E, æquale erit rectangulo D B C., hoc est per hypothesim quadrato B A, quod b est absurdum: quare non occurret B A, circulo nisi in A.

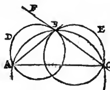
b Ex elementis.

PROPOSITIO LXVI.

SI super A B C trianguli lateribus segmenta circulorum similia descripta fuerint,

 Dico

Dico AB, CB latera trianguli producta contingere in B segmenta ADB, BEC.



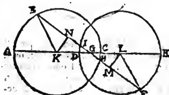
Demonstratio.

ANgulus ABC tam cum angulo ABF quàm angulo segmenti residui in eodem circulo duobus rectis æqualis est; igitur angulus residui segmẽti, angulo FBA æqualis est: quia verò ADB, ABC segmenta sunt similia adeoque & illorum anguli æquales, erit angulus FBA simul cum angulo segmenti ADB duobus rectis æqualis: quare angulus ABF, æquatur angulo residui arcus circuli ADB: vnde FC eundem contingit in B, vt ex elementis patet. eodem modo ostenditur AB contingere in B circulum BEC. Quod erat demonstrandum.

Est hæc conuersa vndecimæ huius.

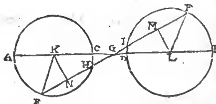
PROPOSITIO LXVII.

DAtis duobus circulis ABC, DEF, oporteat exhibere punctum G, per quod lineæ ductæ diuidant circulos in similes partes.



Constructio & demonstratio.

ACtâ per vtriusque centra KL rectâ AE, diuidatur in G, vt ratio AG ad GE, sit eadem cum ratione AC ad DE. Dico punctum G esse quod quæritur. ducatur enim quæuis BGF occurrens perimetris in I & H: quoniam AG ad GE, eandem habet rationem quam AC ad DE, ex constructione, erit AC ad CG, vt DE ad DG, ac proinde AG ad GK vt EG, ad GL, & GK ad GL vt KA ad LE, id est BK ad LF. demissis igitur perpendicularibus KN, LM ad FB lineam, erit simile triangulum KGN, triangulo GML. quare vt KG ad GL, hoc est AK ad EL, id est AC ad DE, ita est KN, ad LM; igitur BH ad IF, est vt AC ad DE, cùm eadem proportione distent à centris quæ inter se sunt diametri circulorum, quare similia segmenta subtendunt & circulos similiter diuidunt. perfecimus igitur quod imperatum fuit.



CIR-

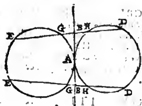
CIRCVLORVM PARS QVARTA

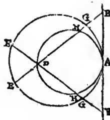
De linearum in circulis potentia.

PROPOSITIO LXVIII.

COntingant sese circuli duo in A puncto, per quod acta contingens AB, occurrat cuius EBD secanti perimetros in E, G, H, D.
Dico GBE rectangulum, rectangulo HBD æquale esse.

Demonstratio.





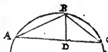
PAtet, cùm vtrumque quadrato contingentis AB, æquale sit.

PROPOSITIO LXIX.

SEgmento circuli ABC inscriptum sit triangulum ABC, à cuius vertice B, normalis demittatur BD.
Dico parallelogrammum ABC in angulo ABC, æquari rectangulo AC,BD.

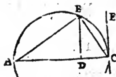
Demonstratio.

PArallelogrammum ABC, duplum est trianguli ABC; sed & AC, BD rectangulum, eiusdem duplum est, cùm basim habeat eandem AC, & BD altitudinem; igitur parallelogrammum ABC in angulo ABC, æquale est rectangulo ACBD. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO LXX.

SI rursum segmento ABC inscriptum fuerit triangulum, à cuius vertice demissa BD, æquidistet contingenri CE.
Dico rectangulum ABC rectangulo ACBD æquale esse.



Demonstratio.

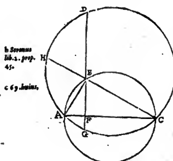
CVm enim EC, BD æquidistent, erunt anguli DBC, BCE, id est anguli DBC, BAC ob EC tangentem æquales; similia igitur sunt triangula DBC, ABC. vnde vt AC ad AB, ita [a] BC est ad BD: patet igitur ABBC, & ACBD. rectangula esse æqualia.

a 17. Sexti.

PROPOSITIO LXXI.

SEcent inuicem circuli duo quorum vnus per centrum alterius transeat sic vt ducta AC, quæ puncta sectionum coniungit, sit diameter circuli transeuntis per centrum alterius; ad quam erigatur per B, in perimetro ABC assumptum, normalis DBG, occurrens ADC perimetro in D & G, & AC in F:

Dico rectangulo DBG æquari ACBF rectangulum.



Demonstratio.

DVctâ CBH, cùm circulus ABC per alterius centrum transeat, erit [b] HB æqualis AB. vnde ABC rectangulum æquale est rectangulo HBC, sed HBC æquale est rectangulo DBG; igitur & DBG æquatur ABC id est [c] ACBF rectangulo. Quod erat demonstrandum.

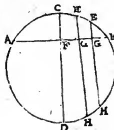
b Serenus lib. 2. prop. 45.

c 69. huius.

PROPOSITIO LXXII.

DIametrum circuli ABC, secet AB, normaliter in F, ponanturq; quæuis EH, occurrentes AB in G.

Dico EGH rectangulum vnà cum FG quadrato, æquari EGH rectangulo vnà cum quadrato FG.



Demonstratio.

QVoniam AB normalis est ad diametrum CD, erit bifariam diuisa in F; & quia non bifariam diuisa est in G, erit AGB, rectangulum vnà cum quadrato FG, [d] æquale quadrato AF. sed AGB rectangulo æquale est EGH [e] rectangulum; addito igitur FG quadrato, erit EGH rectangulum vnà cum quadrato FG, quadrato AF æquale. igitur & EGH rectangulum, vnà cum quadrato FG, æquale est EGH rectangulo vnà cum quadrato FG. Quod erat demonstrandum.

d 5. secundi.
e 35. tertij.

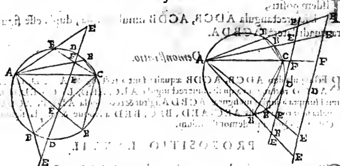
PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

SIt ABC segmentum circuli, cuius AC subtensa, secetur rectâ ED occurrente AC in F vt angulus AFE sit æqualis angulo segmenti ABC: ductæ deinde ex A quotuis rectæ AE occurrant perimetro in B: & ED lineæ in E.

Dico rectangula EAB, inter se esse æqualia.

Demonstratio.



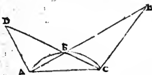
QVoniam æquales sunt anguli AFE, ABC, & communis angulus BAC, similia igitur existunt triangula AFE, ABC, vnde vt AF ad AE, sic AB ad AC, rectangulum igitur CAF rectangulo EAB [a] æquale est. quare & rectangula EAB, inter se sunt æqualia. Quod fuit demonstrandum. [a] 17. sexti.

PROPOSITIO LXXIV.

SEgmento ABC inscripti trianguli ABC latera producta exhibeant triangula ADC, CAE habentia angulos DAC, ACE singulos angulo segmenti æquales.

Dico quadrato AC, æquari rectangulum ADCE.

Demonstratio.



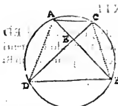
QVoniam angulus ABC æqualis est angulo DAC, & ACB communis triangulis ABC, ADC, similia erunt triangula ABC, ADC. eodem modo similia ostenderetur triangula ABC, AEC: igitur & ADC triangulum simile est triangulo AEC, & DA, AC, CE lateta proportionalia: vnde [b] AC quadrato æquale est rectangulum DACE. Quod fuit demonstrandum. [b] ibid.

PROPOSITIO LXXV.

OCcurrant inuicem ad rectos in circulo ABC lineæ AB, CD, in E, iunctisque extremis, exsurgat quadrilaterum ACBD.

Dico quadratis AC, BD, æquari AD, CB, quadrata.

Demon-



Demonstratio.

CVm enim anguli ad E recti sint, erunt quadrata AD, CB, æqualia quadratis AE, ED, CE, EB; sed iisdem æqualia quoque sunt quadrata AC, DB; igitur quadratis AC, BD, æqualia sunt AD, CB quadrata.

PROPOSITIO LXXVI.

IIsdem positis,

Dico rectangula ADCB, ACDB simul sumpta, dupla esse figuræ quadrilateræ ACBDA.

Demonstratio.

a Lud. à Ceul. & a ij. Rectangula duo ADCB, ACDB æqualia sunt a rectangulo ABCD, sed & ABCD rectangulo æqualia sunt rectangula AEC, AED, BEC, BED, quæ simul sumpta b dupla sunt figuræ ACBDA, igitur & rectangula ADCB, ACDB

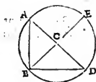
b Patet ex elementis. æqualia sunt rectangulis AEC, AED, BEC, BED adeoque & dupla figuræ ACBDA. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVII.

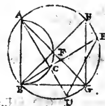
SEcent iterum sese ad rectos in circulo lineæ AD, BE in C.

Dico quatuor quadrata partium AC, CD, CB, CE, simul sumpta, quadrato diametri esse æqualia.

Demonstratio.



TRanseat primò altera linearum, puta AD per centrũ circuli, iunganturque AB, BD. cùm igitur anguli, ACB, DCB recti sint, erunt quadrata AB, BD, æqualia quadratis AC, CB, & CB, CD siue CE, CD, (quia BE in C ab AD diametro diuisa est bifariam) sed quadratum AD, quadratis AB, BD quoque æquale est, cùm ABD sit angulus semicirculi adeoque rectus, igitur etiam quadratum AD, æquale est quatuor quadratis AC, CB, & CB, hoc est CE, CD: quod fuit primò demonstrandum.



Quod si neutra linearum AD, BE transeat per centrum, iunctâ AB, describatur semicirculus ACB, qui per C punctum transibit, cùm angulus ACB rectus ponatur. ex A, verò diameter ducatur AG occurrens circulo ACB in F, per quod collocetur BFH: iunganturque HG, ED, erunt igitur HG, ED lineæ c18. huius. adeoque quadrata inter c se æqualia: quia verò quadrata AB, HG, sunt æqualia quadratis HF, FG, AF, FB, id est quadrato diametri AG vt priùs ostensum est; igitur & quadrata ED, AB, quadrato diametri AG æqualia sunt: sed quadrata ED, AB, æqualia sunt quadratis EC, CD, & AC, CB, igitur & quadrata EC, CD, AC, CB, quadrato diametri sunt æqualia. Quod fuit demonstrandum.

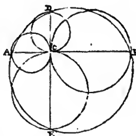
PRO-

PROPOSITIO LXXVIII.

SEcent ſeſe denuo in C adrectos duæ quæuis A B, D E, in circulo A B D, & ſuper partibus, circuli deſcribantur.

Dico illos ſimul ſumptos æquales eſſe circulo A B D.

Demonſtratio.



CIrculi inter ſe eam rationem habent quam à diametris a deſcripta quadrata: oſtendimus autem præcedenti propoſitione quadrata A C, C D, C B, C E, æquari quadrato diametri circuli A D B; igitur & circuli ſuper A C, C D, C B, C E, deſcripti æquales ſunt circulo A D B. Quod fuit demonſtrandum.

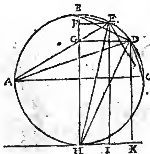
a 2. duodecimi.

PROPOSITIO LXXIX.

SEmicirculo A B C inſcripta ſint triangula quęcunque A E C, A D C, actaque contingente H K quæ A C diametro æquidiſtet, ponantur E I, D K normales contingenti H K.

Dico quadratum compoſitæ ex A E, E C, ad quadratum compoſitæ, ex A D, D C eam habere rationem quam continet E I ad D K.

Demonſtratio.



POſitâ H B diametro ducantur ad illam normaliter E F, D G, iunganturque E H, D H, E B, D B, quoniam F E normaliter inſiſtit rectę B H, erunt F H, H E, H B, lineæ in cõtinua analogia, vt ex elementis patet. vnde rectangulo F H B, æquatur H E quadratum; eademque de cauſa quadrato H D, rectangulum G H B; quare vt F H ad G H, hoc eſt E I, ad D K, ſic E H quadratum ad D H quadratum: Rurſum cùm ſit vt H B ad H D, ita compoſita b ex A E, E C, ad compoſitam ex A D, D C, erit vt quadratum H E, ad H D quadratum, ſic quadratum compoſitæ ex A E, E C, ad quadratum compoſitæ ex A D, D C; igitur vt E I ad D K, ita quadratum compoſitæ ex A E, E C, ad quadratum compoſitæ ex A D, D C. Quod demonſtrandum fuit.

b 24. huius.

PROPOSITIO LXXX.

SEmicirculo A B C inſcripta ſint triangula duo A B C, A D C; atque ex C, ad oppoſita latera rectę ducantur C E, C F, vtcunque.

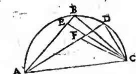
Dico ſi intra aream circuli occurrant rectis A B, A D, in E, F, quadra-

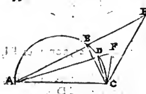
ta A E, E C, vnà cum rectangulo A E B bis sumpto, æquari quadratis A F, F C vnà cum rectangulo A F D bis sumpto:

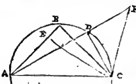
Si verò extra circulum occurrant, dico quadrata A E, E C, minùs A E B rectangulo bis sumpto, æquari quadratis A F, F C minùs A F D bis sumpto;

Quod si autem altera intrà aream circuli cadat, altera extra, dico quadrata A E, E C cum A E B rectangulo bis sumpto, æquari quadratis A F, F G minùs rectangulo A F D bis sumpto.

Demonstratio.







SI enim cadat C E, C F, intrà aream semicirculi, constituent angulos obtusos, A E C, A F C, cùm A B C, A D C recti sint, vnde per elementa quadrata A E, E C, cum rectangulo A E B, bis sumpto, quadrato A C æqualia erunt; sed eidem A C quadrato æqualia sunt A F, F C, quadrata vnà cum rectangulo A F D bis sumpto; igitur quadrata A E, E C cum A E B rectangulo bis sumpto æqualia sunt quadratis A F, F C vnà cum rectangulo A F C bis sumpto. Quod erat primum.

Si verò C E, C F extra cadant; patet angulos A E C, A F C esse acutos: quare tam quadrata A E, E C minùs rectangulo A E B bis sumpto, æquabuntur quadrato A C, quàm quadrata A F, F C minùs A F D rectangulo bis sumpto: vnde veritas secundę partis quoque manifesta est.

Partis tertiæ demonstratio ex ante dictis clarè patet; igitur, &c. Quod erat demonstrandum.

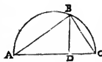
PROPOSITIO LXXXI.

SEmicirculo A B C triangulum inscribatur A B C, à cuius vertice ad diametrum demittatur perpendicularis B D.

Dico A D C rectangulum, & rectangulum A B C, denique quadratum A C in continua esse proportione.

Demonstratio.

a 70. huius.
b 1. sexti.
c 35 tertij.



QVadratum A C est ad rectangulum A B C, hoc est a A C B D rectangulum vt b A C ad D B: sed & rectangulum A C B D est ad quadratum B D c hoc est rectangulum A D C, vt A C ad B D, igitur continuant eandem rationem A C quadratum, rectangulum A B C, vnà cum rectangulo A D C. Quod fuit demonstrandum.

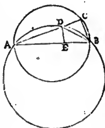
PRO-

PROPOSITIO LXXXII.

PEr extrema diametri A B circuli A B C, circulus describatur A D B, positâque A C, quæ occurrat A D B perimetro in D, demittatur normaliter D E ad diametrum A B, iunganturque D B, C B.

Dico rectangulum ex A B, D E, ad rectangulum A D B, eam rationem habere quæ est inter rectas C B, D B.

Demonstratio.



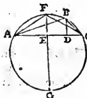
QVoniam angulus A C B in semicirculo rectus est adeoque æqualis angulo A E D; & A E D, A C B triangulis communis angulus D A E, erunt A D E, A C B triangula similia. vnde vt A B ad C B sic A D ad D E, & A B D E rectangulum æquale rectangulo A D C B: sed rectangulum A D C B est ad rectangulum A D B vt C B ad D B, igitur & rectangulum A B D E ad rectangulum A D B est vt C B ad D E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIII.

OCcurrat circuli A B C diametro F G in E orthogona A C, quam in D secet normaliter B D, iunganturque A B, B C.

Dico rectangulum A B C ad rectangulum A C B D rationem obtinere eandem, quam F G diameter ad A C lineam.

Demonstratio.



IVngantur A F C. quoniam A C linea in E bifariam adeoque ad rectos est diuisa, erunt A F, F C lineæ æquales, & A F C rectangulum æquale quadrato A F id est a rectangulo E F G, quia F E, F A, F G sunt proportionales. Sed E F G rectangulum est ad rectangulum A C F E vt F G ad A C; igitur & rectangulum A F C ad A C F E rectangulum id est b parallelogrāmum A F C, vt F G ad A C; quia verò est A F C rectangulũ ad rectãgulũ A B C vt A F C parallelogrāmum in angulo A F C, ad parallelogrammum A B C, in eodem angulo A B C (cũ ex ijsdem rationes habeant compositas) erit permutando A B C rectangulum ad parallelogrāmum A B C, id est ad rectangulum A C B D vt A F C rectangulum ad parallelogrammũ A F C id est ad c A C F E rectangulum, id est ex demonstratis vt F G ad A C. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi & 5. secũdi.

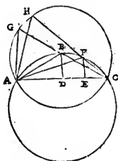
b 69. huius

c Ibid.

PROPOSITIO LXXXIV.

SEcent se vtcunque circuli A B C, A D C in punctis A C, iunctaque A C ponantur C E H, C B G, occurrentes perimetris circulorum in B, E, G, H. iunganturque A B, A E.

Dico rectangulum A B C, ad A E C rectangulum eam rationem obtinere, quam G B C, ad rectangulum H E C.



Demonstratio.

IVngantur AG, AH: quoniam anguli ABC, AFC eiusdem segmenti æquales sunt, erunt & reliqui ABG, AFH quoque inter se æquales: vnde cùm & anguli AGC, AHC eidē insistentes arcui sint æquales, erūt AGB, AHF triangula similia: & AF ad AH, vt AB ad AG. est autem ratio rectanguli ABC, ad AFC rectangulum composita ex ratione AB ad AF, hoc est GB ad HF, & ex BC ad GC, & ex iisdem quoque composita est ratio rectanguli GBC ad HFC; igitur vt rectangulum ABC ad AFC, sic GBC rectangulum ad HFC. Quod erat demonstrandum.

Corollarium primum.

HInc consequens est demissis normalibus BD, FE esse GBC, rectangulum ad rectangulum HFC, vt est recta BD, ad EF. est enim vt ABC rectangulum ad AFC sic GBC ad rectangulum HFC; sed ABC ad AFC, rectangulum est, vt ABC parallelogrammum in angulo ABC, ad parallelogrammum, AFC in angulo AFC (quia ex iisdem rationem habent compositam) hoc est vt rectangulum ACBD ad [a] rectangulum ACFE; igitur vt rectangulum ACBD, est ad rectangulum super ACFE, sic GBC rectangulum ad rectangulum HFC: quare vt BD ad EF, sic GBC rectangulum ad rectangulum HFC. Quod fuit demonstrandum.

a 69. huius.

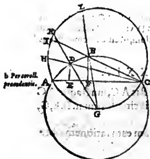
Corollarium secundum.

EAdem manente figura, patet AG esse ad AH vt AB ad AF, siue vt GB ad HF, quia AGB, AHF triangula ostensa sunt inter se similia: quod speciatim ideò volui apponere, quia aliquoties posteà assumendum est.

PROPOSITIO LXXXV.

TRanseat per circuli ABC centrum, perimeter circuli AGC, iunctisque AG, ponantur quæcunque BF, DE normales ad AC: ex centro deinde G, per B & D, agantur rectæ GBL, GDK.

Dico DE, BF lineis KD, LB, esse proportionales.



Demonstratio.

POnantur per D & B rectæ CDH, CBI. vt DE, ad BF, sic HDC [b] rectangulum ad IBC rectangulum, hoc est KDG ad LBG: sed est quoque vt KD ad LB, sic KDG rectangulum ad rectangulum LBG, cùm DG, BG lineæ sint æquales; igitur vt DE ad BF; sic KD ad LB. Quod fuit demonstrandum.

b Per coroll. præcedentis.

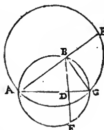
PRO-

PROPOSITIO LXXXVI.

OCcurrat iterum circulus A B C, cuius diameter A C, centro circuli A E C, ductaque ex A recta A B E, ponatur normalis B D F ad A C. Dico lineas A C, A E, & compositam ex A C & B F, in continua esse analogia.

Demonstratio.

QVadratum A E, æquatur quadratis A B, B E, & A B E [a] rectangulo bis sumpto: est autem quadratum B E æquale B C [b] quadrato, & A B E rectangulum bis sumptum æquale A B C rectangulo (hoc est [c] A C B D) bis sumpto, hoc est rectangulo A C B F semel sumpto; igitur quadratum A E, æquale est quadratis A B, B C, hoc est quadrato A C, & rectãgulo A C, B F, semel sumpto. Sed A C, quadrato vnà cum rectangulo A C B F, æquatur rectangulum super A C & composita ex A C, B F; igitur quadratum A E, æquale est rectangulo super A C & composita ex A C B F. Vnde lineæ A C, A E & composita ex A C B F in continua sunt analogia. Quod fuit demonstrandum.



a 4 secundi.
b Serenus lib 1. propos. 45.
c 69. huius.

PROPOSITIO LXXXVII.

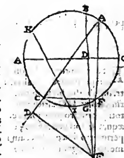
EXtra aream circuli A B C, sumpto puncto E, demittatur ad diametrum A C normalis E D, ponaturque quæuis alia E I K.

Dico si D punctum communis linearum A C, D E intersectio cadat intra circulum, quod E D quadratum superet rectangulum I E K rectangulo A D C: si verò D, extra cadat, dico quod E D quadratum deficiat à rectangulo I E K, rectangulo A D C.

Demonstratio.

PRoducta D E, circuli perimetro occurrat in B: quadratum D E æquale est quadratis D G, G E vnà cum D G E rectangulo bis sumpto id est rectangulo B G E semel sumpto. sed B G E rectangulum vnà cum quadrato G E æquatur rectangulo B E G, igitur quadratum D E æquale est quadrato D G, id est rectangulo C D A vnà cũ rectangulo G E B id est I E K.

Quod si D extra circuli aream occurrat diametro A C productæ, ducatur ex E recta E A, occurrens perimetro circuli in F, iunganturque C F: erunt itaque similia triangula A D E, & C A F, & D A, A E latera proportionalia lateribus A F, A D: vnde & rectangula C A D, F A E, sunt inter se æqualia; quia verò quadratum A E æquatur rectangulis A E F, E A F, eidemque A E quadrato æquantur quadrata A D, D E, quadratum autem A D, æquale est rectangulis A D C, D A C, erunt rectangula A E F, E A F, æqualia rectangulis A D C, D A C vnà cum quadrato D E, ostensum autem est rectangulum D A C, rectangulo F A E æquale, quare residua quoque inter se æqualia sunt, id est C D A rectangulum auctum quadrato D E, æquale rectangulo F E A, id est I E K. Quod erat demonstrandum.

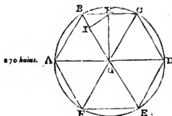


PROPOSITIO LXXXVIII.

Circulo A B C, quodlibet polygonum inſcribatur regulare; ductaque ex G centro, G H quæ lateri B C normaliter inſiſtat; ex H ponatur H I, ad rectos angulos ipſi B G.

Dico totum polygonum, ad B G quadratum toties ſumptum, quot laterum eſt polygonum, eam rationem obtinere quam H I recta, ad B G.

Demonſtratio.



a 70 huius.

Ducantur ex G centro ad angulos polygoni, rectæ A G, B G, C G, &c. Quoniam polygoni regularis latera æqualia ſunt, erunt ſingula triangula A G B, B G C, C G D, &c. inter ſe æqualia: ac proinde duplicia trianguli B H G, cùm B C in H diuiſa ſit bifariam: ſed & B H G trianguli, duplum eſt rectangulum B H G, hoc eſt a B G H, igitur B C G triangulo æquale eſt B G H I rectangulum, eſt autem B G H I, rectangulum, ad quadratum B G, vt H I, ad B G; igitur etiam B C G triangulum, eſt ad B G quadratum, vt H I ad B G: quia verò idem de ſingulis polygoni triangulis eodem modo demonſtratur, patet totum polygonum ad quadratum B G toties ſumptum, quot laterum eſt polygonum eam proportionem habere quam H I linea, ad rectam B G. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIX.

Iiſdem poſitis,

Dico duplum polygoni ad quadratum lineæ, quæ polygoni perimetro ſit æqualis, eam rationem habere, quam H G linea ad lineam polygoni perimetro æqualem.

Demonſtratio.

b Per elemen.

Eſt enim totum polygonum, æquale triangulo baſim habenti æqualem b lineæ toti perimetro æquali, altitudinem verò H G; igitur duplum polygoni æquatur triangulo illi, bis ſumpto, hoc eſt rectangulo baſim habenti æqualem polygoni perimetro & H G altitudinem; ſed rectangulum hoc ad quadratum lineæ æqualis toti perimetro polygoni, eam obtinet proportionem, quam H G linea ad lineam æqualem toti perimetro; ergo polygonum bis ſumptum ad quadratum lineç, quæ perimetro ſit æqualis, eam habet rationem, quam H G linea, ad rectam toti perimetro polygoni æqualem: quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Hoc loco non videtur omittendum ſequi ex hac propoſitione per ea quæ in libro de progreſſionibus Geometricis diximus, circulum bis ſumptum, ad quadratum ſuæ peripheriæ, eam ſeruare rationem, quam ſemidiameter ad perimetrum, circulum autem ſemel ſumptum ad quadratum perimetri circularis, eam proportionem continere, quam quarta pars diametri ad circuli perimetrum, atque adeò propoſitio-

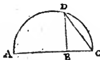
propositionis Archimedeæ veritatem de comparatione circuli ad rectangulum & æquale aliter hinc posse demonstrari.

PROPOSITIO XC.

Diametro circuli A B C insistat ad rectos angulos recta B D, iungaturque D C.

Dico rectangulum A B D, ad A C D rectangulum triplicatam eius habere rationem, quam obtinet linea D B ad D C lineam.

Demonstratio.



Quia D B normalis est ad diametrum A C rectæ C B, B D, B A, item C B, C D, C A per elementa in continua sunt analogia; vnde cùm prima B C vtrique seriei communis sit, erit [a] ratio A C ad A B tertiæ ad tertiam duplicata eius quam habet secunda C D, ad D B secundam, sed ratio rectanguli A B D, ad rectangulum A C D composita est ex ratione A C ad A B, hoc est duplicata D C, ad D B, & ex ratione D C, ad D B, patet igitur rationem A B D rectanguli ad rectangulum A C D, triplicatam esse lineæ D C ad D B. Quod fuit demonstrandum.

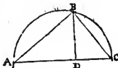
[a] 217. Libri de progressionibus.

PROPOSITIO XCI.

Semicirculo A B C triangulum inscribatur A B C, è cuius vertice ad basim demissa sit normalis B D.

Dico rectangulum D A B, ad D C B rectangulum, triplicatam rationem habere eius, quam linea A B ad B C.

Demonstratio.



Cum enim B D normalis sit ad diametrum A C, erunt denuo tres A C, A B, A D, & A C, C B, C D in continuata ratione: quia verò communem habent primam A C, erit A D ad D C, in triplicata ratione A B ad B C, sed D A B rectangulum ad D C B rectangulum rationem habet compositam ex ratione D A ad D C, id est duplicata A B ad B C & ex A B ad B C, igitur rectangulum D A B, ad D C B triplicatam habet rationem A B ad B C. Quod erat demonstrandum.

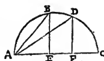
PROPOSITIO XCII.

Semicirculi A B C diametro A C in E & F occurrant normales E B, F D, iunganturque A B, A D.

Dico E A B rectangulum, ad F A D rectangulum, rationem habere triplicatam rectæ A B, ad A D.

Demon-

Demonstratio.



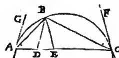
Linea A E ad A F duplicatam habet rationem A B ad A D, cùm tam A C, A B, A E, quàm A C, A D, A F continuè sint proportionales, habeantque communem primam A, vnde cùm ratio rectanguli E A B ad F A D composita sit ex ratione A E ad A F, & A B ad A D, patet E A B rectangulum ad rectangulum F A D triplicatam habere rationem eius quam habet A B ad A D. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCIII.

Segmento cuiuis A B C triangulum inscribatur A B C, ductisque contingentibus A G, C F, ponantur ex B vertice trianguli duæ B D, B E, contingentibus æquidistantes.

Dico rectangulum D A B, ad E C B, triplicatam continere rationem eius, quam habet A B ad B C.

Demonstratio.



a 16. tertij.

Cum A G sit contingens, erit angulo G A B id est A B D (ob A G, B D parallelas) æqualis angulus a A C B: & quia F C quoque circulum contingit, angulo F C B id est E B C (ob E B, F C parallelas) æqualis est angulus B A C: triangula igitur A B D, B E C similia sunt triangulo A B C: vnde vt A C ad A B, sic A B ad A D: & vt A C ad C B, ita C B ad C E: duæ igitur continuè proportionalium series communem habent primam A C; vnde A D ad E C, tertia ad tertiam b duplicatam habet rationem A B ad B C secundæ ad secundam: ratio autem rectanguli D A B ad E C B, rectangulum, composita est ex ratione A D ad E C, & A B ad C B, triplicata igitur ratio est rectanguli D A B ad E C B rectangulum. Quod erat demonstrandum.

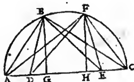
b 27. de progressionibus.

PROPOSITIO XCIV.

Circuli A B C diameter secetur in D & E, punctis, æqualiter à centro semotis; ex quibus binæ ad duo quædam perimetri puncta B, F rectæ deducantur D B, D F, E B, E F.

Dico quadrata D B, B E simul sumpta quadratis D F, F E esse æqualia.

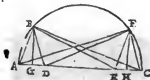
Demonstratio.



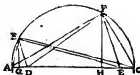
c 12. secundi.

Iungantur A B, B C, A F, F C, ex B & F demittantur perpendiculares B G, F H ad diametrum A C, quæ cadant primò inter D & E; erunt igitur anguli A D F, C E F rectis maiores; vnde quadratum c F C excedit quadratum F E, quadrato C E vnà cum rectangulo C E H bis sumpto, & quadratum

tum IAF superat DF quadratum quadrato AD, vnà cum rectangulo ADH bis sumpto, est autem rectangulum CEH, bis sumptum, vnà cum rectangulo ADH bis sumpto, [a] æquale rectangulo CED bis sumpto; additis igitur quadratis æqualibus EC, AD, erit CED rectangulum bis sumptum vnà cum quadratis AD, EC, hoc est rectangulum ECA semel sumptum, excessus quo AF, FC, quadrata superant quadrata duo DF, FE. Eodem modo ostendetur quadrata duo AB, BC excedere quadrata duo DB, BE, rectangulo DAC id est ECA: igitur cùm quadrata AF, FC æqualia sint quadratis AB, BE, & excessus DAC, ECA, super quadratis DF, FE, DB, BE, æquales quoque sint, illis ablatis manent DB, BE quadrata, æqualia quadratis AF, FE. *a Per ele-menta.*



Secundò normales ex B & F demissæ cadant intra puncta AD, EC; BG quidem inter A & D; FH verò inter E & C, cùm angulus ADF recto maior sit, quadratum AF, superat quadrata AD, DF, rectangulo [b] ADH, bis sumpto, hoc est rectangulo ADE, vnà cum rectangulo ADEH bis sumptis: quia verò FEC angulus recto minor est, quadratum FC deficit à quadratis [c] EF, EC rectangulo CEH hoc est ADEH bis sumpto; igitur ADE rectangulum bis sumptum est excessus quo quadrata duo AF, FC superant quadrata quatuor AD, DF, CE, EF. demptis igitur æqualibus quadratis AD, CE, remanet ADE rectangulum bis sumptum excessus quo AF, FC, quadrata, excedunt quadrata DF, EF; eadem ratione ostenditur quadrata DB, BE, superari à quadratis AB, BC, rectangulo CED bis sumpto. igitur cùm AB, BC, quadrata æqualia sint quadratis AF, FC, & ADE rectangulum (excessus quadratum AF, FC, super DF, FE quadratis) æquale sit CED rectangulo, (excessui quo AB, BC quadrata, superant DB, BE quadrata) demptis excessibus, remanent DF, FE quadrata, æqualia quadratis DB, BE. *b 12. secundi. c 13. secundi.*



Tertiò normalium BG, FH, altera intra DE, altera verò intra AD, spatium contineatur: ostendetur vt priùs, CED rectangulum bis sumptum, demptis æqualibus quadratis AD, EC æquale esse excessui quo CB, BA quadrata superant EB, BD; item DF, FE, quadrata superari à quadratis AF, FC, rectangulo ADE bis sumpto demptis quadratis AD, EC: igitur cùm tota sint æqualia & excessus insuper æquales sint, residua quoque quadrata DF, FE, erunt residuis quadratis DB, BE æqualia. Quod fuit demonstrandum.

 Scho-

Scholion.

Posset aliter & commodius propositio hæc demonstrari, ac facilius fortaßis, sed aliam studio in aliquorum gratiam adhibere volui demonstrationem.

Libri Tertij Finis.



PRO-

PROLEGOMENA
AD
SECTIONES
CONI.



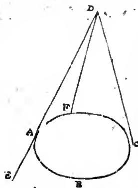
Onicarum sectionum affectiones & accidentia indagaturi, alieno nonnihil ab antiquis consilio rem aggredimur: illi etenim proprietates quas pluribus sectionibus communes esse aduerterunt, communi quoque demonstratione inuoluerunt, nec immeritò, exigente talem scribendi rationem ipso doctrinæ tenore, ordine ac nitore: nos autem in alium scopum collimãtes, in gratiam eorum, qui Geometriæ afficiuntur, singillatim singulas explanare intendimus, quo faciliore methodo & minùs confusâ, tyrones ad conicarum speculationum contemplationem inuitentur & alliciantur. Nam vt rectè Fredericus Commandinus ait, quod si aliqua pars est Matheseos quæ nostris incognita Philosophis, interpretationis lumen aliquod postulet, ea profectò est quæ de Conicis appellatur: quanquam enim à veteribus diligenter tractata sit, tamen eorum monumenta aut ad nos non peruenerunt, aut ita peruenerunt vt vix propter vetustatis iniurias maximasque difficultates intelligantur. conabimur autem ita planas reddere quas præ manibus habemus conicas materias, vt vel leuiter in elementis Euclidis versati eas percipere queant, sine vllo tadio, imò verò cum orexi ad vlteriora tendendi, & has lucubrationes in immensum extendendi. neque enim Geometria scientia terminis contineri potest, multoque minùs exhauriri, cùm abyssus sit vastissima, omnem Oceanum quarumcumque speculationum absorbens. Ordiemur itaque ab ipsius nominis notione, phaleris omissis, exponentes, quid Coni nomenclaturâ & natura ex ipsius descriptione aut construendi ratione denotetur.

DEFINITIO.

Quid sit Conus.

COnum appello corpus habens originem ex circumductu lineæ à punctо in sublimi posito in infinitum protensæ circa perimetrum circularem, quæ in diuerso ab eodem puncto plano constituta sit.

DE



Expositio.

Concipiatur in hunc finem circulus quidam ABC, extra cuius planum in quo iacet, assumatur quoduis punctum D, à quo ducta sit linea AE contingens perimetrum circularem in puncto aliquo A: agatur verò linea DE circa peripheriam integram circuli ABC donec in A redeat, hac tamen conditione vt D punctū fixum permaneat, hoc est, vt extremum punctum lineæ DA, quod applicatum est initio circumuolutionis puncto D, ab ipso numquam recedat, tali inquam circumlatione lineæ DE, orietur figura DABC binas habens superficies, vnā motu rectæ DE efformatam, alteram verò circulum ABC. Priorem appellare solent superficiem præter basim, secundam autem ipsam coni basim; punctum D vertex coni nuncupatur, axis verò linea à vertice D ad centrū baseos pertingens.

Ex hac coni descriptione sequitur à quouis puncto in superficie conica assignato posse duci rectam lineam ad ipsum verticem D. cùm enim per rectam DA circa basim ABC circulatione facta, producta sit coni superficies, necesse est vt à quouis puncto perimetri ABC duci possit recta ad verticem D.

Hinc superuacaneum credo demōstrare quod rectæ omnes sint lineæ quæ à vertice ad quodlibet punctum in conica superficie ducuntur; proindeque satis esse manifestum ex ipsa ratione construendi conum, omnem sectionem quæ fit per verticem, triangulum exhibere cuius latera sint in coni superficie.

Suppono quoque æquè notum, omnem lineam à puncto in superficie coni assumpto ductam ad quoduis aliud, quod in recta non existat quæ ad verticem tendit intra conum ipsum penetrare si infinitè vtrimque producatur, licet hæc omnia placuerit Apollonio demonstrare, quarum demonstrationes si lector desideras, in eodem poteris cognoscere.

Hoc loco occurrit notandum pluribus alijs vijs conum describi posse; puta circumducendo ex eodem puncto D, in sublimi posito rectam AD circa figuram ellipticam aut quamlibet aliam è conicis, sed placuit non sine causa antiquis circulo solo vti, eò quod, vt in decursu libri apparebit, commodior figura sit ad demonstrationes formandas: adde quod figurarum aliarum efformatio conum prius supponat, ex quo ferè solo ortum habent, præter ellipsin, quæ vt rectè Serenus ostendit, ex Cylindro quoque excludi potest.

Quotuplex sit conus.

Duplex est conus; alius Isoscelius est siue Æquicruris, qui & rectus dicitur; alius Scalenus. Æquicruris est à cuius vertice linea ad basim normaliter demissa in baseos centrum pertingit. Scalenus autem omnis ille conus appellatur, qui perpendicularem ductam à vertice ad circularem basim, si opus est etiam extensam infinitè, extra centri punctum constitutam habet, quod basis medium est.

Vnde rectum quoque dicunt conum qui æquicruris est, obliquum qui scalenus: discrimen inter vtrumque in eo maximè situm, quod rectum conum si per axem plano dispescas, Isoscelium resultabit in partibus diuisis triangulum, cuilibet alteri æquale & simile quod per axem fit: scalenus autem sine numero varia producit triangula sectionibus per axem repetitis, quæ inter se neque similia sint, neque æqualia; circa quæ has sequentes propositiones præmittemus. Ad quas perlegendas priusquam accedas amice Lector,

NO-

NOTA

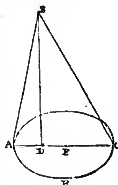
Pleraque theoremata, quæ in hisce prolegomenis adferemus, proponi etiam ac demonstrari à Sereno Antinsensi Philosopho ac Geometra, libro secundo de sectione coni. Omnino mihi memoria exciderat tractatam à Sereno eandem esse materiam: iam enim annisunt viginti & amplius quod authorem illum non legerim. Velim itaque, qui hæc leget plagij reum me ne faciat; sed cogitet, si deinceps fortasse quædam mihi cum Sereno communia occurrent, mihi eadem, quæ Sereno olim, potuisse incidere.

PROPOSITIO PRIMA.

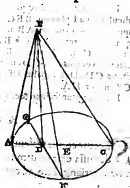
IN cono scaleno si à vertice linea ad perpendiculum demittatur, & per verticem, centrum basis, ac punctum à perpendiculo denotatum planum agatur,

Dico triangulum per hanc sectionem factum continere maximam & minimam linearum quæ in superficie conica exhiberi possunt.

Demonstratio.



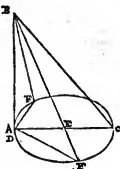
Triplex est hic casus: vel punctum perpendiculo denotatum intra peripheriam baseos existit, vel in ipsa peripheria, vel denique extra ipsum circulũ. Pro primo igitur casu ponatur conus ABC & baseos centrum E: vertex autem B: à quo demissa perpendicularis, occurrat basi intra peripheriam in puncto D, per quod, & per centrum, agatur planum quod pertingat vsque ad B coni verticem; exhibebit hæc sectio triangulum ABC: nam ex constructione coni BA, BC sunt rectæ lineæ; ostendendum est itaque AB esse minimam omnium linearum, BC verò maximam quæ in superficie conica existunt.



Ductâ quauis BG, ponatur ex G recta GDF, quoniam ADC per centrum transit, erit AD minor a quàm GD, & quadratum AD, minus quadrato GD: additoque communi quadrato DB, quadrata AD, DB, minora sunt quadratis GD, DB. angulus autem GDB b rectus est, quemadmodum & angulus ADB: igitur quadratum AB, æquatur c quadratis AD, DB, quadratum verò GB æquatur quadratis GD, DB. ergo quadratum AB, minus est quadrato GB. ergo linea AB minor rectâ BG. a 7. tertij. b defin. 3. vndecimi. c 47. primi.

Eodem pacto ostendetur recta BC omnium maxima: ex puncto quippe quouis F, si ducatur quæuis FB: & per D ponatur FD, quia ADC per centrum transit, d DC maior est quàm DF. vnde quadrata CD, DB maiora sunt quadratis FD, DB, sed cùm rursum anguli CDB, FDB sint recti, quadratum CB quadratis CD, DB, & quadratum FB quadratis FD, d 7. tertij. DF

DB æqua-

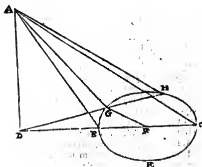


DB æquale est. Ergo quadratum CB maius est quadrato FB, adeoque recta CB maior quàm FB. vnde maxima BC est earum quę in superficie coni assignari possunt; AB verò minima. Quod demonstrari oportuit.

Iam verò BD perpendicularis è coni vertice demissa cadat in perimetrum circuli AFC; dico iterum AB lineam esse minimam, & BC maximam illarum quæ in superficie coni existunt.

Ducatur enim quæuis BF, iungaturque AF, rursum igitur quadratum BF a æquatur quadratis AF, AB, adeoque maius est quadrato AB. Vnde BF, linea maior est rectâ AB: clarum est insuper BC rectam omnium esse maximam, nam quadratum BC æquale quadratis CA, AB maius est quadraro BF æquali quadratis FA, AB.

a 47. primi.



Reliquus casus est in quo dato scaleno cono ABC, linea AD demissa perpendiculariter ad planum BEC productum, extra ipsum conum signat punctum D: quo casu dico rursum AB minimam esse, AC verò maximam. Ducatur enim quæcunque recta AG; b BD minor est DG, igitur quadratum AG æquale quadratis GD, DA maius est quadrato AB. ergo AB minor est quàm AG, ducatur iam quęuis AH; CD c maior est quàm HD, ergo quadratum CA, æquale quadratis CD, DA, maius est quadrato HA, æquali quadratis HD, DA. ergo CA maior HA.

b 8. tertij.
c 8. tertij.

In cono igitur scaleno &c. quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO II.

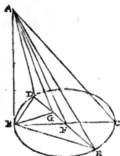
SEcetur conus scalenus (à cuius vertice linea ad basim perpendiculo demissa extra basim non cadit) per centrum & verticem, sectione exhibente triangulum, ad cuius basim demittatur normaliter recta à vertice coni.

cadat.

Dico illam intra conum cadere.

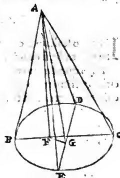
Demon-

Demonstratio.



DVplex est casus; primus quo conus A B C cuius basis B D C, habet B A perpendicularem à perimetro aliquo puncto ad verticem erectam; alter dum linea à vertice ad basim ducta perpendiculariter intra basim cadit. Igitur fiat sectio per centrum F, & apicem A, exhibens triangulum A D E: ostendere igitur oportet, normalem ex A ad basim D E demissam intra conum, hoc est inter puncta D & E occursuram diametro D E. Ducantur enim B D & B E; deinde ex puncto B ponatur B G, normalis ad diametrum D E (cadet hæc necessariò inter puncta D, E) & iungantur A G. quoniam A B ex hyp. normalis est basi, recta E B in basi ad ipsam ducta per defin. 3. 11. normalis est. ergo quadratum A E æquatur quadratis A B, B E: hoc est a quadratis A B, B G, G E. quadratum autem A G quod angulus A B G b etiam rectus sit æquatur quadratis A B, B G, igitur quadratum A E excedit quadratum A G, quadrato G E. vnde quadratum A E æquale est quadratis A G, G E. angulus ergo A G E, rectus est, & A G perpendicularis. Atqui hæc ducta est à vertice coni & occurrit basi trianguli intra conum. Perspicua est igitur veritas propositionis in casu primo. [a 47. primi. b ibid.]

Eodem modo procedet demonstratio si loco lineæ A E, vtamur linea A D.

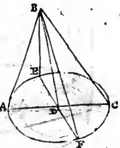


Quod si perpendicularis à vertice coni ad coni basim demissa cadat intra conum vt A F rursum ducatur F G normalis ad E D, iungaturque A G. Eodem planè discursu demonstrabimus quadratum A E æquari quadratis A G, E G; adeoque angulum A G E rectum esse, & A G perpendicularem ad basim trianguli A D E, ex quo manifesta in hoc etiam casu propositionis est veritas.

PROPOSITIO III.

LAterum quadrata cuiuscunque trianguli in cono scaleno per axem facti æqualia sunt quadratis laterum cuiuscunque alterius trianguli per eundem axem.

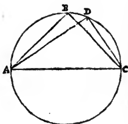
Demonstratio.



SIt enim A B C conus scalenus cuius axis B D: per quem fiat quæuis sectio B E F: fiat autem A B C triangulum aliud sectum per axem B D. Dico quadrata A B, B C, quadratis B F, B E esse æqualia, quadrata enim A B, B C ostensa sunt libro quem de linearum potentijs scripsimus, æqualia esse quadratis A D, D C, & B D bis sumpto; at etiam eodem discursu ostensum est quadratis B F, B E æquari quadrata F D, D E vnà cum quadrato B D bis sumpto: igitur cùm F E. A C lineæ earumque dimidiæ F D, D E, A D, C D sint inter se æquales, patet veritas demonstrationis.

Corolla-

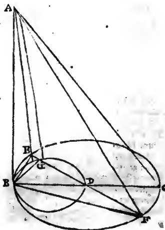
Corollarium.



Hinc colligere licet facilem praxim cognoscendi latera triangulorum quæ per axem sectione facta emergunt, & proportionem illorum inter se. ponatur enim semicirculus ABC: cui ABC triangulum sit inscriptum habens latera AB, BC æqualia lateribus maximi trianguli alicuius coni per axem secti: Quoniam ergo quadrata laterum minimi trianguli per axem eiusdem coni æquantur quadratis laterum maximi AB, BC, (hoc est quadrato AC) poterunt & minimi latera inflecti in semicirculo, quæ sint AD, DC. quod si tertia quędam sectio fiat per eundem axem, proportio laterum illius trianguli, reperietur necessariò in aliquo triangulorum quod habebit basim AC, & verticē in vno punctorum quę sunt in parte perimetri BD. cùm enim æqualia sint quadrata laterum vnius trianguli quadratis laterum alterius, quod per axem facta sectione resultat, sintque ABC trianguli quadrata AB, BC æqualia quadratis laterum maximi, quadrata verò AD, DC æqualia sint quadratis laterum minimi; sequitur latera cuiuscunque alterius, quod per axem coni producitur, in aliquo triangulorum reperiri debere quod basim habeat AC & latera reliqua sese in aliquo punctorum decussantia quę in arcu BD, assignari possunt, quod ex decursu sequentium propositionum magis elucidabitur.

PROPOSITIO IV.

In cono scaleno à cuius vertice demissa perpendicularis in perimetrum baseos cadit, si quoduis triangulum per axem sectione facta exhibeatur: Dico quod normalis à vertice coni ducta ad basim trianguli cadet in circuli perimetrum qui describetur diametro intercepta inter perpendicularem à vertice ad basim ducta & centrum baseos eiusdem.



Demonstratio.

Sit igitur ABC conus cētrū baseos D. à coni vertice A recta AB demissa perpendiculariter, cadat in B punctum perimetri baseos BEC, descripto deinde circulo BGD, super diametro BD, agatur planum per axem quodcumque AEF, exhibens triangulum AEF; cuius basis primò secet circulū in punctis DG: ad G ex A puncto verticis, demittatur AG. Dico illam esse quæ basi EF normaliter insistit: ducatur enim recta linea BG, iungaturque BF. Quoniam igitur ex hypothesi AB recta est plano basis BE, CF. a angulus ABF rectus est: adeoque quadratum AF æquale quadratis AB, BF; hoc est, quoniam angulus BGF in semicirculo etiam rectus

a def. 3. vndecimi.

rectus est, quadratis AB, BG, GF. quadratum autem AG æquale est quadratis AB, BG, quod angulus ABG [a] similiter rectus sit. Igitur excedit quadratum AF quadratum AG, quadrato FG: quare quadratum AF æquatur quadratis AG, GF. unde normaliter insistit [b] recta AG, ipsi GF in puncto G. quod est in perimetro circuli habentis diametrum BD. [a def. 1. undecimi.] [b 48. primi.]

Secundò basis trianguli EF contingat circulum BGD in puncto D; ducaturque AD, ad punctum contactus, quod idem est cum centro basis coni BHC; iunganturque AE, AF: quoniam [c] anguli BDE, BDF recti sunt, & ED latus lateri DF, ac BD sibi ipsi æquale est, etiam bases BE, BF æquales erunt. ergo quadrata BE, BA, quadratis BF, BA æqualia sunt. Atqui quadratum FA æquatur quadratis BF, BA, & quadratum EA quadratis BE, BA, quod recta AB plano basis coni sit recta, adeoque anguli [d] ABF, ABE recti: quadrata igitur FA, EA, ac proinde etiam rectæ FA, EA æquantur. Quare cùm in Isoscele FAE, basim bisecet AD, erit hæc [e] perpendicularis ad basim. Itaque in hoc etiam casu perpendicularis AD est ad circulum BGD. [c 18. tertij.] [d def. 3. undecimi.] [e ex elementis.]

Tertiò si triangulum per axem, transeat per AB normalem à vertice ad basim coni ductam, ac proinde eius basis eadem sit cum BDC: tum perpendicularis à vertice ad basim trianguli, eadem quoque erit cum perpendiculari AB quę ducitur à vertice ad basim coni. Quare etiam hoc casu tertio perpendicularis ad basim trianguli ad circuli peripheriam existet; in cono igitur scaleno, &c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO V.

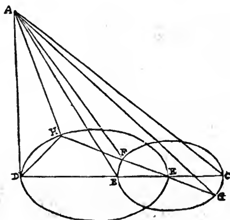
Conus scalenus à cuius vertice perpendicularis cadit intra conum, si secetur per axem exhibens triangulum, ad cuius basim normalis ducatur à vertice procedens:

Dico illam perimetro circuli occursuram cuius diameter æqualis erit lineæ inter perpendicularem à vertice coni & centrum baseos eiusdem coni interceptæ.

Demonstratio.

Esto conus ABC, à cuius vertice perpendicularis AD demissa cadat intra conum; occurrens basi in D: à quo ducta sit DE recta ad centrum baseos, super qua ut diametro circulus DHE describatur: dein per axem fiat quęcunque sectio exhibēs triangulū AFG: cuius basis FG primò secet circulū in E & H, tū ex vertice A demittatur AH ad rectam FG. Dico illam in perimetrum circuli DHE incidere. ducatur enim ad punctum H, in quo GE circulo occurrit recta DH; iunganturque

DG: erit igitur quadratum AG æquale quadratis AD, DG, hoc est quadratis AD, DH, HG: quadratum autem AH æquale est quadratis AD, DH: igitur excedit AG quadratum, quadratum AH, quadrato HG: igitur quadratum AG, quadratis AH, HG est æquale, adeoque recta AH normalis ad lineam FG. vnde patet normales omnes à vertice A hoc in casu ad bases triangulorum per axem demissas in circulum DHE cadere.



Casus secundi & tertij quando basis trianguli aut contingit circulum DHE, aut incidit in BEC, eadem est demonstratio, quæ pro iisdem casibus superiori propositione allata est; conuincitur scalenus, &c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

SI in cono scaleno perpendicularis à vertice ad basim ducta extra basim cadat, productum sit autem sectione per axem facta quodcunque triangulum:

Dico normalem à vertice ad basim trianguli ductam, esse ad peripheriam circuli, cuius diameter est recta inter centrum basis coni & perpendicularem à vertice ad basim coni interiecta.

Demonstratio.

EXtra basim coni scaleni ABC perpendicularis à vertice cadat recta AD. actaque per centrum baseos E, recta DE circa quam circulus describatur DHE, ponatur quodcunque triangulum per axem FAG: & protracta GF vsque ad peripheriam circuli DHE (ponimus enim primò basim EF secare circulum DHE) demittatur deinde recta AH ex puncto verticis A, ad punctum quo secatur circulus DHE à linea GF. Dico illam fore normalem, ad rectam GF productam. ducantur enim DG, DH: erit igitur quadratum AG æquale duobus quadratis AD, DG: (quoniam AD normalis est ad planũ baseos productum, adeoq; etiam ad DG) hoc

hoc eſt tribus quadratis A D, D H, H G, cùm D H E ſit in ſemicirculo angulus rectus; ſed quadratum H A æquatur quadratis A D, D H, quòd angulus A D H iterum [a] rectus ſit; igitur quadratum A G excedit quadratum A H quadrato H G. vnde A G quadratum, duobus quadratis A H, H G æquale exiſtit: quare angulus rectus eſt A H G. eſtque punctum H in perimetro circuli D H E ex conſtructione; manifeſtum igitur eſt in primo caſu omnem normalem à vertice ſcaleni ad trianguli per axem baſim in circuli D H E perimetrum incidere.

[a] 2 def. vndecimi.

Secundi caſus tertijque quando baſis trianguli aut contingit circulum D H E, aut incidit in rectam D E C, demonſtratio conuenit cum ea, quam propoſ. 4. pro ijſdem caſibus attulimus.

Si igitur in cono ſcaleno, &c. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium primum.

HInc patet in omni caſu quo è vertice coni ſcaleni ad baſim eiuſdem protractam, demittitur perpendicularis, extra baſim coni, in triplici differentia producenda triangula per axem conicum linearum quæ à vertice ad baſes triangulorum normaliter ducuntur, quædam occurrant punctis circuli D H E, quæ extra conum ſunt, nonnullæ punctis intra eum cõſtitutis, duæ autem numero ipſi perimetro baſeos, videlicet I & K, quod patet ex partibus circuli D H E: quarum nonnullæ extra baſim exiſtunt, quædam verò intus, puncta verò I & K, cùm ſint interſectionum neceſſariò in vtroque circulorum conſiſtunt.

Corollarium ſecundum.

PErpendicularis incidens in perimetri D H E, punctum E, quod idem eſt cum centro baſis coni, eſt omnium maxima. ſit enim alia quæuis A H, quæ ipſa etiam incidet in perimetrum D H E, & iunge D H: quadratum E A æquatur quadratis E D, D A; quia autem E D diameter circuli quauis alià rectâ ductâ intra circulum, ac proinde & rectâ D H maior eſt, erunt quadrata E D, D A maiora quadratis H D, D A, hoc eſt quadrato H A. Quare quadratum E A maius quoque eſt quadrato H A, & recta E A maior quàm H A. Quod autem E A maior etiam ſit quàm A D, manifeſtum eſt, cùm in triangulo E A D, opponatur E A recto, A D acuto, E A maiorem eſſe quauis alia v.g. H A; ſic quoque & breuius oſtendemus: quoniam H A ex hypotheſi normalis eſt ad baſim G F trianguli F A G, angulus A H E rectus eſt, adeoque alter A E H acutus. Quare E A oppoſita angulo recto maior eſt quàm H A quæ acuto opponitur.

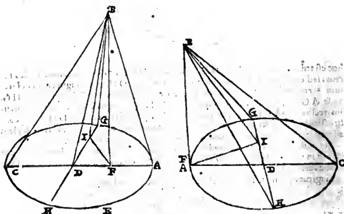
Perpendicularis verò quæ incidit in punctum D, ac proinde eadem est cum recta AD quæ à vertice ad basim coni normalis ducitur, omnium perpendicularium est minima. Ducatur enim quæuis alia perpendicularis AH, (nam quod AD minor sit quàm EA, iam ostensum est) erit hæc etiam ad peripheriam DHE: iungatur DH: in triangulo ADH, AD opponitur angulo acuto AHD; AH verò angulo recto ADH. ergo minor est AD quàm AH.

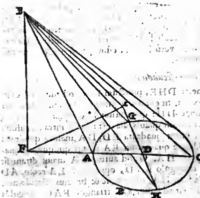
Hoc corollarium verum quoque esse in casibus duarum præcedentium theorematum, eadem planè demonstratione probabitur.

PROPOSITIO VII.

IN cono scaleno dato exhibere minimum triangulorum sectione per axem factâ.

Constructio & demonstratio.





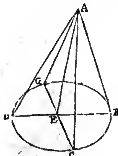
COnus scalenus ABC, datus sit, cuius vertex B: centrum baseos D: axis verò BD. demittatur ad basim coni perpendicularis BF, & iungantur FD, quæ continuetur vsque ad perimetrum baseos vtrimque in A & C, factâ igitur sectione coni per apicem B, & lineam AC, producetur triangulum per axem ABC. Dico hoc esse minimum eorum quæ ex cono ABC possunt educi per axem sectione factâ. Demonstratio est manifesta ex corollario 2. propos. præced. fiat enim quæuis alia sectio per axem, scilicet BGH: & è vertice B demittatur normaliter BI ad diametrum GH, iunga-

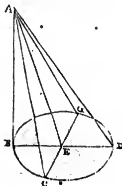
iungaturque recta FI. Cùm BF recta sit plano AHC, angulus BFI rectus erit: quare angulus BIF acutus est. maior ergo est BI quàm BF. itaque cùm triangula GBH, ABC æquales habeant bases GH, AC, erit ABC triangulum minorem habens altitudinem BF, minus triangulo GBH, maiorem habente altitudinem BI. Similiter ostendemus triangulum ABC quouis alio minus esse. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

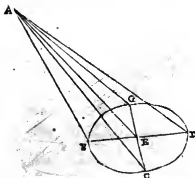
PROPOSITIO VIII.

IN cono scaleno assignare maximum triangulorum quod sectione quæ per axem facta educi potest.

Constructio & demonstratio.







SIt conus scalenus ABCD, per præcedentem verò propositionem inueniatur triangulum minimum eorum quæ per axem fiunt, nimirum ABD: deinde per centrum E collocetur CEG diameter normaliter ad rectam BD, secundum quam & verticem A plano ducto statuatur triangulum ACG. Dico hoc omnium esse maximum. ex casu enim secundo propositionis quartæ patet AE normalem esse ad basim CG: & ex corollario secundo propositionis sextæ patet perpendicularem AE, ad basim trianguli CAG, esse maximam omnium perpendicularium, quæ ad bases reliquorum per axem triangulorum ducuntur. Quare cùm omnium per axem triangulorum, bases sint diametri basis coni, ac proinde æquales, triangulum CAG maximam habens perpendicularem, hoc est altitudinem, omnium est maximum; in cono igitur scaleno exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

Corollarium primum.

Hinc & ex corollario secundo sextæ huius patet triangulum maximum sectione per axem ad triangulum minimum, factum eadem sectione, esse in proportione, axis ad centrum basis ducti, ad perpendicularem AF, in fig. propositionis septimæ; cum illæ vtriusque trianguli æquali basi insistentis perpendiculares sint.

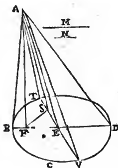
Corollarium secundum.

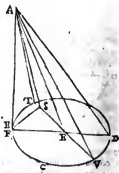
Patet deinde in cono scaleno triangulum maximum factâ sectione per axem natum, Isoscelium esse, cùm AE perpendicularis ostensæ sit secare lineam CG in partes æquales.

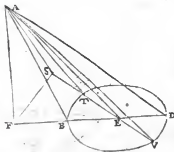
PROPOSITIO IX.

Propositum sit in cono scaleno triangulum per axem exhibere quod cum minimo triangulorum per eundem facto datam obtineat rationem: quæ tamen maior non existat illâ quæ est inter triangulorum maximum & minimum sectione per axem factâ productorum.

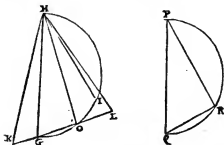
Constructio & demonstratio.







Datus sit conus scalenus, basim habens BCD, in quam normalis cadat AF: axis sit AE, centrum basis E. Ratio autem data sit M ad N. Et quoniam illa ponitur non maior ratione maximi per axem trianguli ad minimum, neque maior erit ratione ipsius AE ad AF, vt colligitur ex coroll, præced: Ducto iam per A, F, E, puncta plano producatur triangulum ABD quod per 7. huius erit minimũ per axem triangulorum; assumptâ deinde rectâ GH, quę sit æqualis EA, describatur semicirculus GIH, cuius diameter GH, & rectæ AF æqualem HI inscribe semicirculo: denique vt N ad M, ita fiat HI ad HO, quæ ex puncto H aptari poterit in semicirculo inter puncta I, G, cùm ratio data M ad N, non sit maior ratione AE ad AF, hoc est, ob linearum ex constr, æqualitatem, HG ad HI. Deinde iuncta OG, quæ cum HO angulum rectum constituet, vtpote in semicirculo, fiant GL, GK æquales semidiametro EB, iungaturque HL, HK. Quoniam igitur bases BD, LK, æquales



les sunt, triangulum L H K erit ad triangulum B A D, vt perpendicularis H O ad perpendicularem A F, hoc est vt H O ad H I, hoc est vt M ad N restat igitur vt situm huius trianguli in cono A B C D assignemus, assumptâ lineâ P Q quæ sit æqualis H O, describatur interuallo P Q semicirculus P R Q. deinde aptetur in semicirculo P R æqualis H I, hoc est A F. & iungatur R Q: tandem super base F E fiat triangulum ex lineis O G, R Q. nimirum F S E, vt E S ipsi O G, & F S æqualis sit Q R. tum per E & S agatur diameter T V, ponanturque A T, A V, & A S. Dico triangulum A T V, esse æquale triangulo L H K & simile. Quoniam A F ducta est normalis ad basim coni, erit [a] angulus A F S rectus, & quadratum A S æquale quadratis A F, F S, hoc est (quia ex constructione A F est P R, & F S est R Q) quadratis P R, R Q. Atqui etiam quadratum P Q æquatur iisdem quadratis P R, R Q: igitur quadratum A S æquale est quadrato P Q, adeoque & recta A S æqualis est rectæ P Q. hoc est rectæ H O. Iam verò A S normalem esse basi T V, vt H O est basi L K, sic ostendo. Quadratum H G æquatur quadratis H O, G O: quare cùm ex constructione A E ipsi H G, & S E ipsi O G, & ex demonstrat. A S ipsi H O sit æqualis, æquabitur etiam quadratum A E quadratis A S, S E: ac proinde angulus A S E rectus est, & A S perpendicularis basi. Quare cùm in triangulis L H K, T A V & bases L K, T V ex constructione, & perpendiculares siue altitudines H O, A S, æquales sint, ipsa quoque triangula erunt æqualia. Insuper cùm O G ipsi S E, & G K ipsi E V æquales sint, erit O K æqualis S V, sed & H O ostensa est æqualis A S, anguliquc H O G, A S V recti sunt & æquales. Ergo H K æqualis est A V. similiter ostendam H L, æquari A T. Itaque similia etiam sunt triangula L H K, T A V. Quare assignauimus in cono scaleno triangulum per axem A T V quod ad triangulum A B D, habet datam rationem M ad N. Quod erat faciendum.

[a] def. 3. vndecimi.

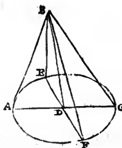
PROPOSITIO X.

SI coni scaleni triangulum per axem, ad verticem angulum rectum contineat:

Dico omnia per axem facta angulum rectum continere.

Demon-

Demonstratio.



a 5. huius.

b 48. primi.

SCalenus conus secetur per axem sectione A B C, quod triangulum producat habens angulum ad verticem B rectum: secetur autem quouis alio per axem plano exhibente triangulum B F E. Dico angulum F B E, rectum esse. Quoniam angulus A B C est rectus, quadratum A C æquale est quadratis A B, B C; sed supra a ostensum est quadrata A B, B C æquari quadratis F B, E B. Ergo quadratum A C æquatur quadratis F B, E B. est autem F E æqualis rectæ A C, ergo & F E quadratum iisdem quadratis F B, B E æquale erit. quare b angulus F B E rectus. Itaque si coni scaleni, &c. Quod fuit demonstrandum.

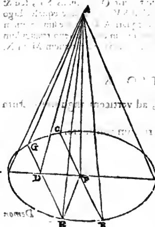
Scholion.

PRæter triangula quæ eruuntur ex cono sectione per axem facta, alia quoque assignantur quæ per verticem quidem transeunt, minimè verò per axem; quæ cùm sine numero sint, hinc determinationẽ exigunt vt solutiones problematum quæ circa ea versantur, rectè expediantur.

PROPOSITIO XI.

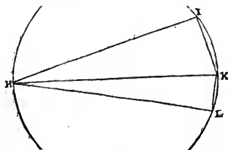
IN cono recto acutangulo & rectangulo impossibile est triangulo per axem facto, æquale triangulum exhibere non per axem. siue triangulũ, per axem maius est quolibet non per axem.

Demonstratio.



c def. 3. vndecimi.

NAm si fieri potest, ponatur triangulum aliquod A E G non transiens per axem A F, æquale triangulo per axem ducto B A C, quod ita in cono ductum concidẽ, vt eius basis B C sit parallela basi E G; quod fieri posse constat, cùm omnia in cono recto per axem triangula sint æqualia. Ducatur ex centro F recta F D bisecans basim E G, iunganturque A D, F E, & super recta H K æquali ipsi A E, constitue bina triangula H I K, H L K, æqualia & similia triangulis A E F, A D E. sic vt latera H I, I K, lateribus A F, F E, & latera H L, L K, lateribus A D, D E æqualia sint, adeoque anguli I & L, angulis A F E, A D E sint æquales. Quoniam igitur axis A F ex hypot. rectus est plano basis, erit c angulus A F E rectus. Angulus quoque A D E rectus est, vt colligitur ex demonstratis in secundo casu quartæ huius. Quare recti etiam sunt anguli I & L, puncta igitur I, L, H, K sunt ad circulum cuius diameter H K. Et quoniam conus datus est rectangulus vel acutangulus, axis A F erit vel



vel æqualis semidiametro F E, vel maior. Quare cùm A I ipsi A F, & I K ipsi F E sint æquales, erit quoque H I aut æqualis I K, aut maior. Ergo vertex I trianguli A I K, vel bisecabit arcum H I K, vel erit alterũ punctum bisectionis versus K. Deinde quia A D, hoc est A L, maior est quã A F hoc est H I, erit arcus H L maior arcu H I, ac proinde vertex L trianguli H L K non solùm cadet vltra punctum quo bisecatur arcus H L K, sed etiam propius adhuc incidet versus K, quàm alterius trianguli vertex I. Minor igitur est altitudo trianguli H L K, quàm trianguli H I K, adeoque minus est A L K hoc est A D E, triangulum, triangulo H I K hoc est A F E. Atqui triangulum A F E æquatur triangulo A F B, cùm omnia vtriusque latera vicissim sint æqualia. Ergo triangulum A D E minus etiam est triangulo A F B: ac proinde triangulum E A G duplum ipsius A D E. (est enim E G ex constructione bisecta in D) minus est triangulo B A C duplo ipsius A F B. similiter demonstrabimus quoduis aliud triangulum quod per axem non sit factum, minus esse triangulo per axem. In cono igitur recto, &c. Quod erat demonstrandum.

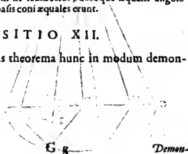
Quod autem in demonstratione fuit assumptũ, (in recto) nempè cono acutangulo axem semidiametro basis esse maiorem, in cono verò recto rectãgulo æqualem, paucis sic demonstrabo.

Sit conus rectus acutangulus sectus triangulo per axem B A C. quoniam in triangulis B F A, C F A, latera B A, C A, B F, F C æqualia sunt, & F A commune, anguli quoque F A B, F A C æqualia sunt, sed totus B A C est minor recto vtpote acutus, angulus igitur F A B ipsius dimidius minor est semirecto. Quare cùm angulus B F A rectus sit, erit reliquus A B F minor semirecto, hoc est maior angulo F A B. ergo axis A F [a] minor est semidiametro F B. [a] 19. primi.

Quod si conus fuerit rectus rectangulus, tunc angulus B A C erit rectus, ac proinde B A F, dimidius totius B A C, semirectus est. Quare cùm angulus B F A rectus sit, necesse est, vt reliquus F B A etiam sit semirectus, adeoque æqualis angulo B A F. vnde axis A F & semidiameter basis coni æquales erunt.

PROPOSITIO XII.

Aliter & expeditius præcedens theorema hunc in modum demonstrabitur.



G g Demon-

Demonstratio.

IN cono rectangulo vel acutangulo sit triangulum per axem BFG & quoduis aliud extra axem IBH, diameter autem basis coni sit AEC. ex punctis G ac H ducantur GL, HK normales ad BF, FI. Quandoquidem conus sit rectangulus vel acutangulus, erit axis BG, vt ostendi suprà, æqualis semidiametro GF, aut maior. Ex quo liquet segmentum BL non esse minus segmento LF, ac proinde punctum L cadere vel inter F & punctum medium rectæ FB, vel ad summum in ipsam medium punctum incidere. Deinde quia angulus BGF, BHI, recti sunt, vt patet ex dictis prop. 11. & ab ijs normales dimissæ GL, HK, erunt a rectangula LFB, KIB æqualia quadratis FG, HI. Atqui quadratum GF maius est quadrato HI, rectangulum igitur LFB maius est rectangulo KIB. ergo cùm BI, BF æquales sint, IK minor est quàm FL. quoniam igitur, vt antè ostendi, punctum L cadit inter F & punctum medium rectæ BF, punctum K etiam cader inter I & punctum medium rectæ BI, id est BF, & quidem propius versus I, quàm L, versus F. liquet igitur b rectangulum BKI minus esse rectangulo BLF. Atqui quadrara LG, KH, æquantur rectangulis BLF, BKI, ergo quadratum KH minus est quadrato LG, ergo normalis KH minor normali LG. Quare cùm bases BI, BF æquales sint, triangulum IBH minus est triangulo BFG. similiter ostendam quoduis aliud extra axem triangulum minus esse triangulo per axem FBG, illud igitur maximum est. Quod fuerat demonstrandum.

a 8. sexti.

b 5. secundi.

PROPOSITIO XIII.

DAtus sit conus rectus axem habens BD, & ratio maioris inæqualitatis K ad L.

Oporteat triangulum exhibere extra axem ad quod BED triangulum per axem datam habeat rationem K ad L.

Constructio & demonstratio.

EX puncto D ad BE normalem ducito DI, fiatque vt K ad L, sic DI ad M. Tum quadrato M æquale fac rectangulum BNE, & quoniam quadratum M minus est quadrato DI, hoc est (quia ex angulo recto BDE ad basim ducta est normalis DI) rectangulo BIE, erit quoque BNE rectangulum minus rectangulo BIE. erigatur deinde ex puncto N normalis NO par rectæ M, iunganrutq; BO, EO.

Quo-

Quoniam igitur quadratū NO æquatur quadrato M, hoc est rectangulo BNE, erunt BN, NO, NE tres continuæ. Angulus igitur BOE rectus est. Quare cùm triangula BOE, BDE super eadem basi BE vtraque sint rectangula, & vnius nempè BOE altitudo NO minor sit altitudine alterius DI, patet alterutrum E lateribus BO, OE maius esse alterius trianguli latere BD, quod idem est cum axe coni. sit latus BO maius axe BD: eritq; hoc nihilominus minus latere coni BE, siue BC. Quoniam igitur latus BO maius est axe BD, & minus latere BC: intra conum aptari poterit ex puncto B ad diametrum AC, recta AG æqualis lateri BO. factum sit, & ex G ad BG normalem duc GF & iunge BF. Quandoquidem anguli BOE, BGF recti sunt, quadrata BE, BF quadratis BO, OE; BG, GF æqualia sunt; sed quadrata BE, BF æquantur, æquantur igitur quadrata BO, OE, quadratis BG, GF. Cùm igitur quadrata BO, BG ob rectarum ex constructione æqualitatem, sint æqualia, reliqua etiam OE, GF æqualia erunt. æquantur igitur rectæ OE, GF; in triangulis ergo BOE, BGF singula singulis latera sunt æqualia. Ergo ipsa quoque triangula sunt æqualia. Atqui triangulum per axem BED ad triangulum BOE eandem habet rationem quam normalis DI ad normalem NO, hoc est quam DI ad M, hoc est quam K ad L: ergo triangulum per axem BED ad triangulum quoque BGF rationem eandem habet quam K ad L. Exhibuimus ergo triangulo per axem, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIV.

IN cono recto triangula non per axem ducta, quorum bases in eodem puncto se intersecant, habent perpendiculares ad bases è vertice ductas, in peripheria circuli cuius diameter est recta inter centrum basis conicæ & punctum intersectionis interiecta.

Demonstratio.

IN cono recto ABC intersecent sese mutuo in E puncto quæuis bases FEG, IEK triangulorum non per axem FBG, IBK, & circa DE, inter centrum D & E punctum interiectum describe circulum DHLE: dico perpendiculares à vertice B ductas ad FEG, IEK, incidere in peripheriam DLE. iungantur enim BL, BH, DL, DH. erit angulus DLE in semicirculo rectus; vnde, rectæ IL & LK æquales erunt; est autem recta BI æqualis BK: igitur etiam BL normalis est ad rectam IK. similiter ostendemus L normalē esse BH ad FG. ergo omnia triangula per E punctum & verticem ducta normales suas inuenient in perimetro circelli DLE. quod oportuit demonstrare.

Scholion.

Cum intersectionis punctum E *aut intra basim dari possit, aut in perimetro basis, aut extra basim, fit vt hic triplex casus oriatur. primus, quo circellus* DEH *totus basi comprehenditur. secundus. quo idem occurrit puncto perimetri* AIC *eundem contingendo: in quo casu quarta est pars circuli, qui fungitur basis vice coni* ABC*: tertius verò quo extra basim diffusus circulum baseos secat in duobus punctis, sed quia triplex hic casus diuersitatem nec in ipsa constructione, nec in demonstratione inducit, hinc silentio tam in propositione quàm demonstratione suppressus est.*

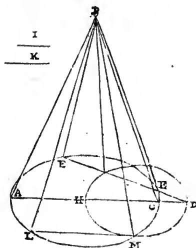
PROPOSITIO XV.

IN cono recto exhibere triangulum quod per apicem coni & punctum datum siue intra, siue extra coni basim transeat, habeat verò ad triangulum per axem datam rationem.

Constructio & demonstratio.

COnus esto ABC rectus, & per eius axem facto triangulo ABC detur punctum quoddam D. oporteat verò per punctum D, & verticem coni constituere triangulum EBF quod ad triangulum per axem ABC rationem habeat I ad K datam. Inueniatur per duodecimam triangulum LBM. quod habeat ad triangulum ABC rationem I ad K. Deinde ex D puncto ducatur DFE, sic vt FE sit æqualis ipsi LM. per ea quæ de circulorum [b] proprietatibus conscripsi: & secundùm EF & B, agatur planum, hoc ipsum exhibebit triangulum postulatum BEF. erit

b 44. de circulis.



erit enim EBF æquale triangulo BLM, cùm basis LM æqualis sit EF ex constructione, & lineæ EB, FB non solùm sint æquales inter se, sed etiam sint æquales rectis LB, BM. Igitur perfecimus quod imperatum fuit.

Scholion.

HActenus conati vtcunque sumus sectiones coni explicare quæ per apicem transeunt siue in recto, siue in scaleno cono: quia verò apud antiquiores, maximè Archimodem, aliâ nomenclaturâ insignitas reperies reliquas coni sectiones, quarum explanationem sequentibus libris prosequi intendimus; hinc operæ pretium iudicaui præmittere quæ ad rem hanc pertinere videbuntur.

In duplici differentia conos esse posuimus, alios scilicet rectos, alios scalenos: antiqui verò eos in triplici differentia posuerunt. Quosdam dixerunt conos rectangulos, nonnullos acutiangulos, alios denique obtusiangulos, denominatione sumptâ ab angulis quos sectio per axes facta contineret ad verticem coni; vnde illis distinctio conorum rectorum & scalenorum ignota fuisse videtur, cùm scalenus conus, omnis generis angulos admittat ad verticem, variata solummodo, secundùm diuersos situs, sectione per axem. Rectangulum itaque conum dixerunt conum Isoscelum qui nullam admitteret varietatem in triangulis per axem exsurgentibus, omnes alios angulos excludens præter rectum. Conum verò rectangulum priùs dispescebant diuisione per axem, ortique inde trianguli latus alio plano secabant ad angulos rectos quod insuper ipsi triangulo esset orthogonum; quam sectionem appellabant coni rectanguli, recentiores autem parabolam dicunt. Conum verò acutiangulum similiter Isoscelum partiebantur bifariam per axem, ac primò quidem sectionem per axem coni instituebant; deinde triangulum ex sectione per axem productum, alio secabant plano, quod tam plano quam lateri trianguli rectum esset; quo fiebat vt alteri quoque crurum occurrens, figuram alterius formæ proferrent, & à parabola longe diuersam, quæ scilicet tota clauderetur intercapedine linearum rectarum trianguli per axem: sectionẽ inde resultantem coni acutianguli dicebant Isoscelem, denique conum obtusiangulum, eadem praxi & per axem diuidebant, deinde plano ad vnum laterum, & ad ipsum triangulum recto per conum acto, figuram formabant quam coni obtusianguli vocabant, quæ in idem recidit cum hyperbola recentiorum. Hæc igitur antiquorum ratio diuidendi conum, à recentioribus maximè verò ab Apollonio, nonnihil est immutata: conus enim qualiscunque sit ex natura sua tale corpus est, ex quo singulæ harum sectionum erui possint; quoduis enim trian-

 gulum

gulum per axem exhibitum trifariam diuidi potest à plano huic ad angulos rectos constituto; aut enim communis intersectio horum planorum, trianguli scilicet per axem, & plani orthogonaliter eidem insistentis æquidistat vni laterum trianguli, & hoc situ parabolam gignit; aut vtrique occurrit intra trianguli latera producta, qua ratione emergit Ellipsis; aut vni laterum occurrit extra triangulum producto, atque ita hyperbolam exhibet. has omnes sectiones easdem esse cum illis quas antiqui eruebãt, horum librorum decursu intelliges: non ita tamen vt quacunque sectio à recentioribus facta exhiberi nata sit in coni alicuius sectione ab antiquis facta; nam antiqui vnam solam Ellipseos speciem proferre poterant vnamq́ speciem Hyperbolæ in dato cono, ita vt si diuersam requirerent Ellipsim aut hyperbolam, ad conum confugere deberent magis minúsve acutum aut obtusum. Infinita autem varietates oriuntur in quouis cono secto iuxta methodum recentiorum, prout cognoscere poteris benigne Lector si sequentia prosequaris.

Insuper Recentiorum ratio secandi conum, perhibet circulum sectione non facta ad basim coni æquidistante; quem circulum antiqui eruere nequibant, quia hunc circulum exhibere non valet conus rectus siue Isoscelius, quem antiqui solùm considerauere, sed solummodò ex cono scaleno eruitur, vti sequentia docebunt.

Priusquam huic discursui finem imponam, verbulo insinuandum mihi est cur axem coni determinent lineam à vertice coni ad circuli centrum demissam potiùs quàm ad cẽtrum Ellipseos, cùm Ellipsis non minùs centrum obtineat quàm circulus, & secundum Ellipseos perimetrum à puncto in sublimi posito si circumagatur recta linea eandem prorsus conicam superficiem describet quam si ab eodem puncto circa circuli eiusdem coni productis lineam circumduxeris. In promptu responsum est, neque enim filia matrem præcedit, gignitur quippe è cono Ellipsis. Insuper circuli proprietates cùm ex elementis supponantur omnibus nota, inseruiunt rectè & commode demonstrationibus propositionum quæ ex cono eruuntur: Ellipseos autem cùm accidentia ignota sint, frustra ea adhiberetur ad theorematum aut problematum veritates manifestandas. potissima verò ratio mihi videtur, quod Ellipses in cono assignari queant sine numero inter se diuersæ ac proinde pro singulis deberet mutari axis coni: non enim ijdem esse possunt axes è vertice coni ad circuli centrum, cum axibus ab eodem vertice ad centra Ellipseon, varietas ergo hæc inimica doctrinæ ellipsin meritò excludit ne baseos munere fungeretur in cono, perfectior tamen videtur cono scaleno Rectus qui præter vnum axem alterum non admittit, vti conus scalenus, ex quo capite imperfectionem includit.

PROPOSITIO XVI.

IN cono quocunque omnis sectio basi parallela circulus est.

Demonstratio.

DEtur conus ABC cuius basis BGC, & sectio EF æquidistans plano baseos dico DEF esse circulum. ducantur enim AH per centrum & AL quæuis altera in plano trianguli per axem ABC. occurrentes rectæ DF in punctis M, N & HG, LI normaliter erigantur ad BC diametrum, & iunctis AG, AI occurrentibus sectioni DEF in E & K, iungantur ME, NK: quoniam plana æquidistantia sunt DEF, BGC, erunt a quoq; ME, HG, & NK, LI & MN, HL æquidistantes; est igitur

a 16. vndecimi.

igitur M E, ad H G, vt A M ad A H, hoc est vt A N ad A L, hoc est vt M K ad L I. Itaque permutando M E est ad N K vt H G ad L I, adeoque & quadratum M E ad quadratum N K vt quadratum H G ad quadratum L I. sed quadrato H G æquale est B H C rectangulum, & L I similiter quadratum æquale rectangulo B L C. Igitur M E quadratum est ad N K quadratum vt B H C rectangulum, ad rectangulum B L C, est autem vt B H C rectangulum ad B L C rectangulum, ita rectangulum D M F ad D N F rectangulum, cùm ex iisdem rationibus composita sint; igitur quadratum M E est ad N K quadratum, vt rectangulum D M F ad D N F, rectangulũ. Iam verò D M est ad B H, vt A M ad A H, hoc est vt M E ad H G. ergo permutando D M est ad M E, vt B H ad H G. sed B H, H G sunt æquales, ergo & D M, M E æquales sunt. Igitur quadratum D M, hoc est rectangulum D M F (nam cùm B C sit bisecta in H, erit & D F in M) æquatur quadrato M E. Quare cùm quadratum M E, vt suprà ostendimus, sit ad quadratum N K, vt rectangulum D M F, ad rectangulum D N F, etiam rectangulum D N F, æquabitur quadrato N K. Denique cùm D F, B C sint parallelæ itemque G H, E M, & vnà G H sit normalis ad vnam B C, erit altera E M normalis ad alteram D F; similiter ostendam K N normalem esse ad D F. Itaque cum normalium E M, K N quadrata æqualia sint rectangulis D M F, D N F, sectio D E, E F circulus est. Quod fuit demonstrandum.

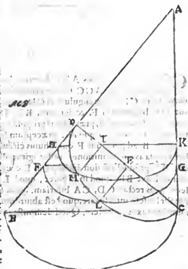
Corollarium.

Ex discursu demonstrationis liquet centrum circuli D E F esse in axis puncto M, in quo nimirum axis occurrit rectæ D F, quæ est communis sectio trianguli per axem & circuli D E F.

PROPOSITIO XVII.

In cono scaleno circulum exhibere qui basi æquidistans non sit.

Constructio & demonstratio.



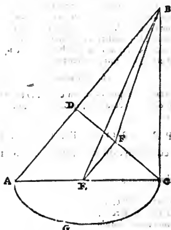
Scalenus conus ponatur A B C sectus plano per axem proferente triangulum A B C minimum illorum quæ per axem fieri possunt erit illud scalenũ, cùm omne scalenum sit quod per axem fit præter maximum per cor. 2. octauæ; angulus igitur A B C minor ponatur angulo A C B: quare fiat angulo A B C æqualis A C D & per rectã D C duc planum rectum ad triangulũ A B C: Dico sectionem inde natam D L C esse circulum. Ducantur enim duo alia plana basi parallela F L G, H M K, quorum communes sectiones cum plano D L C sint rectæ E L, I M. ex 7. huius patet basim coni ad minimũ triangulum A B C rectum esse. ergo & alia plana parallela F L G, H M K triangulo A B C recta erunt: sed & planum D L C triangulo rectum est. ergo communes sectiones L E, M I, rectæ sunt triangulo, adeoque & lineæ D C. Quoniam autem F L G, H M K, circuli sunt per præcedentem, & E L, I M normales D C, erit tam rectangulum F E G æquale quadrato E L, quàm rectangulum H I K, quadrato I M, quia verò similia sunt triangula D I H, & I K C, cum angulus A C D, sit ex constructione æqualis A B C hoc est D H I: erunt puncta H D K C in eodem circulo: similiter ostendam

ostendam puncta quoque F D, G C esse ad circulum: quare rectangula D I C, H I K æqualia sunt, vti & rectangula F E G, & D E C: ac proinde æqualia etiam quadratis I M & E L perpendicularium ad D C. Igitur puncta D M L C, circulus est cuius recta D C est diametros igitur, &c.

PROPOSITIO XVIII.

Ostendendum modò est in quouis cono scaleno duos axes esse.

Demonstratio.



Conus itaque scalenus A B C secetur plano per axem B E, quæ ex vertice B ad centrum circuli A G C baseos protenditur; triangulum productum A B C secetur recta C D, quæ angulum B C D æqualem exhibeat angulo B A C: & diuidatur D C bifariam in F, & iungatur B F. Dico illam esse axem secundum huius coni: quod ita patebit, præcedenti propositione ostensum est sectionem factam per rectam D C, eo modo quo illic præceptum fuit, circulum producere: igitur recta ex apice B ad punctum F quod huius circuli est demissa axis nomen obtinere debet ex ipsa axeos definitione; restat igitur ostendere B F E rectam non esse lineam siue B F productam non incidere in E centrum basis, ac proinde B F axem esse alium ab axe B E. quod inde patet, quod E F recta sit æquidistans lineæ A B, cùm secet duas rectas C D, C A bifariam. Igitur si recta est linea E F B, sequetur duas parallelas sese intersecare, quod est absurdum. Constat igitur omnem conum scalenum duos axes admittere. Quod demonstrandum fuit.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER QVARTVS DE

ELLIPSI.

ARGVMENTVM.



Llipsis proprietates illiusque naturam methodicè propositurì, rem totam in sex partes diuidere placuit. Ac prima quidem è cono sectionem educit, affectionésque illius essentiales, dein accidentales reliquis necessarias & fundamentales.

Secunda ellipsim diuidit illiusque sectores & segmenta comparat.

Tertia, axium ac diametrorum coniugatarum tam æqualium quàm inæqualium ampliorem continet considerationem. Ac illarum primò quidem contemplatur potentiam: deinde lineas, quæ extrema diametrorum coniungunt.

Quarta sectionis polos eorumque passiones ac lineam breuissimam à puncto in axe dato ad peripheriam designat.

Quinta varias ellipsis geneses quæ tum ex lineis, tum è circulo, tum ex ipsa ellipsi oriuntur continet.

Sexta ellipsim cum circulo comparat, in qua hic etiam ordo tenetur, vt primò linearum proportiones ac potentiæ, secundò segmenta & ipsæ sectiones, dein figuræ vtriq; inscriptæ inter se conferantur.

Cæterùm propositiones nonnullæ huius libri ac sequentium duorum sunt Apollonij, sed viâ longè aliâ à me demonstratæ, paucis exceptis, quas nihilominus cæteris apponere visum fuit, ne quid hoc in opere quod ad conicam doctrinam pertineat, studiosus Geometriæ lector desideraret. Cætera omnia, quæ longè maximam atque præcipuam operis partem constituunt, à nobis & inuenta sunt & demonstrata. Quare si quis in recentium quorundam Geometrarum libris theoremata quædam reperiat quæ cum nostris conueniant, is velim intelligat, ea ab annis iam plurimis ac multò ante fuisse à me reperta, quàm authorum illorum libri in lucem prodierint. Quæ paucis lectorem meum docere volui, non vt cuiusquam inuentis detraham, sed vt plagij suspicionem à me remoueam.

DEFINITIONES.

I.

Diameter ellipseos est, recta linea intra ellipsim ducta, quæ omnes lineas, rectæ cuidam æquidistantes bifariam diuidit. & si quidem ad rectos illas secet angulos, axis dicetur: in quauis autem ellipsi binos esse axes, & quidem coniugatos (qui extremæ dicuntur diametri) hoc est qui mutuas parallelas bisecent ad angulos rectos, suo loco patebit.

I I.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur vnaquæque linearum æquidistantium, ac bifariam diuisarum.

I I I.

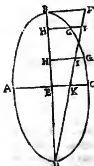
Centrum ellipseos est punctum quod diametrum bifariam diuidit. Quod autem lineæ in ellipsi per centrum ductæ bifariam secentur, propos. septimâ huius libri demonstrabimus.

I V.

Diametri coniugatæ dicuntur quæ mutuas parallelas bifariam secant.

V.

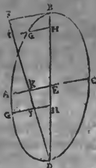
Latus rectum voco lineam, iuxta quam possunt ordinatim ad diametrum applicatæ. siue, latus rectum est mensura iuxta quam comparantur potentiæ linearum ordinatim ad diametrum positarum.



Res in exemplo erit clarior: sit A B C ellipseos diameter B D, illiusque latus rectum repræsentet F B: iunctisque F D, sumantur in diametro puncta quæuis H, ponanturque H G normales diametro B D, occurrentes F D in I: singula igitur quadrata ordinatim positarum æqualia erunt singulis rectangulis B H I, (vt propositione vndecimâ huius demonstrabimus) quæ deficiant à rectangulis F B H, rectangulo simili, ipsi F B D.

Atque

Atque ita quidem latus rectum tum Apollonius, tum cæteri illum hactenus secuti exposuere. Verùm mihi minimè videtur necessarium vt latus rectum diametro ad rectos applicetur angulos: & quadratorum ac rectangulorum loco possunt Rhombi ac Rhomboides inter se comparari. itaque ad veterem lateris recti acceptionem, nouam aliam adiicio eiusmodi. ad ellipseos diametrum sint ordinatim positæ quotuis rectæ GH: & quædam BF latus rectum, æquidistans ponatur ordinatim applicatis: singuli ordinatim positarum Rhombi HG in angulis IHB æquales erunt singulis IHB Rhomboidibus in iisdem angulis, qui deficiunt à Rhomboidibus FBH per Rhomboides similes Rhomboidi FBD, Demonstrationem huius vide propos. 12. huius libri.



Porro latus rectū eo ab antiquis consilio inuentum est, vt certi aliquid & noti haberent, per quod reliquas sectionum proprietates intelligere ac notas sibi reddere faciliùs possent: & vt in singulis coni sectionibus illæ planè diuersæ sunt, ita & latera recta diuersas in singulis obtinent passiones: & rectangula lateribus rectis ac diametrorum partibus inter verticem earundem & puncta quibus ab ordinatim positis secantur interceptis contenta longè diuersam in singulis, ad quadrata ordinatim positarum habent proportionem; in ellipsi quidem quadrata illa deficiunt figura simili illi quæ latere recto & transuersò continetur à rectangulis prædictis; in parabola iisdem æquantur: in hyperbola verò excedunt figura simili illi, &c. Vnde & nomenclaturam singulæ suam sortitæ sunt.

Cæterùm vti potentiæ ordinatim positarum ad diuersas diametros, diuersæ quoque sunt, ita & diametris singulis, proprium & vnicum latus rectum assignatur: quæ omnia, vti & lateris recti inuentionem, suis locis demonstrata inuenies.

VI.

Figura est rectangulum quod latere recto & transuerso (id est diametro, nam illa quoque transuersa vocari solet) continetur.

VII.

Poli seu foci ellipseos, puncta sunt (quæ ex comparatione facta vocat Apollonius) in quibus axis diuisus rectangulum exhibet sub segmentis contentum æquale quartæ parti figuræ: de quo suo loco agendum.

VIII.

Sectio subcontraria est quando conus plano per axem sectus triangulum producente, alio rursum secatur plano, quod abscindat (triangulo producto) triangulum simile quidem, sed ita positum vt anguli qui in vtroque triangulo sunt æquales ad diuersa sint latera.

ELLIPSIS

PARS PRIMA

Sectionem è cono educit, primasq́; ac essentiales eiusdem exhibet proprietates.

PROPOSITIO PRIMA.

CONus rectus A G C B sectus sit plano per axem faciente triangulum A B C. Secetur alio deinde plano basi coni A G C non parallelo, cum vtroque trianguli latere conueniente in D & F : ex qua (sectione producta) fit in cono figura D E F N , communis autem sectio illius plani secantis cum triangulo A B C sit D F I; eiusdem verò sectio communis cum plano in quo est coni basis A G C , sit recta I K, quam perpendicularem esse oportet ad A C diametrum basis coni , vel ad recram quæ diamerro A C in directum constituitur.

Dico figuram D E F N circulum non esse.

Demonstratio.

PEr punctum aliquod M rectæ D F ducatur N E parallela ad I K, in plano figuræ D E F N : & per idem illud punctum M ducatur in plano trianguli A B C recta O P parallela ad A C I, per lineas autem N E , O P agatur planum. Erit hoc a parallelum basi A G C, ac proinde b producet circulum O E P N, cuius diameter erit O P.

Quoniam igitur O P est parallela ad A C, triangula B O P , B C A similia sunt. sed B C A isosceles est, ergo & B O P isosceles est. Ergo c rectangulum F M D maius est rectangulo O M P; sed rectangulum O M P d æquale est rectangulo N M E ergo rectangulum F M D maius est rectangulo N M E patet igitur ex 35. tertij figuram D E. F N circulum non esse. Quod erat demonstrandum.

a 15. undecimi.
b 6 prolegom.
c 34. de linea.
d 35. tertij.

PROPOSITIO II.

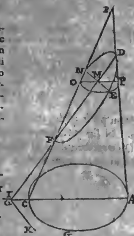
DAtus iam sit conus scalenus A B C, & planum secans quod producit in cono figuram D E F N, neque sit parallelum basi coni A G C, neque subconrariè positum Cætera verò omnia ponantur & fiant eadem quę propositione prima.

Dico rursum figuram D E F N circulum non esse.

Demon-

Demonstratio.

QVoniam OP est parallela ad AC eamque secat FD in M non subcontrariè, hoc est angulum BFD non constituens æqualem angulo BAC, patet ex 36. libri nostri primi rectangulum FMD inæquale esse rectangulo OMP. sed rectangulum OMP æquatur rectangulo NME. ergo rectangulum FMD rectangulo etiam NME inæquale est; liquet igitur ex 35. tertij figuram DEFN non esse circulum. Quod erat demonstrandum.

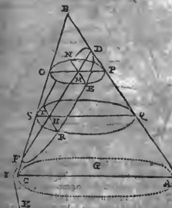


PROPOSITIO III.

DAtus sit conus quicunque siue rectus siue scalenus, & cætera ponantur & fiant eadem quę suprà:

Dico rectam NE à recta DF secari bifariam in M.

Demonstratio.



REcta PM ex hypothesi est parallela ad rectam AC, & ME parallela ad IK. Quare PM, EM angulos comprehendunt æquales; atqui angulus AIK ex hypothesi rectus est, communis enim sectio IK posita fuit perpendicularis ad ACI, propositione prima; ergo etiam PME rectus est. Itaque cum [a] sectio ONPE sit circulus, eiusque diameter OP; manifestum est [b] EMN, à diametro circuli OP, ad quam normalis est, bisecari in M. sed ex hypothesi punctum M tribus rectis OP, NE, DF communis est. ergo NE à DF, bisecatur in M. Quod erat demonstrandum.

[a] 16. probl.
[b] 3. tertij.

 Corol-

Corollarium.

HInc patet, si ducantur quotcunque rectæ ad IK siue NE parallelæ, omnes à DF bifariam diuidi: eadem enim est in omnibus demonstratio. Ex quo vlterius fit manifestum sectionis DEFN, (quam ellipsim deinceps nominabimus) diametrum [a] esse lineam DF, rectam verò NE [b] cæterasque huic parallelas ordinatim esse ad diametrum DF applicatas.

a Defin. 1. b Defin. 2.

PROPOSITIO IV.

IIsdem positis, ducatur in ellipsi DEFN linea quæuis RT, parallela ad EN siue IK, secans diametrum DF in puncto H.

Dico rectangulum DMF esse ad rectangulum DHF vt quadratum EM ad quadratum RH.

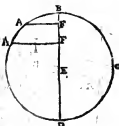
Demonstratio.

PEr punctum H ducatur recta QHS parallela rectæ OP occurrens lateribus trianguli ABC in Q & S. tum per rectas QS, TR agatur planum, erit hoc [c] parallelum basi AGC ac [d] proinde sectionem producet circulum QRS, iam verò ratio rectanguli DMF ad rectangulum DHF componitur ex ratione DM ad DH, (hoc est, quia PM, QH sunt parallelæ ex const. ex ratione PM ad QH) & ex ratione MF ad HF (hoc est, quia MO, HS ex construct. sunt parallelæ, ex ratione MO ad HS.) Atqui ratio rectanguli PMO ad rectangulum QHS componitur etiam ex rationibus PM ad QH, & MO ad HS. ergo rectangulum DMF est ad rectangulum DHF vt rectangulum PMO ad rectangulum QHS; hoc est quoniam sectiones PEO, QRS, circuli sunt, vt rectangulum EMN ad rectangulum RHT, hoc est, quia [e] EN, RT bisectæ sunt à diametro DF in M & H, vt quadratum EM ad quadratum RH. Quod erat demonstrandum.

c 15. vndecimi. d 16. prolegom. + 2. sexti. e 3. huius.

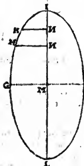
Scholion.

Scholion.



Exhibuimus propositione hac proportionem rectangulorum quæ à segmentis diametri ellipseos constituuntur ad quadrata, ordinatim ad eandem diametrum applicatarum: quæ quidem proprietas ellipseos est primaria, & essentialis: verùm quia hæc ita ellipsi inest, vt etiam in circulo suo modo reperiatur, operæ pretium facturum me existimaui, si differentiam, illum inter & ellipsim, breuiter in schemate apposito ostendam.

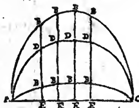
Esto circuli ABC *diameter* BD: *centrum* E: *& normales ad diametrum* AF: *sit autem & ellipsis* HIK *diameter quæcunque* IL, *quam ordinatim secent* HN: *centrum verò sectionis* M. *Quoniam igitur in circulo*, AF, *rectæ sunt normales ad diametrum* BD, *erunt rectangula* BFD *æqualia quadratis* AF, *proindeq;* AF *quadratum est ad quadratum* AF *vt* BFD *rectangulum ad rectangulum* BFD: *eodem modo cum* HN *rectæ in ellipsi ordinatim posita sint ad diametrum* IL, *erit* HN *quadratum ad quadratum* HN, *vt* INL *rectangulum ad rectangulum* INL: *illud igitur vtrique sectioni conuenit; eam esse proportionem inter quadrata ordinatim positarum, quæ rectangulorum est, sub segmentis diametri ad quam ordinatim sunt positæ: in hoc verò differunt, quod in circulo proportio rectangulorum sub segmentis diametri, ad quadrata ordinatim positarum sit æqualitatis; in ellipsi verò (si casum diametrorum coniugatarũ æqualium excipias, de quo plura suo loco) inæqualitatis, quod primâ & secundâ huius planum fecimus.*



Ex quo sequitur primò; in ellipsi axem vnum altero maiorem esse. quod sic ostendo: sit in HIK *ellipsi axis aliquis* IL *quem ordinatim secent* HN, *agatur per* M *centrum recta* GK *æquidistans ipsi* HN: *dico illos axes esse inæquales: est enim vt* INL *rectangulum ad rectangulum* IML, *sic quadratum* HN *ad quadratum* GM, *& permutando vt* INL *rectangulum ad quadratum* HN *sic* IML *rectangulum ad quadratum* GM; *sed rectangulum* INL *quadrato* HN, a *est inæquale, ergo & rectangulum* IML, *(hoc est quadratum* IM*) quadrato* GM *inæquale est: ergo recta* IM *recta* GM *est inæqualis, ergo tota* IL, *nempe axis, toti* GK *hoc est axi alteri, inæqualis est. Quod erat propositum.* a 1. & 2. huius.

Deinde si axes in ellipsi æquales essent, iam non differret ellipsis a circulo: eo quod rectangula sub segmentis axeos, æqualia essent quadratis ordinatim positarum.

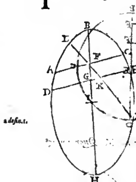
Sequitur secundò, si super axe AC *ellipseos* ABC, *describatur semicirculus* ADC, *ducanturq; ordinatim lineæ* BE *occurrentes semicirculo in* D: *quod* BE *sit ad* BE, *vt* DE *est ad* DE. *est enim tam in ellipsi quàm in semicirculo, vt* AEC *rectangulum ad rectangulum* AEC *sic* BC *quadratum ad quadratum* BE, *&* DE *quadratum ad quadratum* DE. *vnde quoque est vt quadratum* BE *ad quadratum* BE *sic* DE *quadratum ad quadratum* DE.



PRO-

PROPOSITIO V.

IN data ellipsi diametrum inuenire.



Constructio & demonstratio.

INtra ellipsim ducantur parallelæ AC, DE, quas bifariam seca in punctis F, G; & per F ac G, ducatur recta BH.

Dico hanc esse diametrum.

Demonstratio est manifesta, si enim BH non est diameter, sit LFM, secans DE in K. Quoniam igitur LM ponitur esse diameter, & bisecat è parallelis vnam AC, in F, bisecat [a] alteram quoque DE in K. Quod fieri non potest cùm ex construct. DE bisecta sit G. Non igitur LM aut alia quęuis ducta per F est diameter præter eam, quæ etiam transit per G, hoc est præter ipsam BH. In data igitur ellipsi inuenimus diametrum, quod erat faciendum.

a defin. 1.

PROPOSITIO VI.

DAtæ ellipseos centrum reperire.

Constructio & demonstratio.

PEr præcedentem quære diametrum ellipseos BH, quam seca bifariam in I. Ex definitione tertia patet ellipseos centrum esse I.

Corollarium.

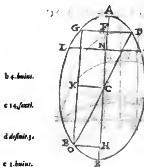
PAtet ex hac propositione omnem diametrum transire per centrum. Ex quo & conuersam facilè deduces, omnes nimirum lineas per centrum transeuntes esse diametros.

PROPOSITIO VII.

DAta sit ellipsis ADB, cuius diameter AB, recta verò LP, vna sit earum, quas propositione tertiâ huius demonstrauimus à diametro secari bifariam: centrum ellipseos sit C.

Dico omnes lineas per centrum ductas in centro diuidi bifariam.

Demonstratio.



DVcta sit enim quæcunque recta DO, per centrum C, ex D ducantur DFG parallela ad LP, GE parallela ad AB, & EH, CK parallelæ ad GD, siue LP. Quoniam igitur FGEH parallelogrammum est, erunt GF, EH æquales: vnde & quadrata GF, EH æqualia sunt. Atqui [b] vt quadratum GF est ad quadratum EH, ita rectangulum AFB est ad rectangulum AHB, æquantur igitur rectangula AFB, AHB. ergo [c] vt AF ad AH, sic BH ad BF: ergo diuidendo vt AF ad FH, sic BH ad HF. æquantur igitur AF, BH. Quare cùm tota quoque diameter AB bisecta sit in C, vt patet [d] ex definitione centri, reliqua etiam FH, bisecta est in C. Quoniam igitur KC ipsis GD, EH est parallela, recta quoque GE bisecatur in K. est verò [e] & DG bisecta in F, vtpote ipsi LP parallela. Ergo est vt

b 4. huius.

c 14. sexti.

d definit. 3.

e 3. huius.

DG

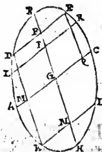
DG ad GF, hoc est vt DG ad CK, sic GE ad KE. † ergo puncta DCE sunt in directum; sed etiam puncta DCO, sunt in directum, cùm ex hypothesi DCO sit linea recta. Vna igitur eademque recta sunt DCE, & DCO. Atqui DCE bisecta est in C, (cùm enim ex constr. GE, FC sint parallelæ, erit vt DF ad FG, sic DC ad CE.) Ergo etiam DCO bisecta est in C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Data sit ellipsis ABCH, cuius diameter sit BH; ordinatim verò ad diametrum applicata LPR: centrum ellipseos G. Ducta autem sit per centrum G, recta AGC ordinatim applicatæ parallela.

Dico BH, AC diametros esse coniugatas.

Demonstratio.



Sumatur in AG quoduis punctum M, per quod ducatur KD diametro BH parallela, occurrens ellipsi in punctis D & K; ex quibus ducantur DFE, KNL, ipsi LR parallelę. Quoniam igitur DK, NF parallelogrammum est, rectæ DF, KN, adeoque & quadrata DF, KN æquantur. Quare cùm [a] rectangulum BFH sit ad rectangulum BNH vt quadratum DF ad quadratum KN, rectangula BFH, BNH etiam sunt æqualia, ac proinde, vt ostensum in præcedenti, BF & NH æquantur. sunt verò & BG, HG æquales. Ergo & reliquę FG, NG æquales sunt, siue FN bisecta est in G. Ergo & KD parallela diametro BH bisecatur in M ab AC. similiter ostendam quasuis alias diametro BH parallelas bisecari ab AC. Quare cùm etiam [b] AB bisecet DE, LR ceterasque omnes quæ sunt ordinatim positæ ad BH, & parallelæ ex hypothesi ipsi AC; patet ex definitione [c] BH, AC diametros esse coniugatas.

[a] a 4. huius.
[b] b 3. huius.
[c] c defin. 4.

Corollarium.

Quæ per centrum ad ellipseos axem datum perpendicularis ducitur, est axis dato axi coniugatus.

Ex discursu iam allato facile sibi lector demonstrationem huius rei elicict.

PROPOSITIO IX.

Data sit ellipsis eiusque diameter BH.

Oporteat diametro BH coniugatam diametrum exhibere.

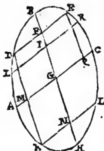
Constructio & demonstratio.

Ducatur recta aliqua KD parallela ad BH, & vtraque DK, BH diuisâ bifariam in M & G, per M & G, ducatur AC.

Dico AC, BH coniugatas esse diametros.

Ac primò quidem rectam AC esse diametrum patet ex 5. huius. & BH diameter est ex hypothesi; ambæ igitur sunt diametri. Quod autem sint coniugatæ sic ostendo. Quoniam AC diameter est & bisecat KD, erit [d] KD ad AC ordinatim applicata. ergo & reliquæ ipsi KD parallelæ, erunt ad AC, ordinatim applicatæ, hoc est [e] à diametro AC bifariam secabuntur. sed DK ex constructione eum sibi parallelis, parallela est ad diametrum BH. ergo diameter AC bisecat diametro BH parallelas. Ducantur deinde DE, parallela diametro AC & EQ, parallela rectæ DK.

[d] d defin. 2.
[e] e Ibid.



parallelogrammum igitur est M D E Q, in quo quia F G ipsis D M, E Q ducta est parallela, erit D F ad F E, vt M G ad G Q. latera quoque parallelogrammi D M, E Q adeoque & quadrata B M, E Q, æqualia erunt. Iam verò quia D M, E Q, sunt ad diametrum A C, ordinatim positæ, ratio inter rectangula A M C, A Q C erit eadem quæ inter quadrata D M, E Q, hoc est æqualitatis: ac proinde vt patet ex demõstratis in septima huius, æquales erunt A M, Q C. Quare cùm a & totæ A G, C G æquales sint (est enim B centrum ellipseos; quia bisecat diametrum B H) etiam reliquæ M G, Q G, æquales sunt. quoniam igitur est vt M G ad G Q, sic D F ad F E, etiam D F, F E æquantur, hoc est D E bisecta est in F. Ergo ex definit. b D E est ad diametrum B H ordinatim posita, ergo & reliquę ipsi parallelæ sunt ad B H ordinatim positæ, hoc est bisecantur à B H. Atqui D E ex constructione, cum sibi parallelis, est alteri diametro A C parallela. Ergo diameter B H bisecat parallelas diametro A C. Quare cùm etiam priùs ostenderim A C bisecare parallelas ad B H, erunt c B H, A B diametri coniugatæ. Factum igitur est quod petebatur.

a 6. huius.
b definit. 2.
c defin. 4.

Corollarium primum.

DAto ellipseos axi, axem coniugatum inuenies, si per centrum ellipseos duxeris rectam lineam dato axi perpendicularem. res patet ex corollario octauæ.

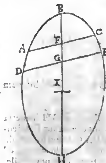
Corollarium secundum.

EX hoc problemate fit manifestum qua ratione ex dato in ellipsi puncto D, ad diametrum B H, recta linea ordinatim debeat applicari. Inueniatur enim A C diameter coniugata diametro B H; & ex dato puncto D ducatur D F E ipsi A C parallela.

Dico D F E ordinatim esse positam ad diametrum B H. Demonstratio patet ex propositione.

PROPOSITIO X.

ORdinatim positarum (A C, D E, &c.) illa maior est quæ centro (I) vicinior.



Demonstratio.

REctangulum B G H maius est rectangulo B F H, vt patet ex quinta secundi. Atqui quadratum E G est ad d quadratum C F vt rectangulum B G H ad rectangulum B F H. Ergo quadratum E G maius est quadrato C F. ergo & ordinatim posita E G maior ordinatim positâ C F. Quod erat demonstrandum.

d 4. huius.

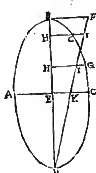
est

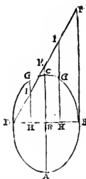
PROPOSITIO XI.

ESto A B C ellipsis axis B D. oportet illius latus rectum exhibere.

Con-

Constructio & demonstratio.





AXi BD per E centrum ducatur [a] coniugatus AC, fiantq; continuæ BD, AC, BF: dico FB esse latus rectum. æquidistet enim BF ipsi AC: ducanturque ordinatim lineæ GH quæ iunctæ FD occurrant in I: ipsa verò FD secet AC lineam in K. Quoniam EC, GH ordinatim positæ sunt ad axem BD, erit vt [b] quadratum GH ad quadratum EC, sic BHD rectangulum ad rectangulum BED: sed vt BHD rectangulum ad rectangulum BED, sic IHB rectangulum [c] est ad rectangulum KEB (quia ex ijsdem rationem habent compositam scilicet ex BH ad BE, & ex HD ad ED, hoc est HI ad EK.) igitur vt quadratum GH ad quadratum CE, sic IHB rectangulum est ad rectangulum KEB, & permutando inuertendo vt KEB rectangulum ad quadratum CE, sic IHB rectangulum est ad quadratum GH: sed cùm [d] AC quadratum sit æquale rectangulo super FBBD (cùm ex construct. BD, AC, BF sint tres continuæ) erit EC quadratum, (nimirum quarta pars quadrati AC est enim [e] AC bisecta in E) æquale rectangulo KEB quartæ parti rectanguli super FBBD. igitur & quadratum HG æquale est rectangulo IHB: ergo HG potest spatium quod adiacet ipsi FB latitudinem habens HB, deficiens ab FBH rectangulo, similis figuræ rectangulo, ~~BFD~~ FBD: quare FB [f] latus rectum est, exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

a coroll. 9. huius.
b 4. huius.
c 23. sexti.
d 17. sexti.
e 4. huius.
f definit. 6.

Corollarium.

HInc sequitur primò quatuor lineas, nimirum latus rectum axis minoris, axem maiorem, axem minorem, & latus rectum axis maioris in continua esse analogia.

Sequitur secundò qui datis lateribus rectis axium, ellipsin exhibuerit, quod inter binas datas, duas medias inuenerit.

PROPOSITIO XII.

ESto ABC ellipsis diameter quæcunque BD, oportet illius latus rectum exhibere.

Constructio & demonstratio.

a 13.huius. DVcatur per E centrum diameter A C (a) coniugata ipsi B D, fiantque continuæ B D, A C, B F, ac B F quidem æquidistet diametro A C: ducaturque linea F D, quæ A C rectam secet in K, ducanturque ordinatim lineæ G H, quæ F D lineæ occurrant in I: Quoniam B D, A C, F B lineæ sunt continuæ, erit A C quadrato æquale rectangulum super F B, B D: igitur & quadrato A E (nimirum quartæ parti quadrati A C, est enim A C bisecta in E) æquale rectangulum super K E, E B, quarta pars rectanguli F B D: quare, vt in præcedenti ostendimus, ita etiam hic

b 13.sexti. ostendemus H G quadrato æquale esse rectangulum I H H B. arqui Rhombus b I H in angulo I H B est ad Rhomboidem I H B in eodem angulo, vt quadratum I H ad rectangulum I H B, (rationes enim Rhombi ad Rhomboidem & quadrati ad rectangulum ex iisdem rationibus componuntur nempe ex I H, ad I H & I H ad H B,) ergo eum quadratum I H æquale sit rectangulo I H B, etiam Rhombus I H, Rhomboidi I H B æqualis erit; recta igitur I H potest Rhomboidem in angulo ordinatim applicatæ I H B, qui (quod demonstratu est facile) à Rhomboide F B H in eodem angulo, deficit Rhomboide simili ei qui in eodem angulo fit à diametro

c defin.7. D B & recta B F. igitur F B est latus c rectum. Quod petebatur.

PROPOSITIO XIII.

OMnis recta (B F,) quæ per terminum diametri (B D) ducitur ordinatim applicatæ (A C) æquidistans, ellipsim contingit.

Et quæ tangenti ducitur parallela, est ordinatim ad diametrū applicata.

Demonstratio.

SI enim recta B F non contingat ellipsim, secet illam in G; diuisâque B G bifariam in H, agatur per H & E, K I occurrens vtrimque peripheriæ in I & K. Quoniam recta B G per constructionem æquidistat A C, vtramque autem bifariam secet recta I K d erit I K diameter & A C, B G lineæ ordinatim ad illam positæ; secat

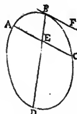
d patet ex 5 huius. autem per constructionem recta A C ordinatim quoque diametrum B D, igitur vna eademque recta A C ordinatim secat duas diametros B D, I K. Quod fieri non potest; alias enim quæ ipsi A C duceretur parallela, etiam ab vtraque diametro B D, K I ac proinde in duobus punctis bisecaretur; igitur patet F B lineam, sectionem con-

contingere: quod erat primum. Quod si tangenti BF parallela ducatur quæuis AC, occurrens diametro in E, erit ordinatim ad diametrum posita. Si non ducatur ex A ordinatim AL: erit AL parallela contingenti BF. quare & ipsi AC æquidistat, quod fieri non potest, cùm eandem secet in A: igitur AL non est ordinatim posita nec quæuis alia præter AC, quod erat alterum. Patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO XIV.

PEr datum in peripheria punctum contingentem ducere.

Constructio & demonstratio.



ESto ABC ellipsis & punctum in peripheria datum B, oportet per B rectam ducere quę sectionem contingat in B. inueni [a] centrum, & per hoc ex dato puncto B due diametrum BD, ad [b] quam ponatur ordinatim quæuis linea AC, cui per B agatur parallela BF. manifestum igitur est [c] BF esse tangentem; igitur per datum in peripheria punctum, &c. Quod erat faciendum.

a 6. huius.

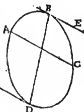
b 11. huius. corollarium ... dum 9 huius

c 13. huius.

PROPOSITIO XV.

LIneæ quæ per extremitates diametri ductæ, ellipsim contingunt, inter se æquidistant.

Demonstratio.

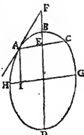


DVcatur enim quæuis AC ordinatim ad diametrū: manifestum est ex 13. huius tam BE quàm DF lineas illi æquidistare, adeoque & inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

COntingentes ductæ per extremitates ordinatim positæ, conueniunt cum diametro extra sectionem.

Demonstratio.



SIt ABC ellipsis diameter BD, & ordinatim posita AEC, agaturque per A tangens AF, dico illam eum diametro conuenire in F. Inuentâ enim HG [d] diametro coniugatâ ipsius BD, demittatur ex A linea AI æquidistans BD. quoniam igitur AI, BD æquidistant, & AF occurrat rectæ AI, patet productam quoque conuenire cum BD. Quod fuit demonstrandum.

d 13. huius.

PROPOSITIO XVII.

ELlipsim ABC cuius axis BD, contingat in B linea FG, sumptisq; in contingente æqualibus partibus FB, BG, demittantur ex F & G diametri duæ FE, GE occurrentes ellipsi in H & I. dico iunctam HI æquidistare ipsi FG.

F B G H K I A E C D

Demonstratio.

a 4. huius.

POnatur HK parallela FG, quæ producta occurrat EG in I; erit itaque HK æqualis KI. Ergo, cùm rectangulum BKD ad BED, a eam habeat rationem, quam HK quadratum ad quadratum AE, erit quoque BKD rectangulum ad rectangulum BED, vt IK quadratum ad quadratum EC: vnde punctum I est ad ellipsim, & HI linea perimetrum BIC, & EG rectam in eodem puncto interseceat. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

EAdem manente figura, sint ABC ellipseos axes AC, BD, & HE diamerer quæcunque, oportet ex E versus C diametrum educere, æqualem ipsi HE.

Constructio & demonstratio.

FIat angulo BEH æqualis angulus BEI, dico rectam EI satisfacere petitioni; productæ enim lineæ HE, EI, occurrant actæ per B contingenti in F & G. Iungantur puncta H, I. quoniam anguli BEH, BEI ponuntur æquales, sunt autem & EBF, EBG anguli recti, & BE linea communis, patet FBE, GBE triangula, adeoque & latera FB, BG inter se esse æqualia; vnde & HI b æquidistat FG, estque vt FE ad GE, sic HE ad IE, quare HE, IE lineæ æquales; igitur ex E diametrum eduximus, &c. Quod erat faciendum.

b per 17. huius.

PROPOSITIO XIX.

LIneæ in ellipsi coniungentes extrema quarumcunq; diametrorum inter se sunt æquales & paralleiæ.

Demonstratio.

A B E D C

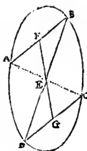
c 7. huius.

SEcent ABC ellipsim diametri duæ quæuis AC, BD. dico iunctas AB, CD, item AD, BC, esse inter se æquales & parallelas: cùm DB, AC bisectæ sint in E, erit vt DE ad EB, sic CE ad AE, & permutando vt DE ad CE, sic BE ad AE. sunt verò & anguli ad E æquales, similia igitur sunt triangula DEC, AEB; ergo vt DE ad EB, sic DC ad AB; quare cùm DE, EB æquentur, etiam AB, DC æquales erunt. similiter ostendemus AD, BC æquales esse. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

LIneæ quæ ad extremitates diametri, intra sectionem æquidistantes ponuntur, æquales quoque erunt inter se.

Demon-



Demonſtratio.

SEcet ABC ellipſim diameter quæcunque BD, ducanturque ex B & D, intra ſectionem parallelæ AB, CD. dico illas inter ſe eſſe æquales. inuento 2 centro E, & AB biſecta in F, iunge FE, & produc in G, & quoniam EF diameter biſecat AB, biſecat etiam DC ipſi AB, parallelam. Deinde quia ſimilia ſunt triangula FEB, DEG; erit DE ad DG, vt EB ad BF; & permutando vt DE ad EB, ſic DG ad BF. ſed DE, EB æquantur. ergo & BF, DG, quę ſunt, vt iam oſtendi, ipſarum AB, DC dimidię. Ergo & totę AB, DC æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum. 26.huius.

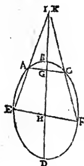
Corollarium.

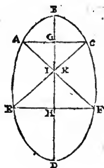
HInc ſequitur iunctas AE, EC eſſe in directum: cùm enim latera AF, FE æqualia ſint duobus lateribus CG, GE & anguli æqualibus lateribus contenti, æquales, patet AFE, CGE triangula eſſe inter ſe æqualia, & angulum AEF æqualem angulo CEG, adeoque AE, EC lineas in directum.

PROPOSITIO XXI.

LIneę per extremitates duarum parallelarum inęqualium in ellipſi ductę, conueniunt in eodem puncto cum diametro, ad quam ordinatim poſitæ ſunt parallelę.

Demonſtratio.





SEcent ECD ellipſim duę quęuis parallelæ inęquales AC, EF, ordinatim poſitam ad diametrum DB. dico iunctas EA, FC cum BD diametro quam ſecant ordinatim in eodem puncto conuenire. Quoniam ordinatim ponuntur lineæ AC, EF ad diametrum BD, ambæ biſecantur in G & H. vnde AG ad GC vt EH ad HF. & permutando vt AG ad EH, ſic GC ad HF, conueniat iam EA cum diametro in I; altera verò FC in K. erit ergo vt IG ad IH, ſic IA ad IE. ſed etiam vt IG ad IH, ſic KC ad KF, eſt enim KG ad KF, vt CG ad FH, hoc eſt, vt ante oſtendi, vt AG ad EH, hoc eſt vt IG ad IH. ergo puncta I & K eadem ſunt; ergo punctum I communis eſt interſectio rectarum EI, FI, HI. Quod erat demonſtrandum.

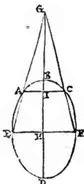
PRO-

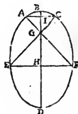
PROPOSITIO XXII.

SIt ABC ellipſeos diameter BD ad quam ordinatim poſita ſit EF, ducanturque ex E & F lineæ occurrentes diametro in puncto G, ellipſi verò in A & C.

Dico iunctam AC, æquidiſtare EF.

Demonſtratio.





POnatur AI parallela EF & producta occurrat FG lineæ in C. quoniam igitur EH æqualis eſt HF, erit & AI ipſi IC æqualis; ſed quia AI æquidiſtat EF, erit BID rectangulum ad rectangulum BHD, vt AI quadratum ad quadratum EH. Ergo etiam, vt rectangulum BID ad rectangulum BHD, ita quadratum IC ad quadratum HF. vnde punctum C eſt ad ellipſim & communis interſectio rectarum FG, AI cum perimetro BCF; ac proinde AC iungens puncta A, C, æquidiſtat EF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIII.

IN ellipſi ductæ ſint parallelæ AC, EF, per quarum terminos ducantur EA, FC coeuntes in G. & per G ducta GIH biſecet parallelam AC.

Dico etiam alteram biſecari.

Demonſtratio.

VT HG ad IG, ſic EH ad AI, & vt HG ad IG, ſic FH ad CI. ergo EH ad AI, vt HF ad IC. ergo permutando EH ad HF, vt AI ad IC. ſed AI, IC æquantur. ergo & EH, HF æquantur, adeoque tam EF quàm AC ſunt biſectæ. ergo GIH diameter eſt. quod erat demonſtrandum.

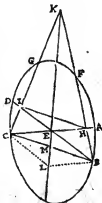
PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Secent ABC ellipsim diametri duæ AC, BD, iunctaque BC, agatur per E centrum diameter KL, secans BC bifariam in M, & ex B & C rectæ ducantur BF, CG, ad idem diametri punctum K secantes AC, BD lineas in H & I.

Dico rectangulum AHC esse ad rectangulum DIB vt quadratum AC ad quadratum DB.

Demonstratio.



Ponatur ex C linea CL parallela BD, occurrens diametro KL in L, & iunge BL. quoniam CL æquidistat DE, erunt EMB, CML triangula inter se similia: quia verò CM, MB æquales sunt, æqualia quoq; erunt triangula CML, EMB & lateri EM, æquale latus LM: igitur in triangulis BML, CME, duo latera CM, ME, æqualia sunt duobus lateribus BM, ML. sed & anguli ijs contenti BML, EMC æquantur. Ergo ad bases anguli LBM, ECB æquantur. ergo BL, CEA sunt parallelæ. Ergo BH ad HK, vt LE ad EK, hoc est (quoniam ex constructione BI, CL sunt parallelæ) vt CI ad IK. Ergo IH æquidistat CB, & est vt HE ad EC, sic IE ad EB, & componendo ac permutando vt EC ad EB, sic HC ad BI, sed vt CE ad BE, sic AC est ad BD, cùm vtraque in centro[a] diuisa sit bifariam; igitur vt AC ad BD, sic HC ad BI. ergo etiam[b] vt AC ad DB, sic AH ad DI. Quare cùm rectangulum AHC ad rectangulum DIB rationem habeat compositam ex laterum rationibus AH, ad DI, & HC ad BI, quæ ambæ ostensæ sunt eædem esse cum ratione AC ad BD, erit rectangulorum ratio duplicata rationis AC ad BD, hoc est eadem quæ quadratorum AC, BD. Quod erat demonstrandum.

[a] 27 huius.
[b] 19 quinti.

PROPOSITIO XXV.

Duæ lineæ CG, BF intra ellipsim ductæ occurrant diametro ellipseos MK in eodem puncto K. Ductæ sint deinde binæ aliæ diametri BD, CA quæ ita secentur à rectis CG, BF vt rectangula BID, CHA quadratis BD, AC proportionalia sint.

Dico iunctas IH, CB esse parallelas.

Demonstratio.

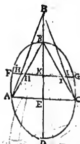
Quoniam est vt quadratum BD ad quadratum CA, hoc est vt quadratum ED ad quadratum EA, sic rectangulum BID ad rectangulum CHA: erit permutando vt quadratum ED, hoc est rectangulum BID cum quadrato EI ad rectangulum BID, vt quadratum EA (hoc est rectangulum CHA cum quadrato EH) ad rectangulum CHA. ergo diuidendo, rectangulum BID est ad quadratū EI. vt rectangulum CHA ad quadratū EH. Permutando igitur rectangulum BID est ad rectangulum CHA vt quadratū EI ad quadratū EH. sed etiam est rectangulum BID ad rectangulum CHA vt quadratum BD ad quadratum CA, hoc est vt quadratum ED ad quadratum EA. Itaque quadratum EI est ad quadratū EH vt quadratum ED ad quadratum EA: adeoque recta EI ad rectam ED, hoc est EB, vt recta EH ad rectam EA hoc est EC, parallelæ sunt igitur IH, CB. Quod erat demonstrandum.

× ex 5a [illegible] di euclid.

PROPOSITIO XXVI.

Esto A B C ellipseos diameter B D, ad quam ordinatim posita sit recta A C: ductisq; ex A & C lineis quę diametrum in eodem puncto B secent, ducatur F G parallela A C, occurrens A B, C B in H & I, diametro verò B D in K.

Dico F H, G I lineas esse æquales.



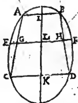
Demonstratio.

Quoniam F G æquidistat A C ordinatim positę ad B D, erit & F G, quoque ordinatim posita ad diametrum B D, adeoq; in K bifariam diuisa sed & H I in K diuisa est bifariam, vti A C in E, demptis igitur æqualibus H K, I K, reliquę F H, I G æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Secent A B C ellipsim duę quęuis parallelæ A B, C D, iunctisque A C, B D, ducatur E F parallela A B, secans A C, B D lineas in G & H.

Dico E G, F H rectas esse ęquales.



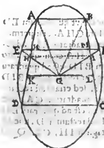
Demonstratio.

a 5 huius. Diuisis A B, C D bifariam in I & K, agatur per I & K, linea I K, erit a illa diameter, & E F lineam, rectæ A B parallelam secabit bifariam in L. sed & H G in L secta est bifariam vt C D in K, vel A B in I, ablatis igitur ęqualibus G L, L H, manent E G, F H, reliquæ æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Secent A B C ellipsim duę quęuis parallelę A B, C D, iunctisque A D, B C ducatur E N M F parallela A B, & ex E & F, semidiametri ponantur E G, F G, quę A D, B C lineas secent in H & I.

Dico E G, F G in H & I proportionaliter esse diuisas.



Demonstratio.

b 27. huius. Ducatur per G, K L æquidistans A B, occurrens A D, B C, in K & L. Quoniam E F, K L æquidistant, erit vt E N ad K G, sic E H ad H G: & F I ad F G, vt F M ad L G; sed vt E N ad K G, sic F M est ad L G, (cùm E N, F M item b K G, L G, æquales sint,) igitur vt E H ad H G, sic F I ad I G. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

Hinc patet iunctam H I æquidistare D C, adeoque lineas A D, B C, in H & I proportionaliter esse diuisas.

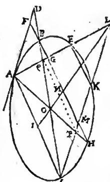
PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Ellipsim, cuius diameter B C centrum O, contingat A D occurrens diametro in D, ductâque ex puncto A ordinatim A Q E, & iunctâ A C, per B ponatur recta F B G parallela rectæ A C.

Dico F B, B G æquales esse.

Demonstratio.



F G occurrat ellipsi in H, iunganturque H O, A O quæ [a] erunt in directum. Tum A C bisectâ in I, ducatur per I diameter I O L occurrens rectæ A E in L, & iungantur puncta L C, per rectam L C occurrentem ellipsi in K, & rectæ F H in M, rectæ verò H O in P. Quoniam A C ex constructione ordinatim posita est ad diametrum I L, rectæque per A & C duplæ occurrunt diametro in eodem puncto L, erit [b] E K parallela A C. Est verò & B H parallela ipsi A C ex hypothesi: & semidiametri O B, O H secant A E, C K in Q & P. ergo Q P æquidistat [c] rectæ B H, tres igitur A C, Q P, E K sunt parallelæ. Quare cùm ex hypothesi A E bisecta sit in Q, erit & C K bisecta in P, ac proinde ordinatim posita ad diametrum A H. Itaque [d] C K æquidistat tangenti A D. est autem & F M ex hypothesi parallela ad A C, ergo [e] F M æqualis est A C, sed [f] etiam B H æqualis est A C. Igitur F M, B H æquales sunt. quare communi demptâ B M æquantur F B, H M. Atqui etiam [g] G B, H M æquales sunt. itaque F B, G B æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

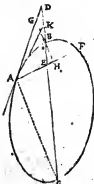
[a] 2 10. huius.
[b] 105. huius.
[c] 28. huius. ex constr. ... huius
[d] 13. huius.
[e] 13? huius.
[f] 12 huius. ...
[g] 17. huius.

PROPOSITIO XXX.

Ellipsim A B C cuius diameter B C contingat in A recta A D conueniens cum diametro in D: ductaque ex A sit linea A F ordinatim ad diametrum B D.

Dico rectam D C in B & E diuisam esse extrema & media ratione proportionali, hoc est, vt C D est ad B D, sic C H est ad H B: & si diuisa fuerit in B & E extrema & media ratione proportionali agaturque per E ordinatim linea A F ad B C: dico iunctam A D, sectionem contingere.

Demonstratio.

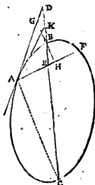


Iunctâ A C, agatur per B linea G H parallela rectæ A C occurrens A F lineæ in H & A D tangenti in G. Quoniam A C, B H lineæ æquidistant, erit vt A C ad B H, sic C E ad E B: sed vt A C ad B H, sic A C est ad G B, (quia G B, E H sunt [h] æquales) igitur vt A C ad G B, sic C E est ad B E: est autem vt A C ad G B, sic C D ad D B (quia G B, A C æquidistant) igitur vt C D ad D B, sic C E ad E B. Quod erat primum sit iam vt C D ad B D, sic C H ad H B, si per E ordinatim agatur A F: dico iunctam A D sectionem contingere in A. si enim A D non tangit, ponatur per A tangens quæ B D diametro occurrat in K, erit igitur vt C E ad E B, sic C K ad K B, sed est vt C E ad E B, sic C D ad D B, igitur vt C K ad K B, sic C D ad D B, & diuidendo vt C B ad B K, sic C B ad B D, quod fieri non potest, cùm punctum K supra vel infra D cadat. igitur A K non est tangens nec quæuis alia præter A D. Quod fuit demonstrandum.

[h] 19. huius.

Corollarium.

PRopositiones 29. & 30. etiam in circulo sunt veræ, quamuis autē sæpius contingat vt quæ hoc libro de ellipsi demonstramus locum etiam habeant in circulo, circuli tamen mentionem non facio nisi ad sequentes demonstrationes assumi debeat.



PROPOSITIO XXXI.

EAdem manente figurâ propositum sit à dato extra sectionem puncto D, tangentem ducere.

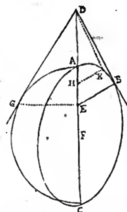
Constructio & demonstratio.

DVcatur ex D diameter DBC, fiatque vt CD ad DB, sic CE ad EB, & per E ad BC, ordinatim ponatur AF, iunganturque AD, patet per præcedentem AD lineam sectionem in A contingere; igitur à dato extra ellipsim puncto, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXXII.

ELlipsim ABC cuius diameter AC contingat recta BD in B, conueniens cum diametro in D: & ex B ducatur BE ordinatim ad diametrum AC: centrum autem sectionis sit F.

Dico FE, FA, FD lineas esse in continua ratione: & si FE, FA, FD fuerint continuæ proportionales, & per E ordinatim recta agatur EB, dico iunctam BD sectionem contingere. Est Apollonij.



Demonstratio.

CEntro F interuallo FA circulus describatur AGC, tum ex E puncto normalis educatur ad diametrum AC occurrens circulo in G: ducaturque recta GD. quoniam EB recta ponitur ordinatim ad diametrum AC, & per B acta tangens conuenit cum eadem diametro in D, erit [a] vt CD ad DA sic CE ad EA: est autem in circulo, recta EG normalis ad diametrum EG, igitur & [b] recta GD circulum contingit in G. quare in circulo [c] erunt FE, FA, FD lineæ continuæ proportionales: sunt autem eædem lineæ communes ellipsi, igitur & in ellipsi erunt FE, FA, FD in cōtinua analogia. Quod si FE, FA, FD continuæ proportionales sint, & per E ducatur ordinatim EB, dico iunctam BD ellipsim contingere in B. sin verò: ducatur ex D recta DK contingens ellipsim in K, & ex K ordinatim ponatur KH; igitur per primam partem huius FH ad FA, vt FA ad FD. sed etiam ex hypothesi, FE est ad FA, vt FA ad FD. ergo FE est ad FA, vt FH est ad FA, quod fieri non potest, cùm FH sit maior aut minor quàm FE. vnde DK non est contingens, sed DB. Quod fuit demonstrandum.

a 30. huius.

b 31. de circulo vel per coroll. 30. huius.

c 29. de circulo vel per coroll. 30. huius.

PROPOSITIO XXXIII.

ESto A B C ellipſeos axis A C, ſuper quo vt diametro ſemicirculus deſcribatur A D C, aſſumptoq; in axe puncto F quod non ſit centrum, erigatur ex F orthogona F D occurrens ellipſi in B.

Dico contingentes per B & D actas, axi A C in vno eodemque puncto occurrere.

Demonſtratio.



AGatur per B contingens B E, conueniens cum axe in E, iunganturque E D. quoniam F B ordinatim poſita eſt ad axem & B E ſectionem contingit, erit a C F ad F A, vt C E ad E A: vnde & iuncta E D circulum b contingit: igitur contingentes per B & D actæ, conueniont cum axe in vno eodemque puncto. Quod fuit demonſtrandum.

a 30. huius.

b de circulo vel per coroll. 30. huius.

Corollarium.

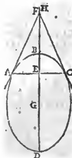
HInc facile etiam demonſtrabimus ſi duæ tangentes in eodem puncto diametro occurrant normalem F D, quæ ſi per vnum contactum D tranſeat, tranſire etiam per alterum.

PROPOSITIO XXXIV.

ESto A B C ellipſis diameter B D, ad quam ordinatim ponatur A C aganturq; per A & C contingentes.

Dico illas diametro in vno eodemq; puncto occurrere.

Demonſtratio.



PEr 16. huius patet ſingulas contingentes per A & C ductas cum diametro conuenire: ſi igitur non conueniant in eodem puncto, occurrat A F contingens diametro in F, & C H in H: Quoniam tangens A F concurrit cum diametro in F, erit c vt D E ad E B, ſic D F ad F B. rurſum quoniam tangens C H concurrit cum diametro in H, erit vt D E ad E B, hoc eſt vt D F ad F B, ſic D H ad H B: & diuidendo vt D B ad B F, ſic D B ad B H, quod fieri non poteſt. quare tangentes non occurrunt diametro in diuerſis punctis. ergo in eodem. Quod erat demonſtrandum.

c 30. huius.

PROPOSITIO XXXV.

ESto A B C ellipſis, diameter B D producta vtcunque in E, & ex E demiſſæ E A, E C ſectionem contingant in A & C.

Dico iunctam A C, ordinatim eſſe poſitam ad diametrum B D.

Demonstratio.

POnatur A F ordinatim ad B D sitque H centrum ellipseos; erit igitur [a] linea E H diuisa in B & F in tres continuè proportionales. demittatur quoque C G ordinatim ad B I [b] erit denuo E H diuisa in B, & G, in tres lineas in analogia continua; igitur F & G, puncta sunt eadem. quare recta A F C, est ordinatim posita ad diametrum B I. Quod fuit demonstrandum.

[a] 32. huius.
[b] per eandē.

Corollarium.

HInc sequitur si ellipsim A B C contingant in A & C, rectæ duæ A D, C D conuenientes in D; iunctâque A C, bifariam secetur in E, rectam D E transire per centrum siue iunctam D E esse diametrum sectionis. si enim E D non sit diameter, ducatur ex D diameter D F, occurrens A C lineæ in F. erit igitur per præcedentem A C linea in F, diuisa bifariam, adeoque punctum F, idem cum E. vnde D F recta eadem cum linea D E. quod est contra suppositum, quare D E sectionis est diameter. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

SI ellipsim tangant binæ rectæ coeuntes in D, & ex centro ducantur G A, G C, G D.

Dico triangula G C D, G A D esse æqualia.

Demonstratio.

PVncta contactuum iungantur recta A C. quoniam [c] A C bisecta est in E. triangula G A E, G E C, item D E C, D E A æqualia erunt: duo itaque triangula D E C, D E A, hoc est totum D C G, æquabuntur duobus triangulis D E A, E A G, hoc est toti G A D. Quod erat demonstrandum.

[c] 35. huius.

PROPOSITIO XXXVII.

ELlipsim A B C secent A C, D B: diametri quæuis agantur per C & D tangentes, quæ per 34. huius conueniunt cum diametro H K in eodem puncto.

Dico lineas A G, B G ex A & B ductas, ipsis D K, C K æquidistantes, diametrum H K, in vno eodemque puncto intersecare.

Demon-

Demonstratio.

POnatur A E occurrere diametro in G & B F in M; iunganturque D C, A B, D A, C B. Quoniam D C iungit tangentes D K, C K, bisecatur a [a] diametro H K in L, est verò [b] A B parallela ad D C. ergo & hæc à diametro bisecatur in I. quare cùm totæ D C, A B sint [c] æquales, erunt & earum dimidiæ D L, A I æquales. cùm igitur etiam D L, A I, sint [d] parallelæ, quæ eas iungunt D A, I L parallelæ erunt. ergo figura A G K D parallelogrammum est, proindeque D A æqualis est G K. simili modo ostendemus B C æqualem esse M K. Quare cùm D A, B C, sint [e] æquales, etiam K G, K M æquales erunt, vnum igitur idemque punctum sunt G & M, in quo parallelę tangentibus D C, C K, ductæ è punctis A, B, occurrunt diametro. Quod fuit demonstrandum.

a 35. huius. b 19. huius. c Ibid. d Ibid. e Ibid.

PROPOSITIO XXXVIII.

ELlipsim cuius centrum A secent quævis duæ diametri B D, C E, iunctisque B C, D E ponatur F G diameter, quæ B C bifariam diuidat in H, ipsi autem E D occurrat in I, tum per C & B, item D & E, contingentes agantur, quę [f] G diametro [f] occurrent in ijsdem punctis F & G.

f 34. huius.

Dico æqualia esse inter se, primò triangula A C F, A B F, secundò triangula A C F, A D G, tertiò triangula C B F, D E G.

Demonstratio.

OCcurrat F G diameter ellipsi in K & L. Quoniam igitur B C ex hypothesi in H diuisa est bifariam, erit tam A C H triangulum æquale triangulo A H B, quàm H C F æquale triangulo H F B, vnde totum triangulum A C F, æquale est toti triangulo A F B, quod erat primum. Rursum cùm [g] B C, D E æquidistent & B C in H diuisa sit bifariam à diametro F G, erit [h] & E D in I bifariam diuisa. quare cùm [h] totæ C B, D E sint æquales, erunt & harum dimidiæ K C, D I æquales, quare cũ [i] etiam sint parallelę, rectę C D, H I, quæ illas iungũt, sunt parallelæ; triangula igitur A C H, A D I sunt inter easdem parallelas. Sunt autem & bases A H, A I æquales (est enim A K æqualis A L, & [k] K H ipsi I L.) ergo triangulum A C H æquatur triangulo A D I. Iam verò A H, A K, A F, itemque A I, A L, A G sunt [l] continuę. quare ratio A H ad A F, duplicata est rationis A H ad A K; & ratio A I ad A G duplicata rationis A I ad A L. Cùm igitur rationes A H, ad A K, A I ad A L, eædem sint (A H enim ipsi A I, & A K, ipsi A L æqualis est) erunt & rationes A H ad A F, A I ad A G, earundem rationum duplicatæ, eædem inter se: ac proinde [m] triangulum quoq; A H C est ad triangulum A F C, vt triangulum A I D ad triangulum A G D. Quare cùm triangula A C H, A D I ostensa sint æqualia, etiam A F C, A G D æqualia erunt. quod erat alterum. Ex quo iam patet etiam F C H, G D I æqualia esse, quibus si addas F B H, G E I, quæ eodem planè discursu ostendemus æqualia, erunt tota triangula C B F, D E G, æqualia. Quod erat tertio loco demonstrandum.

g 19. huius. h Ibid. i Ibid. k 27. huius. l 32. huius. m 1. sexti.

Corol-

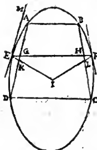
Corollarium.

HInc patet quadrilatera C F B A, D G E A, çqualia esse, eodem enim discursu probabimus çqualia esse triangula A B F, A E G, quo probauimus æquari A C F, A D G.

PROPOSITIO XXXIX.

SEcent A B C ellipsim duç quęuis parallelæ A B, C D, iunctisque A D, C B, recta E M parallela ipsi A D, contingat sectionem in E, & ex E ducatur E F, æquidistans A B, secans A D, C B lineas in G & H.

Dico contingentem per F ductam æquidistare ipsi B C.



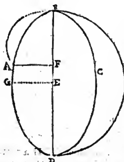
Demonstratio.

DVcantur ex I centro lineæ I E, I F occurrentes A D, C B in K & L: quoniam igitur E M contingens, æquidistat A D & I F diameter ad contingentem ducta, secet A D lineam in K, erit [a] A D in K diuisa bifariam; est autem recta B C in L diuisa sicut A D in K, recta enim K L iungens puncta K, L parallela est [b] ipsis A B, D C. igitur & B C in L secta est bifariam à diametro I F; vnde & tangenti per F ductæ [c] æquidistat. Quod fuit demonstrandum.

a Coroll. 13. huius.
b Coroll. 18. huius.
c 13. huius.

PROPOSITIO XL.

CIrculus super axe maiore vt diametro descriptus ellipsi exterius in duobus tantum punctis occurrit.



Demonstratio.

SIt A B C ellipseos axis maior B D, centroque illius E interuallo E B circulus describatur, dico illum ellipsi in duobus tantùm punctis B & D occurrere. occurrat enim si fieri possit insuper in puncto A, & per A ordinatim ad axem agatur A F, ducaturque axis minor G E. erit igitur vt B F D rectangulum ad quadratum F A sic B E D rectangulum ad quadratum E G: sed B F D rectangulum in circulo est æquale quadrato F A; igitur & rectangulum B E D, id est quadratum B E æquale est quadrato G E, quod fieri non potest cum B E linea maior sit quàm G E. igitur circulus ellipsi non occurrit in A: nec in alio quouis puncto, præter B & D. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

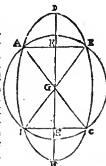
SImili discursu demonstrabimus circulum circa minorem ellipseos axem descriptum in duobus tantùm punctis extremis axeos ellipsi occurrere, & totum intra ellipsim existere.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Circulus centro ellipseos descriptus, si ellipsim secat, in quatuor punctis secabit.

Demonstratio.



Sit enim ellipseos centro G descriptus circulus secans ellipsim in B, ducatur axis FD, & recta BGI; tum ordinatim applicetur BKA occurrens ellipsi in A, ducantur item recta AGC, IC; in triangulis BKG, AKG, BK, AK, æquantur, & KG est communis, anguliq; ad K recti; ergo GB, GA æquales. quare cùm punctum B sit ad circulum, erit & punctum A. est autem idem punctum etiam ad ellipsim, ergo circulus ellipsim secat in A. Deinde AB, IC sunt [a] parallelæ, adeoq; cùm angulus AKH rectus sit, erit etiam rectus IHK: ac proinde IC ordinatim est posita ad axem DF, ac bisecta in H. sunt autem totæ AB, IC [b] æquales, ergo AK, IH earum dimidiæ etiam sunt æquales. In triangulis igitur GKA, GHI, AK ipsi IH, & KG ipsi HG est æqualis, anguli verò AKG, IHG etiam æquales sunt; ergo GA, GI æquantur. quare cùm punctum A sit ad circulum, erit & punctum I. atqui etiam punctum I est ad ellipsim. ergo circulus ellipsim secat in I. similiter ostendemus circulum ellipsi occurrere in C. In quatuor igitur punctis secat. Quod erat demonstrandum.

[a] 19. huius.

[b] Ibid.

Corollarium.

Quod autem non secet ellipsim circulus in pluribus punctis quàm quatuor, facilè colligetur ex demonstratione iam posita.

LI EL-

ELLIPSIS
PARS SECVNDA

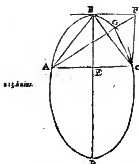
De sectoribus & segmentis Ellipseos.

PROPOSITIO XLII.

SIt ABC ellipseos diameter BD, ad quam ordinatim ponatur AEC; iunganturque ABC.

Dico ABC triangulum maximum esse illorum quæ segmento ABC inscribi possunt.

Demonstratio.



ACta per B contingente BF, ex A recta ducatur quæuis AF, occurrens ellipsi in G & contingenti in F. iunganturque GC, FC: Quoniam FB contingens cadit supra G, igitur triangulum AFC maius est triangulo AGC; sed AFC triangulo æquale est triangulum ABC ob AC, BF æquidistantes; igitur & ABC triangulum maius est triangulo AGC: vnde cùm idem de alijs omnibus triangulis ostendatur, patet ABC triangulum, maximum eorum esse quæ segmento ABC inscribi possunt. Quod erat demonstrandum.

a 13. huius.

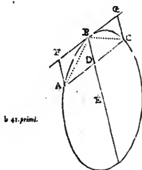
Corollarium.

HInc facilis praxis elicitur ad inscribendum cuiuis segmento triangulum maximum: erigendo nimirum diametrum BD, iungendoque AB, BC. praedicta. demonstratio patet ex priori.

PROPOSITIO XLIII.

TRiangulum maximum segmento cuiuis non maiori semiellipsi inscriptum, maius est dimidio eiusdem segmenti.

Demonstratio.



ESto ABC segmento, non maiori semiellipsi inscriptum triangulum maximum ABC. Dico illud maius esse dimidio segmenti ABC: ductâ enim diametro BE, quæ AC subtensam diuidat bifariam in D, erigātur ex A & C lineæ AF, CG parallelæ diametro BE, quæ FG contingenti per B actæ occurrant in F & G, iunganturque AB, CB: triangulum ABC b dimidium est parallelogrammi AG. Atqui AG parallelogrammum maius est segmento ABC, cùm AF, CG, FG lineæ cadant extra ellipsim; igitur & triangulum ABC, maius est dimidio eiusdem segmenti. Quod fuit demonstrandum.

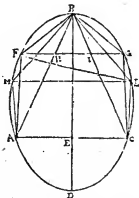
b 41. primi.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

Ellipsim ABC secet diameter BD, ad quam ordinatim posita sit AEC: iunctis AB, CB inscribatur segmento AFB triangulum maximū AFB, & ex F ponatur FG parallela AC, iunganturq; BG, GC. Dico BGC triangulum esse maximum eorum quæ segmento BGC inscribi possunt, & si triangula fuerint maxima, dico FG esse parallelam ad AC.

Demonstratio.



Qvoniam [a] FH, GI lineæ sunt æquales, triangula FBH, GBI, eandem habentia altitudinem, æqualia erunt. similiter triangula FAH, GIC inter parallelas FG, AC constituta erunt æqualia ac proinde æquabuntur tota triangula BFA, BGC: si igitur BGC non sit maximum, ponatur aliud BLC, maius triangulo BGC, & ex L ducatur LM æquidistans AC; erit igitur vt prius triangulum BLC, æquale triangulo AMB, adeoque & AMB triangulum, maius triangulo BGC id est AFB, quod est contra suppositum, cū BFA maximum ponatur; igitur BGC triangulum maximum est eorū quæ segmento BGC inscribi possunt. quod erat primum. sint deinde triangula BFA, BGC maxima, demonstrabimus iunctam FG parallelam esse AC. si enim non est parallela, sit alia supra vel infra ipsam FG parallela ad AC, nimirum recta FL; iunganturque BL, CL. ergo per primam partem huius triangulum BLC erit maximum, quod fieri non potest cūm FGC ex hypothesi sit maximum. Non igitur FL, aut alia vlla præter FG est parallela ad AC. Quod erat secundo loco demonstrandum. [a 26. huius.]

Corollarium primum.

Hinc sequitur si triangula BFA, BGC maxima sint eorum quæ segmentis inscribi possunt, esse æqualia. Nam per secundam partem huius FG est parallela ad AC. Vnde [b] FH, GI æquales sunt, ac proinde triangula FBH, BIG, & FAK, GCI; adeoque & tota BFA, BGC æqualia sunt. [b ibid.]

Corollarium ſecundum.

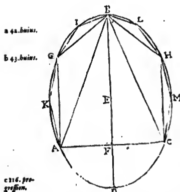
QVod ſi fuerint binæ A C,F G ad diametrum ordinatim poſitæ, iunganturque F A, C G, triangula quæ ſegmentis A F, C G inſcribuntur maxima, inter ſe quoque æqualia eſſe, eodem planè diſcurſu demonſtrabimus, quo vſi ſumus in propoſitione & corollario primo, nullo alio immutato, quàm quod loco 26. huius aſſumenda ſit vigeſima ſeptima.

PROPOSITIO XLV.

SIt A B C ellipſis diameter quæcunque B D ad quam ordinatim po natur A F C.

Dico A G B F ſegmentum æquari ſegmento C H B F.

Demonſtratio.



a 42. huius.
b 43. huius.
c 116. progreſſion.

IVnctis A B, C B, inſcribantur a ſegmentis reliquis triangula maxima A G B, C H B erunt illa per primum Coroll. præcedentis propoſitionis inter ſe æqualia & b maiora dimidio ſegmentorum A B G, C B H: dein & reſiduis vtrimque ſegmentis triangula inſeribantur maxima A K G, G I B, C M H, B L H erunt vt prius triangula A K G, G I B partim per corollar. primum, partim per ſecundum æqualia triangulis C M H, B L H, & maiora dimidijs ſegmentorum: igitur cùm ea inſcriptio ſemper poſſit continuari in vtroque ſegmento A G B, B H C, & vtrimque partes ablatæ ſint inter ſe æquales, & maiores dimidio, ſegmentorũ à quibus auferuntur, conſtat c A G B ſegmentum æquale eſſe ſegmento C H B. Quare additis æqualibus triangulis A B F, C B F erunt tota ſegmenta A G B F, C H B F æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

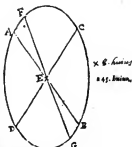
HInc ſequitur à quâuis diametro ellipſim bifariam ſecari: ſit enim diameter quæuis B D, & ducatur per quoduis illius punctum ordinatim A F C, per propoſitionem iam demonſtratam ſegmentum A B F, ſegmento B C F, æquatur, rurſum per eandem propoſitionẽ ſegmentum A D F, ſegmento C D F æquale eſt. ergo ſegmenta A B F, A D F, hoc eſt totum ſegmentum D A B, æquantur ſegmentis B C F, C D F, hoc eſt toti ſegmento D C B; bifariam igitur diuiſa eſt ellipſis à diametro B D.

PROPOSITIO XLVI.

DIametri duæ coniugatæ ellipſim quadrifariam diuidunt, & diametri ellipſim quadrifariam diuidentes, ſunt inter ſe coniugatæ.

Demon-

Demonstratio.



Sint in ABC ellipsi diametri duæ coniugatæ AB, CD. dico illas ellipsim quadrifariam diuidere; & si AB, CD diametri ellipsim quadrifariam diuidant, dico illas esse coniugatas. Quoniam AB, CD diametri sunt coniugatæ, erit AB ordinatim posita ad diametrum DC, vnde etiam AEC, CEB quàm AED, BED sectores sunt æquales; sunt autem & AEC, AED sectores ob eandem rationem æquales; sectores igitur quatuor AEC, CEB, BED, DEA, sunt inter se æquales, & AB, CD lineæ quadrifariam diuidunt ellipsim: Quod erat primum. x 6. huius a 45. huius.

Sit iam ellipsis quadrifariam diuisa, dico AB, CD diametros esse coniugatas. sin verò ducatur ipsi CD, coniugata FG, igitur FEC, sector quadrans ellipseos est per priorem partem huius. Atqui sector AEC ex hypothesi etiam quarta ellipseos pars est, ergo sectores FEC, AEC æquales sunt, pars & totum, quod fieri nequit; igitur FG diameter non est coniugata ipsius CD, nec quæuis alia præter AB. Quod erat demonstrandum.

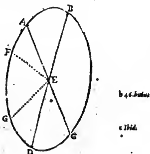
Corollarium.

Hinc patet sectores quarumcumque coniugatarum, æquales esse sectoribus cuiuscunque alterius coniugationis singulos singulis: singuli enim quadrantes sunt ellipseos, & si sectores sint æquales ac latera vnius sint coniugatæ, alterius etiam latera esse coniugatas.

PROPOSITIO XLVII.

Sectores ad verticem oppositi sunt inter se æquales.

Demonstratio.

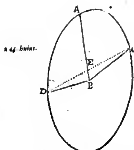


Secent ABC ellipsim diametri quæcunque AC, BD. dico sectores ad verticem oppositos esse inter se æquales. ducantur enim ex E centro diametri duæ EF, EG: & EF quidem coniugata ipsi EB: EG verò coniugata ipsi AE. Quoniam igitur sectores BEF, AEG, b æquales sunt, dempto communi AEF, erit sector AEB, æqualis sectori FEG: rursum cùm sectores FED, GEC c sint æquales, dempto communi DEG, erit sector DEC æqualis sectori FEG, id est AEB ad verticem opposito. eodem modo ostenduntur AED, BEC sectores æquales. igitur, &c. Quod fuit demonstrandum. b 46. huius. c Ibid.

PROPOSITIO XLVIII.

Sit in ADC ellipsi sector quicunque ABC, oportet ex B rectam ad peripheriam ducere, quæ cum AB linea sectorem constituat dato ABC æqualem.

Constructio & demonstratio.



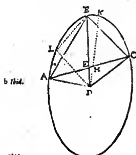
DVcatur ex C ordinatim ad diametrum A B, recta C E D, iungaturque BD. dico factum esse quod petitur. est enim segmentum A E D a æquale segmento A E C, & cùm æquales sint C E, E D, triangulum D E B æquale est triangulo C E B, igitur & sector A B D æqualis sectori A B C. eduximus igitur, &c. Quod fuit faciendum.

a 45 huius.

PROPOSITIO XLIX.

HAbeant A D B, C D B sectores æquales commune latus B D, iunganturque A B, C B. Dico segmenta lineis A B, C B ablata esse inter se æqualia, & si segmenta fuerint æqualia, dico & sectores æquari.

Demonstratio.



IVngantur A, C occurratque A C, linea diametro B D in E, tum si A C non sit diuisa bifariam in E: diuidatur bifariam in H, agaturque per H diameter D K. Quoniam A C, linea ordinatim ducta est ad diametrum D K, erunt A H K, C H K b segmenta æqualia. sunt autem & A H D, C H D triangula æqualia, sectores igitur A D K, C D K inter se æquales sunt, sed ex hypothesi quoque sectores A D B, C D B æquales sunt, igitur sector C D K, æqualis est sectori C D B pars toti. Quod absurdum. quare A H linea non diuiditur in H bifariam: nec in alio puncto quã in E: adeoque igitur A C, linea posita est ordinatim ad diametrum B D. vnde A E B segmentum c est æquale segmento C E B. sunt autem A E B, C E B triangula æqualia, ergo reliquum segmentum A B, æquale est segmento C B quod erat primum.

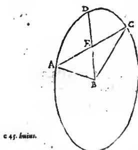
b Ibid.

c Ibid.

Sint iam A B, C B segmenta æqualia & ex A, B, C punctis diametri ponatur A D, B D, C D, dico sectores A D B, C D B, esse inter se æquales. sin verò: fiat C D B sectori æqualis sector d B D L, iunganturque puncta L B. erit igitur L B segmentum æquale segmento C B hoc est A B per hypothesin, adeoque pars æqualis toti. Quod fieri non potest. igitur sector B D L non est æqualis sectori C D B: nec alius quisquam præter A D B sectorem. Quod erat demonstrandum.

d 48. huius.

PROPOSITIO L.



SIt A B C sector quicunque. Dico lineam ex centro ductam, quę A C subtensam diuidit bifariam, sectorem quoque bifariam secare.

Demonstratio.

DVcatur ex B centro diameter B D, secans bifariam A C lineam in E: dico A B D, C B D sectores esse æquales: Cùm enim A C in E diuisa sit bifariam, erunt A B E, C B E triangula æqualia, sed, quia A C est ordinatim posita ad diametrum B D, etiam segmenta e A E D, C E D sunt æqualia, igitur totus sector A B D, sectori C B D æquale est. Quod erat demonstrandum.

e 45. huius.

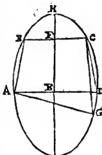
PRO-

PROPOSITIO LI.

Ellipsim ABC secent duæ quæuis parallelæ AD, BC, iunganturq; AB, CD.

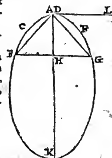
Dico AB, CG segmenta esse æqualia, & si segmenta fuerint æqualia, dico BC, AD lineas æquidistare.

Demonstratio.



Diuisis AD, BC bifariam in F & E agatur per F & E linea FE, occurrens ellipsi in H, erit illa diameter. quare BFH, CFH segmenta ᵃ sunt æqualia. rursum quoniam AE, DE æquales sunt, & segmenta AHE, DHE æqualia erunt: ablatis igitur æqualibus segmentis BHF, CHF remanent segmenta AB, FE, DC, FE æqualia. Deinde quoniam AE, ED sunt æquales, & altitudo communis parallelarum BC, AD, erunt AEFB, DEFC trapezia æqualia, igitur ab æqualibus segmentis ABFE, DCFE, trapezijs, ablatis æqualibus, manent AB, CD reliqua segmenta inter se æqualia. Quod erat primum. a 45. huius.

Sint iam AB, CD segmenta æqualia, iunganturque BC, AD; dico AD, BC lineas æquidistare: sin verò, ducatur ipsi BC parallela AG, iunganturque CG: erit igitur per primam partem huius segmentum AB æquale segmento CG: sed & CD segmentum ex hypothesi æquale est segmento AB; segmenta igitur CD, CG sunt æqualia, quod fieri non potest, cùm punctum G cadat supra vel infra D, adeoque CG segmentum maius vel minus sit segmento CD: igitur AG linea non æquidistat ipsi BC, sed sola AD. Quod erat demonstrandum.



Quod si punctum datum D idem sit cum puncto A, ducatur AL tangens ellipsim in puncto A siue D, (sunt enim A & D iam ex hypothesi vnum idemque punctum) ductâque BG parallela ad AL iunge DG.

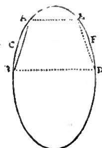
Dico hanc abscindere segmentum DFG æquale segmento ACB.

Ex contactu ducatur diameter AK: igitur BG quia tangenti æquidistat, est ordinatim ᵇ posita ad diametrum AK, adeoque bisecta in H, triangula igitur BAH, GAH æquantur; æquantur verò ᶜ & segmenta BCAH, GFAH. ergo reliqua etiam segmenta BCA, GFA sic GFB æquantur. Factum igitur est quod petebatur. b 13. huius. c 45. huius.

PROPOSITIO LII.

Secet ellipsim recta quæuis AB: auferens ACB segmentum, & detur in peripheria punctum quoduis D, oportet ex D rectam ducere DE, quæ auferat segmentum DEF, æquale segmento ABG.

Con-



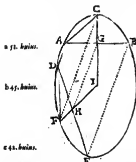
Constructio & demonstratio.

IVngantur B D, & ex A ponatur A E æquidistans B D, iunganturque E D. patet per præcedentem D E F segmentum æquale esse segmento A B C. Igitur ex puncto dato, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LIII.

SEcent A B C ellipsim duæ quæuis lineę A B, D E segmenta auferentes æqualia: diuisis autem A B, D E rectis bifariam in G & H, ducantur per G & H diametri I G C, I H F.

Dico illas in G & H proportionaliter esse diuisas. Et si diametri sint proportionaliter diuisę: dico segmenta esse æqualia.



Demonstratio.

IVngantur A D, B E, A C, D F, G H, C B, F E, C F. Quoniam A C B, D F E segmenta ponuntur æqualia, A D, E B lineæ [a] parallelæ sunt: est autem vt A G ad G B, sic D H ad H E, cùm A B, D E lineæ in G & H diuisæ sint bifariam, igitur & G H linea æquidistat A D, B E. Iam verò cùm A B sit ad diametrum I C ordinatim posita, erunt segmenta A G C, B G C [b] æqualia, adeoque segmentum A G C dimidium segmenti A C B. simili de causa segmentum D F H dimidium est segmenti D F E. Quare cùm tota segmenta A C B, D F E ponantur æqualia, erunt etiam segmenta A G C, D F H, eorum dimidia inter se æqualia. Deinde [c] triangula A C B, D F E maxima sunt eorum quæ segmentis inscribi possunt, & quoniam A D, B E ostensæ sunt parallelæ, etiam [d] inter se æqualia erunt: æquabuntur igitur & eorum dimidia triangula A G C, D F H: quæ si auferas à segmentis æqualibus A G C, D F H, remanent segmenta æqualia A C, D C, ergo C F linea [e] æquidistat rectæ A D hoc est G H: quare vt C G ad G I, sic F H ad H I. Quod erat demonstrandum. Hinc iam veritas conuersæ fit manifesta.

a 51. huius.
b 45. huius.
c 42. huius.
d Coroll. 2. 44. huius.
e 51. huius.

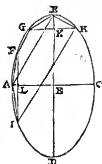
PROPOSITIO LIV.

SIt in A B C ellipsi quæuis diametrorum coniugatio A C, B D, iunctaque A B, ducatur quæuis F G parallela A B; & ex F & G, rectæ ponantur G H, F I ordinatim ad diametros B D, A C.

Dico A C, B D diametros in K & L proportionaliter esse diuisas.

Demon-

Demonstratio.



IVngantur GB, BH, FA, AI, HI. Quoniam AB, GF lineæ æquidistant, erunt GB, a FA segmenta æqualia: sed GB segmento est æquale segmentum HB. (nam segmentũ lineæ GKB æquatur segmento HKB, & triangulum GBK triangulo HBK) & FA segmento ob eandem causam æquatur segmentum AI; igitur & HB segmentum est æquale segmento AI, & HI æquidistat b lineæ AB, hoc est FG. quare totum segmentum GBH, ęquale est toti segmento FAI: adeoque per præcedentem AC, BD diametri in K & L similiter sunt diuisæ. Quod erat demonstrandum.

a 51. huius.

b 45. huius.

c 41 huius.

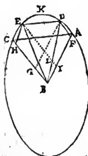
d 51. huius.

PROPOSITIO LV.

IN ellipsi data sit quæcunque diametrorum coniugatio AB, CB, & iungatur AC, cui parallela sit quæuis ED, ex punctis autem D, & E ducantur ordinatim ad diametros DF, EH, DG, EI, erunt igitur figuræ DFBG, EIBH parallelogramma.

Dico parallelogramma illa æqualia esse.

Demonstratio.



QVia per præcedentem BA, BC proportionaliter sunt diuisæ, erit AB ad BF, vt CB ad BH: & permutando vt AB ad CB, sic BF ad BH. similiter AB per præcedentem est ad BI vt CB ad BG, & permutando vt AB ad CB, sic BI ad BG. ergo BF est ad BH, vt BI ad BG. ergo e parallelogramma AG, HI æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

e 14. sexti.

PROPOSITIO LVI.

SInt AB, BC diametri coniugatę; iunctis punctis AC, ducatur ED parallela rectæ AC, tum ex D & E rectę ponantur EI, DF, DG, EH ordinarim ad diametros AB, CB, iunganturque EB, DB.

Dico EBD sectorem, æquari figuræ EIFDKE.

Demonstratio.

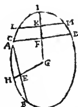
PEr præcedentem parallelogramma FG, HI: & illorum dimidia, triangula DFB, EIB inter se sunt æqualia; ablato igitur communi LIB, erit ELB triangulum æquale trapezio DFIL. quare addita figura communi ELDKE, sector EBD æqualis est figuræ EIFDKE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVII.

SEcent ABC ellipsim duæ quęuis lineę AB, CD, oportet CD lineę parallelam ducere, quę segmentum auferat æquale segmento AHB.

 Constru-

Constructio & demonstratio.



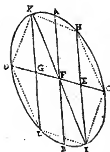
Diuisis AB, CD bifariam in E & F, agantur ex G centro per E & F diametri GH, GI; tum GI diuidatur in K, ficut HG diuifa eft in E, ponaturque per K ordinarim LM, patet per 53. huius LIM, AHB fegmenta effe æqualia; eft autem LM parallela datę CD, igitur dato in ellipfi fegmento, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LVIII.

Secent ABC ellipfim coniugatæ duæ diametri AB, CD. diuifaque CD illarum altera quadrifariam in EG, agantur per E & G rectæ HI, KL æquidiftantes diametro AB, iunganturq; puncta D, K, H, C, I, L, D.

Dico LD, DK, KH, HC, CI, IL lineas fegmenta auferre æqualia.

Demonftratio.



Quoniam KL, HI, funt parallelæ rectæ AB, quæ eft diameter coniugata ipfi DC, erunt KL, HI ordinatim pofitæ ad DC. ergo vt rectangulum DGC ad rectangulum DEC, ita quadratum KG, ad quadratum HE, adeoque cùm rectangula fint æqualia, etiam quadrata erunt æqualia, vnde & rectæ KG, HE æquales funt, funt verò & GF, EF æquales. & anguli KGF, FEI (quòd HI, KL fint parallelæ) æquales funt; igitur KGF triangulum æquale eft triangulo FEI, anguluſque IFE ęqualis angulo GFK, & quia GFE, linea recta eft, anguli IFE, KFG ad verticem conftituti funt æquales: vnde KFI, puncta funt in directum, adeoq; fectores KFD, CFI, funt ad verticem conftituti: quia autem oftendi triangulum KFG, æquari triangulo IFE, & fimili difcurfu oftendi poffit triangulum quoq; DKG æquari triangulo ICE, erit triangulum totum DKF, æquale toti triangulo ICF. Atqui & fectores DFK, IFC ad verticem pofiti [a] funt æquales. Igitur reliqua etiam fegmenta DK, ICinter fe æqualia erunt. codē modo oftenduntur DL, HC fegmenta æqualia. Iterum cùm duo latera KG, GF fint duobus lateribus DG, GL æqualia, & anguli lateribus ęqualibus contenti ad verticē æquales: erunt triangula GKF, DGL inter fe æqualia, & angulus GKF æqualis angulo altero GLD: adeoque KFI, DL lineæ parallelæ. quare [b] DK, LI fegmenta funt inter fe æqualia: eft verò iam oftenfum fegmenta quoque CI, DK æqualia effe, æquantur igitur tria fegmenta DK, LI, CI. vlterius quia DC, LI iungunt ęquales & parallelas GL, FEI, ipfæ etiam erunt parallelæ. vnde rurfum [c] fegmenta CI, DL æqualia funt; æquantur igitur quatuor fegmenta DL, CI, LI, DK. Rurfum quia KH, LI, iungunt KL, HI æquales & parallelas, funt ipſę etiam parallelæ: erunt ergo [d] æqualia etiam fegmenta KH, LI. æquantur igitur quinque fegmenta KH, LI, KD, DL, CI. Atqui etiam oftenfum eft æqualia effe fegmenta HC, DL; æquantur igitur omnia fex fegmenta. Quod fuerat demonftrandum.

[a] 47. huius.
[b] 51. huius.
[c] Ibid.
[d] Ibid.

Vocetur autem figura DKHCIL, ellipfi infcripta, polygonum regulare.

PRO-

PROPOSITIO LIX.

EAdem manente figura propositum sit ellipsi hexagonum regulare inscribere.

Constructio & demonstratio.

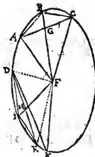
SVmantur duæ quæuis diametri coniugatæ AB, CD, diuisaque CD quadrifariam in E & G, agantur per E & G lineæ HI, KL æquidistantes AB: ducanturque DK, KH, HC, CI, IL, LD: patet per præcedentem: rectas illas segmenta auferre æqualia, adeoque figuram hexagonam DK, HC, ILD, esse regularem; igitur ellipsi hexagonum inscripsimus regulare. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LX.

SEcent ABC ellipsim duæ quæuis lineę AC, DE auferentes segmentà ęqualia, ducanturque ad illarum extremitates semidiametri FA, FC, FD, FE.

Dico sectores AFC, DFE, esse ęquales, & si sectores fuerint ęquales, dico segmenta esse æqualia.

Demonstratio.



DIuisis AC, DE bifariam in G & H agantur per G & H, diametri FB, FI, iunganturque AB, BC, DI, EI. quoniam segmenta AC, DE ex hypothesi sunt æqualia, ergo rectæ, quæ puncta C & E, A & D iungerent, forent [a] parallelæ. ergo [b] triangula segmentis AC, DE inscriptorum maxima, sunt æqualia, sed ABC, DIE, [c] sunt inscriptorum maxima, erunt igitur triangula ABC, DIE, æqualia: quia autem FB, FI diametri in G & H, sunt proportionaliter [d] diuisæ: igitur vt ABC triangulum est ad triangulū AFC, sic DIE triangulum est ad triangulum DFE, & permutando vt ABC triangulum est ad triangulū DIE, sic AFC triangulum est ad triangulum DFE. Cùm igitur triangula ABC, DIE æqualia sint, etiam triangula AFC, DFE æqualia erunt. Quare additis ęqualibus segmentis AC, DE, erunt sectores FAC, FDE æquales.

a 51. huius. b Coroll. 2. 44. huius. c 42. huius. d 53. huius.

Sint iam sectores AFC, DFE æquales, iunganturque AC, DE. Dico ABC, DIE segmenta quoque esse æqualia; sin verò: sit alterutrum (puta) DIE minus altero, ducaturque [e] ex D linea DK, segmentum auferens æquale segmento ABC: & iungantur F, K. Quoniam igitur segmentum DIK æquale est segmento ABC, sector DFK, æqualis est sectori AFC, id est sectori DFE quod fieri non potest; segmenta ergo AC, DE non inæqualia sunt, sed æqualia. Quod erat demonstrandū.

e 52. huius.

Corollarium.

EX hac & ex 53. huius sequitur primò, si AFC, DFE sectores quiuis fuerint æquales, eorumque subtensę in G & H diuisæ bifariam. quod diametri per G & H ductæ, iisdem punctis proportionaliter diuidantur.

Secundò si sectores duo AFC, DFE fuerint æquales, subtendanturque ipsorum anguli rectis AC, DE: quod triangula AFC, DFE sint ęqualia.

Tertiò hinc tale problema soluitur, dato AFB sectore quocunque, oportet ex F

 duas

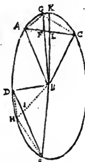
duas educere semidiametros quæ sectorem constituant æqualem sectori AFB: pro constructione iuncta AB, ducatur ex F semidiameter quęcunque FD: tum a ex D recta ducatur DI segmentum auferens æquale segmento AB iungaturque IF, patet IFD sectorem æquari sectori AFB.

a *Ibid.*

PROPOSITIO LXI.

SInt ABC, DBE sectores æquales: iunctisque AC, DE ducatur ex B quæuis linea BG secans AC lineam in F: dein sectori ABG fiat ęqualis sector DBH seceturq; HB linea, rectam ED in I.

Dico tam AC, DE lineas quàm BG, HB in F & I proportionaliter esse diuisas.



Demonstratio.

IVngantur AG, GC, DH, HE. Quoniam ex hypothesi sectores tam ABG, DBH, quàm ABC, DBE sunt æquales, erunt & reliqui GBC, HBE æquales. quare b AGB triangulum æquale triangulo DHB, & triangulum CGB æquale triangulo HEB, quare vt triangulum BAG ad triangulum GCB, sic BDH triangulum ad triangulum BHE, sed (quod facile ex 1.6. est demonstratu) rationes rectarum AF, FC, & DI, IE, eædem sunt cum rationibus triangulorum BAG, GCB, & BDH, BHE. Ergo etiam, AF est ad FC, vt DI ad IE. Deinde cùm trapezia GABC, BDHE æqualia sint (est enim c triangulum BAG, triangulo BDH, & triangulū BGC, triangulo BHE, æquale) sit autem & ACB triangulum d æquale triangulo DEB, erit reliquum triangulū AGC æquale reliquo DHE: igitur vt AGC triangulum ad triangulum ACB, id est e vt GF ad FB sic DHE triangulum ad triangulum DEB id est HI ad IB. Quod erat demonstrandum.

b *Coral. 60. huius.*

c *Ibid.*

d *Ibid.*

e *Facile demonstrat. ex 1.6.*

PROPOSITIO LXII.

SInt iam AC, DE lineæ in F & I proportionaliter diuisæ: aganturq; per F & I semidiametri BG, BH.

Dico ABG, DBH sectores esse æquales.

Demonstratio.

SIn verò: sit alterutor vt ABG minor altero: fiat ABK sector æqualis sectori DBH, seceteque BK linea rectam AC in L. quoniam ABK, DBH sectores sunt æquales: erit per primam partem huius AL ad LC, vt DI ad IE. Atqui etiam AF est ad FC, vt DI ad IE, igitur vt AF ad FC, sic AL ad LC, quod fieri non potest: quia punctum L cadit vltra aut citra F. quare sector ABK non est æqualis sectori DBH nec alius quisquam præter ABG. Quod erat demonstrandum.

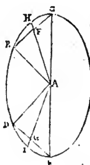
PRO-

PROPOSITIO LXIII.

SInt duę quæuis diametri A B, A C, iunctisque illarum extremitatibus, ducantur duę quæuis aliæ diametri A D, A E sic vt iunctâ D E, sint A B C, A D E triangula æqualia : diuisis autem B C, D E bifariam in F & G, agantur per F & G, diametri A H, A I: quę si in F & G, proportionaliter sint diuisę,

Dico B A C, D A E sectores esse æquales.

Demonstratio.



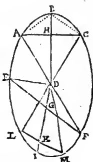
QVoniam A H, A I diametri in F & G proportionaliter sunt diuisę, erunt B H C, D I E segmenta [a] æqualia: sunt autem ex hypothesi triangula A B C, A D E æqualia; sectores igitur B A C, D A E sunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum. a 51. huius.

PROPOSITIO LXIV.

SInt duo sectores D A B C, D E I F, ductisque rectis A C, L M, & bisectis in H & G, ducantur diametri D H B, D G I. Sit autem ratio D G ad D I minor ratione D H ad D B.

Dico sectorem D E I F maiorem esse sectore D A B C.

Constructio & demonstratio.



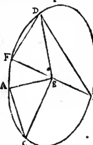
QVoniam D G est ad D I in minori proportione quàm D H ad D B. Fiat D K ad D I, vt D H ad D B, maior igitur erit D K quam D G, & punctum K cadet inter G ac I. per K ducatur ordinatim L K M; iunganturque D L, D M; segmenta igitur L I M, A B C [b] æqualia sunt. Quare sectores etiam [c] D L I M, D A B C sunt æquales, ac proinde sector D E I F maior est sectore D A B C. Quod erat demonstrandum. b 57. huius. c 60. huius.

PROPOSITIO LXV.

SInt A B C, D B E sectores duo inæquales, sic vt A B C, D B E triangula sint æqualia:

Dico A B C, D B E sectores simul sumptos æquari semiellipsi.

Demonstratio.



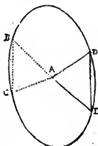
CVm sectores sint ex hypothesi inæquales, sit maior B D G E. quia ergo triangulum D B E ex hypothesi æquatur triangulo B A C, erit segmentum D G E maius segmento A C, abscindatur [d] itaque E G segmentum ipsi A C æquale, iunganturque B G, G D, & E B producta in F ducatur F D. quia igitur segmenta G E, A C æqualia sunt, [e] etiam sectores æquales sunt, adeoque & triangulum G E B, triangulo A C B, hoc est triangulo B D E æquale erit. quare B E, D G sunt parallelæ adeoque [f] segmentum G E, hoc est segmentum A C æquale est segmento D F; sectores itaque B A C, B F D [g] æquantur, d 51. huius. e 60. huius. f 51. huius. g 60. huius.

Atqui

a Coroll. 45. huius. Atqui sectores B F D, B D G E, [a] constituunt semiellipsim, ergo & sectores B C A, B D G E, semiellipsim constituunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.

SVmantur sectores duo B A C, D A E, sic vt triangula A B C, A D E sint æqualia: si sectores illi simul sumpti, maiores fuerint vel minores semiellipsi:



Dico illos inter se æquales esse.

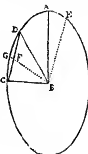
Demonstratio.

SI enim non sint æquales, sit B A C minor sectore D A E: cùm igitur triangula A B C, D A E sint æqualia, erunt B A C, D A E sectores simul sumpti æquales semiellipsi: Quod est contra hypothesim. igitur sectores B A C, D A E non sunt inæquales sed æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVII.

SInt A B, B C diametri coniugatæ, ductaque ex C recta quauis C D, ducatur ex B linea B E parallela rectæ C D. iungaturque D B.

Dico D B C sectorem duplum esse sectoris A B E.



Demonstratio.

DIuisa C D bifariam in F, ducatur diameter B G, & quoniam B E æquidistat ordinatim positæ C D ad diametrum B G, ipsa etiam est posita ordinatim & quidem per centrum, sunt igitur coniugatæ diametri B G, B E. sunt autem ex hypothesi C B, B A etiam coniugatæ. Ergo [b] sector C B A par est sectori G B E, demptoque communi G B A, sectores C B G, A B E æquales erunt. Atqui sector C B D duplus est [c] sectoris C B G. ergo sector C B D duplus quoque est sectoris A B E. Quod erat demonstrandum.

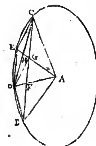
b Coroll. 46. huius.

c 50. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

SI sectores A B D, A D E, A E C sint æquales, ducanturque rectæ D E & B C, secans rectas A D, A E in F & G.

Dico B F, D E, E C esse æquales.



Demonstratio.

DVcantur rectæ B D, E C, D C, D G. Quia sectores A D E, A E C sunt æquales, etiam triangula C H A, D H A [d] æqualia sunt. ergo æquales sunt rectæ D H, H C. Deinde quia sectores A D B, A C E æquales sunt, etiam segmenta [e] B D, E C sunt æqualia. Ergo C B, E D sunt [f] parallelæ. Anguli igitur G C H, E D H, æquantur: sunt verò anguli quoque G H C, D H E æquales

d Coroll. 60 huius.

e 60. huius.

f 51. huius.

les,& iam ostendi æquales etiam esse rectas D H, H C; igitur a C G, E D. æquales sunt. similiter ostendemus B F, D B æquales esse. Constat ergo veritas propositionis. a 26. primi.

PROPOSITIO LXIX.

IIsdem positis producatur D G, donec A C lineæ occurrat in I. Dico A G I, A G C, A E C triangula in continua esse analogia.

Demonstratio.

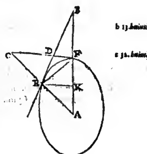
EX superiori demonstratione, in triangulis C H G, E H D, patet omnia esse æqualia, adeoque latera etiam E H, H G sunt æqualia. considerentur modò triangula D H G, B H C, in quibus cùm duo latera D H, H E, duobus lateribus C H, H B æqualia sint, angulusque D H G æqualis angulo C H E, ad basim etiam æquales erunt anguli H G D, C E H, ac proinde D I, C E sunt parallelę: adeoque vt A I ad A C, sic A G ad A E. sed est vt A I ad A C, sic A G I triangulum ad triangulum A G C: & vt A G ad A E sic A G C triangulum ad triangulum A E C: igitur vt A G I triangulum ad triangulum A G C: sic A G C triangulum ad triangulum A E C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXX.

ELlipsim secent binæ diametri A E, A F in punctis E & F, ex quibus ducantur F C, E B tangentes ellipsim, occurrentes diametris in C & B, iunganturque E F.

Dico triangulum A C F triangulo A B E æquale esse.

Demonstratio.



EX puncto E ad A F due ordinatim E K, erit hęc b tangenti F parallela, ideoque triangula A E K, A C F similia sunt, ac proinde duplicatam habent rationem rationis A K ad A F: hoc est quia c A K, A F, A B sunt tres continuæ proportionales, rationem habent quam A K ad A B. sed etiam est vt A K ad A B, sic triangulum idem A E K ad triangulum A E B. ergo triangulum A E K ad triangula A C F, A E B eandem habet rationem; æquantur igitur triangula A C F, A E B: Quod erat demonstrandum. b 13. huius. c 32. huius.

E L-

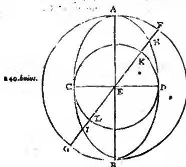
ELLIPSIS
PARS TERTIA

Considerat axium ac diametrorum coniugatarum tam æqualium quam inæqualium proprietates.

PROPOSITIO LXXI.

IN ellipsi diametrorum maxima & minima sunt axes.

Demonstratio.



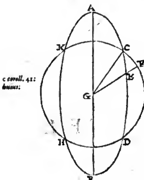
Sint ABC ellipseos axes AB, CD, & AB quidem maior, CD verò minor. dico AB, diametrorum esse maximam, CD verò minimam, centro ellipsis E: interuallo EA circulus describatur AFG: transilit is per B, & reliquo sui totus extra [a] ellipsim cadet: ducatur dein per E diameter quæcunque FG occurrens ellipsi in H & I. circulo autem in F & G. Quoniam circulus AFG totus cadit extra ellipsim, erit FG linea maior rectâ HI: igitur & AB maior est quàm HI. idem ostenditur de quauis aliâ diametro; igitur AB axis maximus est diametrorum ellipsis ABC. Quod erat primum.

a 40. huius.

Rursum centro E interuallo ED circulus describatur DKL occurrens FG lineæ in K & L: transilit is per C, & reliqua sui parte totus intra [b] sectionem cadet, igitur HI linea maior est quàm KL hoc est CD: Quare cùm idem de omnia alia linea quæ per C & D non transit ostendatur, erit CD diameter omnium minima quæ in ellipsi ADB duci possunt. Quod erat demonstrandum.

b coroll. 40. huius.

Corollarium primum.



Diameter quæ maiori axi est propior, illa maior est; & quæ remotior, minor. sit ABC ellipseos axis AB, centrum G: ponaturque GC diameter propior axi quàm GE. dico GC maiorem esse ipsa GE. centro enim G interuallo GC circulus describatur, occurret is [c] ellipsi in quatuor tantùm punctis CKHD. quare GE ad peripheriam non pertingit. vnde minor est quàm GC. Quod erat demonstrandum.

c coroll. 41. huius.

Corollarium secundum.

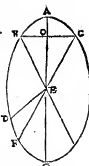
POrrò diameter axi vicinior est, quæ cum axe minorem vel angulum facit vel sectorem. primum patet: alterum è primo sic ostendo. Ellipseos axis maior sit AG faciatque diameter BE cum axe sectorem

BEA

BEA minorem ſectore DEG, quem cum axe facit diameter DE.

Quoniam igitur ſector DEG maior eſt ſectore BEA, fiat ſector FEG æqualis ſectori BEA; & FE occurrat ellipſi in C, ducaturque BOC, ſector BEA æquatur ſectori FEG ex conſtructione hoc eſt [a] ſectori ad verticem AEC. Ergo [b] BC biſecta eſt in O ab axe AG. anguli ergo ad O recti ſunt. patet ergo angulum BEA æquari angulo AEC, hoc eſt angulo FEG, hoc eſt minorem eſſe angulo DEG; liquet igitur ex primo BE quæ ſectorem facit cum axe minorem, axi propiorem eſſe quàm DE, quæ maiorem.

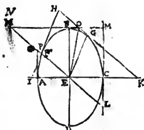
a 19. huius. b 6. huius.



PROPOSITIO LXXII.

Rectangulum ſub dimidijs axibus æquale eſt parallelogrammo ſub ſemidiametris coniugatis.

Demonſtratio.



Sint ABC ellipſis axes AC, BD: centrum E, & quæuis ſemidiametri coniugatæ EF, EG. actiſque per F & G tangentibus quæ conueniant in H, & axi AC occurrant in I & K: ducantur etiam per C & B lineæ quæ ellipſim contingant in C & B: conueniant autem in M: & HK, EF ſecent in O, L, N: tum iunctis punctis EO agatur per A tangens, ſecans EN lineam in P. Quoniam tam NO, KE [c] lineę quàm OK; NE ſibi mutuo æquidiſtant; erit NOKE parallelogrammum, diametro OE diuiſum biſariam: ſunt autem triangula [d] EOB, EOG æqualia, igitur & reliqua triangula EBN, EGK inter ſe æquantur. Rurſum cùm [e] AP, CL lineæ æquidiſtent, & AE, CE lineæ ſint æquales, erit ECL triangulo æquale triangulum EAP hoc eſt [f] EIF. Quoniam igitur triangulum EGK æquatur triangulo EBN, & triangulũ IFE triangulo ECL, proportionalia erunt quatuor illa triangula; ſunt verò etiam ſimilia inter ſe, nimirum EGK ipſi IFE, & EBN ipſi ECL; ergo [g] rectæ KE, EI; NE, EL; proportionales ſunt, quare cùm ſuper proportionalibus indirectùm poſitis conſtituta ſunt triangula IFE, EGK, IHK inter ſe ſimilia & triangula CLE; EBN, LMN inter ſe quoque ſimilia, vt ſunt duo triangula IFE, EGK ad duo triangula LEC; EBN, ita [h] triangulum IHK ad triangulum LMN. Atqui duo triangula IFE; EGK æquantur, vt oſtendi ſupra, duobus LCE, EBN. ergo etiam triangulũ IHK triangulo LMN æquale eſt, ac proinde demptis æqualibus parallelogrammum GEPH ſub ſemidiametris coniugatis, æquatur rectangulo BECM ſub dimidijs axibus contento. Quod erat demonſtrandum.

c 13. huius. d 58. huius. e 15. huius. f 70. huius. g 22. ſexti. h 60. de ll. add.

Corollarium primum.

Hinc ſequitur ſi in ellipſi duæ quæuis ſint diametrorum coniugationes AE, EB, EF, EG. triangula ſuper EA, EB, EF, EG in angulis AEB, FEG, eſſe inter ſe æqualia: ſunt enim dimidia parallelogrammorum æqualium.

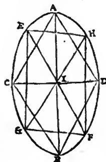
Corollarium ſecundum.

Sequitur ſecundò parallelogramma ſub totis diametris coniugatis, inter ſe eſſe æqualia: cùm ſint quadrupla eorum quę hac propoſitione oſtenſa ſunt æqualia.

PROPOSITIO LXXIII.

IN ellipsi parallelogrammum quod fit à lineis extrema axium coniungentibus æquale est parallelogrammo contento lineis extrema quarumuis diametrorum coniugatarum coniungentibus.

Demonstratio.



SInt ABC ellipseos axes ABCD, & alia quæuis diametrorum coniugatio EFGH Iunganturque tam axium, quàm diametrorum extrema: dico CADB parallelogrammum æquari parallelogrammo EHFG. rectangulum ex AB & DI duplum est trianguli ADB: & rectangulum ex AB & CI, duplum est trianguli ACB. ergo rectangulum ex AB, CD, duplum est parallelogrammi ACBD, siue ACBD parallelogrammum, dimidium est rectanguli super AB, CD. similiter ostendam parallelogrammum EGFH dimidium esse parallelogrammi super EF, GH in angulo EIH: sed parallelogrammum super EF, GH a æquale est parallelogrammo super ABCD; igitur & ACBD parallelogrammum æquale est parallelogrammo EGFH. Quod fuit demonstrandum.

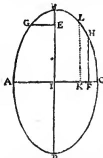
a 72. huius.

PROPOSITIO LXXIV.

SInt ABC ellipseos axes vel diametri coniugatæ, AC, BD. diuisâque BD vtcunque in E, diuidatur AC in F proportionaliter, & per E & F ordinatim ducantur lineæ EG, FH:

Dico rectangulum AFC æquari quadrato GE, & BED rectangulum quadrato HF, & si quadratum GE sit æquale rectangulo AFC. dico BD, AC proportionaliter esse diuisas in E & F.

Demonstratio.



CVm ex hypothesi DE sit ad EB vt AF ad FC, erit permutando DB ad AF, vt BE ad FC. quare & tota DB, ad totam AC, vt DE ad AF, & EB, ad FC. igitur rationes BE, ad FC, & DE ad AF, simul sumptę duplicatæ sunt rationis DB ad AC. Atqui ratio rectanguli BED ad rectangulum AFC, componitur ex rationibus BE ad FC, & DE ad AF. ergo ratio rectanguli BED ad rectangulum AFC duplicata est rationis BD ad AC, hoc est rationis BI ad AI. ergo rectangulum BED est ad rectangulum AFC, vt quadratum BI ad quadratum AI. sed idem quoque rectangulum BED est ad quadratum GE, vt rectangulũ BID, hoc est, quadratum BI, ad quadratum AI; æquantur igitur quadratum GE & rectangulum AFC. similiter ostendemus rectangulum BED & quadratum HF æqualia esse.

Sint iam æqualia quadratum GE & rectangulum AFC: dico BD, AC proportionaliter esse sectas: Nam si non est vt BE ad ED, sic AF ad FC, sit vt BE, ad ED, sic AK ad KC. Erit ergo quadratum GE æquale rectangulo AKC. per primam

mam partem huius: Quod fieri non potest, cùm quadratum G E ex hypothesi sit æquale rectangulo A F C. Non igitur A C in K aut alibi quàm in F erit secta proportionaliter ad B D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXV.

Si axes aut diametri coniugatę sint proportionaliter sectæ in E & F, & ordinatim ducantur E G, F H.

Dico quadratum F H esse ad quadratum E G, vt quadratum B D, ad quadratum A C.

Demonstratio.

Quadratum F H [a] æquatur rectangulo B E D, sed rectangulum B E D est ad quadratum E G vt rectangulum B I D, hoc est quadratum B I, ad quadratum I A. ergo etiam quadratum F H est ad quadratum E G, vt quadratum B I ad quadratum I A, hoc est, vt quadratum B D ad quadratum A C. Quod erat demonstrandum. [a 74. huius.]

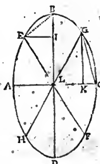
Quod si ad diametros coniugatas ordinatim positę sint E G, F H, & sit vt quadratum B D ad quadratum A C, ita quadratum F H ad quadratum E G: Dico B D, A C proportionaliter esse sectas in E & F. si enim negas esse A F ad F C, vt D E ad E B, fiat A K ad K C, vt D E ad E B, & sit ordinatim K L. ergo vt quadratum B D ad quadratum A C, sic quadratum K L ad quadratum E G: quod fieri non potest, cùm ex hypothesi quadratum F H sit ad quadratum E G, vt quadratum B D ad quadratum A C. non igitur est vt quadratum B D ad quadratum A C, ita quadratum K L, aut quoduis aliud præter quadratum F H, ad quadratum E G. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVI.

Sint in A B C ellipsi duæ quæuis diametrorum coniugationes A C, B D; E F, G H; ducanturque ex E & G lineæ E I, G K ordinatim ad diametros B D, A C.

Dico E I quadratum, æquari rectangulo A K C, & B I D, rectangulum æquale esse quadrato G K.

Demonstratio.

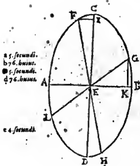


Ponantur E B, G C. Quoniam igitur tàm A C, B D, quàm E F, G H diametri sunt coniugatæ, erit [b] sector B L C æqualis sectori E L G, & dempto communi B L G, sector E L B æqualis sectori C L G. adeoque & L E B triangulum [c] æquale triangulo L G C: & quia B D est coniugata ipsi A C, erit B D parallela ad K G quæ est ordinatim posita ad A C. ergo angulus G K L æqualis angulo B L A. similiter quia A C est coniugata ipsi B D, erit A C parallela ipsi E I ordinatim positæ ad B D; angulus ergo E I B æqualis est angulo B L A hoc est angulo G K L; igitur cum triangula sint æqualia, erit (vt infra ostendam) vt basis L B ad basim L C, ita K G ad E I, adeoque vt quadratum B L ad quadratum L C, hoc est vt quadratum B D, ad quadratum A C, sic quadratum K G ad quadratum E I. vnde B D, A C lineæ in I & K [d] proportionaliter sunt diuisæ. quare E I quadratum [e] æquale rectangulo A K C, item B I D rectangulum æquale quadrato G K. Quod fuit demonstrandum. [b Corol. 46. huius.] [c Coroll. 60. huius.] [d 75. huius.] [e 74 huius.]

PROPOSITIO LXXVII.

Axium quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis cuiuscunque coniugationis simul sumptis.

Demonstratio.



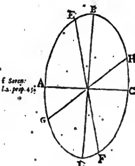
a 5. secundi.
b 76. huius.
c 5. secundi.
d 76. huius.
e 4. secundi.

Sint ABC ellipseos axes AB, CD, & alia quæuis diametrorũ coniugatio FH, GL. dico AB, CD quadrata simul sumpta æquari quadratis FH, GL simul sumptis. ducantur ordinatim lineæ FI, GK quæ, quia ad axes ducuntur, perpendiculares erunt; centrum autem sectionis ponatur E. Quadratum EC [a] æquale est quadrato EI vnà cum CID rectangulo id est [b] quadrato GK: quadratum autem EB [c] æquale est quadrato EK vnà cum rectangulo AKB id est [d] quadrato FI: vnde quadrata duo EB, EC simul sumpta æqualia sunt quadratis FI, IE, EK, GK, simul sumptis. sed iisdem quadratis æqualia sunt quadrata FE, EG, quadratis igitur EF, EG æqualia sunt quadrata EB, EC. quare cùm AB, CD quadrata simul sumpta [e] quadrupla sint quadratorum EB, EC & FH, GL quadrata quadrupla quadratorum EF, EG; patet AB, CD quadrata simul sumpta æquari quadratis FH, GL simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVIII.

Axes ellipseos simul sumpti minimæ sunt omnium diametrorum coniugatarum simul sumptarum.

Demonstratio.



f Seren. l. 1. prop. 45.

Sint axes AC, BD & quæuis diametrorum coniugatio, EF, GH: dico axes simul sumptos minores esse diametris coniugatis simul sumptis. Quoniam AC, BD quadrata simul sumpta, æqualia sunt quadratis EF, GH simul sumptis: sit autem & BD maxima diametrorum, AC verò minima, erunt [f] AC, BD simul sumptæ minores rectis EF, GH: igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

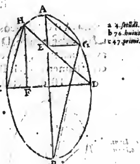
PROPOSITIO LXXIX.

Sint ABC ellipsis axes AB, CD, diuisi proportionaliter in E & F: ductisque ordinatim (quę hîc sunt perpendiculares) lineis EG, FH: iungantur AG, GB, CH, HD:

Dico quatuor quadrata AG, GB, CH, HD, simul sumpta, æquari duobus axium quadratis.

Demon-

Demonstratio.



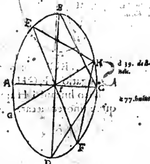
Quadratum AB æquale est [a] quadratis AE, EB vnà cùm rectangulo AEB id est [b] quadrato HF bis sumpto: quadratum verò CD æquale est quadratis CF, FD, & CFD rectangulo id est quadrato EG bis sumpto, sed ijsdem [c] quadratis æqualia sunt quadrata AG, GB, CH, HD. igitur axium quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis AG, GB, CH, HD. Quod erat demonstrandum.

a 4. secundi.
b 76. huius.
c 47. primi.

PROPOSITIO LXXX.

Quadrata linearum extrema axium coniungentium æqualia sunt quadratis linearum quæ extrema cuiusuis coniugationis coniungũt.

Demonstratio.



Sint ABC ellipseos axes AC, BD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH. iunganturque BC, CD, EH, FH. dico quadrata BC, CD simul sumpta æquari quadratis EH, FH simul sumptis. quadrata BC, CD simul sumpta [d] æqualia sunt quadratis BI, IC bis sumptis: quadrata autem EH, HF æquantur quadratis EI, IH bis sumptis: sed quadrata EI, IH simul sumpta [e] sunt æqualia quadratis BI, IC simul sumptis; igitur quadrata BC, CD simul sumpta, æqualia sunt quadratis EH, HF simul sumptis, Quod erat demonstrandum.

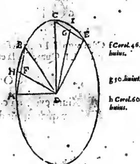
d 39. de Ahuic.
e 77. huius.

PROPOSITIO LXXXI.

Secent ABC ellipsim, cuius centrum D duæ diametrorum coniugationes AD, DC, BD, DE, iunctisque punctis AB, CE diuidantur AB, CE lineę bifariam in F & G, ducanturq; DF, DG quæ productæ occurrant ellipsi in H & I.

Dico HD, ID diametros esse coniugatas.

Demonstratio.



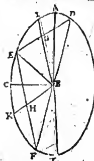
Quoniam AD, DC, BD, DE, diametri sunt coniugatæ, erunt [f] ADC, BDE sectores æquales: ablato igitur communi BDC, erunt ADB, CDE reliqui æquales: rursum cùm AB lineam secet in F, bifariam diametet DH, eruntetiam ADH, BDH [g] sectores, quæ AFD, BFD triangula æqualia. eodem modo ostenditur EDI sector æqualis sectori CDI, sectores igitur ADH, EDI sunt æquales inter se: Addito igitur communi HDI, erit sector ADI æqualis sectori HDE, coniugatæ ergo [h] sunt DH, DI.

f Corol. 46. huius.
g 50. huius.
h Corol. 60. huius.

PROPOSITIO LXXXII.

Sint ABC ellipseos axes AB, CD, sit autem & alia quæuis diametrorum coniugatio, DF, EB; quas iungant DE, FE; DE quidem secans axem maiorem, EF verò minorem: ipsas deinde DE; FE bifariam secent diametri BGI, BHK.

Dico IB diametrum maiorem esse diametro KB.



Demonstratio.

Quoniam diametri BI, BK bisecant rectas ED, EF sectores ambo [a] DBE, EBF bisecantur. Quare cùm [b] ipsi æquales sint, etiam ipsorum sectores dimidij IBD, KBF æquales erunt. sector igitur IBD minor est sectore KBL; ergo sector IBA multò minor sectore KBL. ergo IB [c] propior axi est quàm BK, ac proinde maior quàm BK. Quod erat demonstrandum.

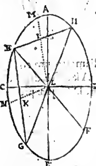
a 50. huius. b 46. huius.

c Coroll. 2. 69. huius.

PROPOSITIO LXXXIII.

Sint ABC ellipseos axes AB, CD, & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH, iunganturque EH, EG.

Dico lineam EH quæ axem maiorem secat, minorem esse lineâ EG, quæ minorem secat.



Demonstratio.

EH, EG diuidantur bifariam per diametros LM, LN, in I, & K. Quoniam GH, EF sunt coniugatæ; [d] sectores GLE, ELH æquales erunt, ac proinde [e] segmenta GNE, EMH æqualia sunt. Quare LM, LN bisecantes subtensas EH, EG, proportionaliter [f] sunt diuisæ. Ergo MI ad IL, vt NK ad KL; & cōponendo ac permutando vt LM ad LN, sic LI ad LK; sed LM [g] maior est quàm LN; ergo LI etiam maior quàm LK. Iam verò cùm LN, LM etiam [h] sint coniugatæ, & EG sit ordinatim ex constr. posita ad LN, erit LM parallela ad EK. ob similem causam LN, EI parallelæ erunt; parallelogrammum igitur est EI, LK, adeoque LI, KE, LK, EI; æquantur. Cùm ergo LI ostensa sit maior esse quàm LK, erit & KE maior quàm LK, hoc est quàm EI. Quare dupla eius EG, maior duplâ EH. Quod erat demonstrandum.

d 46. huius. e 60 huius.

f 53. huius.

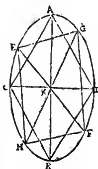
g 82. huius. h 81. huius.

PROPOSITIO LXXXIV.

Axium extrema coniungentes simul sumptæ maximæ sunt omnium quæ quarumuis diametrorum coniugatarum coniuertunt extrema.

Demon-

Demonstratio.



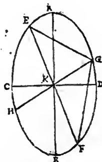
Sint axes AB, CD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: iunganturque extrema tam axium, quàm aliarum diametrorum. dico lineas CA, AD, DB, BC simul sumptas maiores esse lineis FG, GF, FH, HE simul sumptis. Quoniam CK ipsi HK æqualis est, EK verò communis, & EH [a] recta maior quàm EG, erit angulus EKH, maior angulo EKG: igitur & angulus EKH maior est recto AKC. sunt autem [b] AKC, EKH triangula æqualia, quare & EH [c] est maior quàm AC: eadem modo ostenditur AC linea maior esse rectâ EG. ergo EG minima est, & EH, maxima linearum EH, AC, AD, EG. igitur cùm [d] EH, EG quadrata simul sumpta sint æqualia quadratis AC, AD simul sumptis, erunt [e] EH, EG lineæ simul sumptæ minores lineis AC, CD simul sumptis. eodem modo ostenduntur lineæ GF, FH minores lineis CB, BD. ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 83. huius.
b sup. ex 73. huius.
c Ex elem.
d 80. huius.
e Seren. l. 2. prop. 45.

PROPOSITIO LXXXV.

In nulla ellipsi est inuenire diametros coniugatas quæ sese ad rectos secent, præter axes.

Demonstratio.



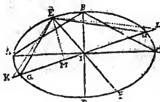
Sint axes, AB maior, CD minor & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: centrum autem ellipsis sit K. dico neutrum angulorum EKG, GKF rectum esse: iungantur enim puncta EG, GF: Quoniam EK, KG duabus rectis FK, KG æquales sunt, & EG [f] minor quàm FG, erit angulus EKG minor [g] angulo GKF: Quare cùm eorum summa sit duobus rectis æqualis, neuter illorũ rectus est: idem de alijs omnibus ostenditur: igitur in nulla ellipsi est inuenire, &c. Quod erat demonstrandum.

f 83. huius.
g Ex elementis.

PROPOSITIO LXXXVI.

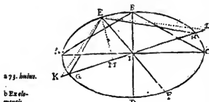
Sint ABC ellipsis axes AC, BD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: iunctisque punctis AB, BC, rectæ ducantur EH, EG.

Dico angulum ABC qui circa minorem axem existit, maiorem esse angulo GEH, ac proinde maximum esse omnium angulorum qui continentur à lineis extrema diametrorum coniugatarum coniungentibus.



Demon-

Demonstratio.



CVm GH linea minor sit axe AC, producatur vtrimque equaliter in K & L vt LK, sit æqualis axi AC, iunganturque puncta EK, EL, & ex E demittatur EM normalis ad LK: erit igitur KEL triangulum maius triangulo GEH id est triangulo ᵃ ABC; quare cùm inæqualium triangulorũ bases AC, LK sint æquales, erit EM ᵇ altitudo trianguli KEL, maior IB altitudine trianguli ABC: adeoque ᶜ angulus KEL maior angulo ABC: angulus igitur GEH multò minor est angulo ABC. Quod erat demonstrandum.

a 73. huius.

b Ex elementis.

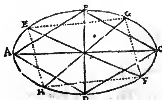
c Ex elementis.

PROPOSITIO LXXXVII.

SInt ABC ellipseos axes AC, BD: iunganturque illorum extrema AB, BC, CD, DA: sit autem & alia quæcunque diametrorum coniugatio EF, GH, quarum extrema quoque coniungantur.

Dico angulos ABC, EGF, HFG, BCD arithmeticè esse proportionales.

Demonstratio.



QVoniam tam AC quàm EF parallelogrammum est, erunt tam ABC, BCD anguli, quàm EGF, GFH duobus rectis æquales: quare & anguli ABC, BCD, simul sumpti æquantur angulis EGF, GFH simul sumptis ᵈ est autem angulus ABC, ostensus à maior angulo EGF, igitur & GFH maior est angulo BCD: & quia, vt iam ostendi, anguli B, & C simul sumpti æquantur angulis G, & F, simul sumptis quo excessu ABC angulus superat angulum EGF, eodem necesse est vt angulus GFH superet angulum BCD. Quod erat demonstrandum.

d 86. huius.

Corollarium.

HInc patet angulum BCD qui circa axem maiorẽ existit, minimum esse omnium angulorum qui fiunt à lineis diametrorum coniugatarum extrema coniungentibus.

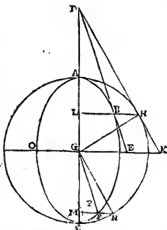
PROPOSITIO LXXXVIII.

ELlipsim ABC cuius axes AC, EG contingat in B recta quædam DE conueniens cum vtroque axe in D & E: ex centro verò G recta demittatur GF parallela lineæ DE.

Dico DB, GF, BE lineas esse in continua proportione.

Demon-

Demonstratio.



CEntro G, interuallo A G circulus describatur A H C: & ex D linea demittatur D K contingens circulum in A occurrens E G axi ellipseos in K, ductâque ex H linea H L normali ad axem quæ per Coroll. 33. huius transit etiam per B, agatur per F normalis alia F M N, iunganturque puncta N G, H G. Quoniam L H, M N lineæ æquidistant, erunt anguli L D B, M G F æquales: sunt autem & anguli B L D, F M G recti per constructionem; igitur & reliquus L B D, reliquo M F G æqualis est. quare anguli D B H, G F N inter se æquantur. Quia autem triangula D L B, G M F sunt similia, erit vt L B ad M F, sic D B ad G F. sed ex demonstratis in scholio quartæ huius, vt L B ad M F, sic B H ad F N. ergo D B ad G F, vt B H ad F N. quare cùm anguli D B H, G F N iam ostensi sint æquales, a similia erunt triangula D B H, G F N. ergo H D est ad B D, hoc est H K est ad B E, vt G N ad G F. & permutando vt H K ad G N, sic B E ad G F. Deinde cùm in triangulo D G K angulus ad G rectus sit & G H ex centro ad contactum ducta, normalis ad D K, b erit H K ad G H, vt G H ad H D. sed G N, G H æquantur. ergo, vt K H ad G N, hoc est sicut ante ostendi, vt B E ad G F, sic G N ad D H. sed ob similitudinem triangulorum vt G N ad D H, sic G F ad D B. ergo, vt B E ad G F, sic G F ad D B. Quod erat demonstrandum.

a 6. sexti.

b 8. sexti.

PROPOSITIO LXXXIX.

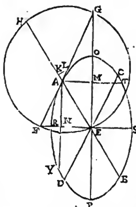
IIsdem positis si G F sit proportionalis media inter D B, B E. Dico punctum F esse ad ellipsim.

Demonstratio.

SI punctum F non est ad ellipsim, occurrat ergo ellipsis rectæ G F in P, supra vel infra F. Ergo per præcedentem D B, G P, B E sunt continuè proportionales; quod fieri non potest, cùm D B, G F, B E ponantur continuę. Non igitur aliud punctum rectæ G F ad ellipsim est, quàm F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XC.

DAta quauis diametrorum coniugatione, ellipseos axes reperire.



Constructio & demonstratio.

SInt datæ diametri coniugatæ A B, C D secantes se bifariam in E; actaque per A linea F G quę æquidistet C D, fiat vt A E ad E D, sic E D ad A H: tum E H diuisa bifariam in K, erigatur ex K normalis K L occurrens F G in L, dein centro L interuallo L E circulus describatur E F G, transibit hic per H secabitque F G lineam in punctis quibusdam F & G: iungantur demum puncta F F, E G. dico lineas E F, E G satisfacere petitioni. Quoniam enim rectæ A E, E D, A H sunt ex constructione in continua analogia, erit quadrato E D æquale rectangulum E A H, hoc est F A G rectangulum. itaque G A, D E, F A rectæ in continua etiam sunt analogia, ac [a] proinde, erit punctum D ad ellipsim cuius axes sunt in lineis E F, E G. sed & A in eadem est ellipsi, igitur & B, C puncta, in eadem erunt ellipsi.

a 89. huius.

Porrò termini axium ita inuenientur: ductis A M, A N normalibus ad E G lineam, inueniatur inter E M, E G media E O, & inter E N, E F media E R: describaturque per D, A, C puncta ellipsis; quoniam C D ipsi A B est coniugata, adeoque ad ipsam ordinatim posita & F G linea æquidistat ipsi C D, erit F G tangens [b] ellipsim A B C: sunt autem A M, A N normales ad lineas in quibus axes sectionis existunt; & tam E M, E O, E G, quàm E N, E R, E F continuæ, igitur [c] ellipsis A B C transit per puncta R O: quare R & O termini sunt axium, quos oportuit exhibere.

b 19. huius.
c Patet ex 51. huius.

Scholion.

Propositum est hoc problema à Pappo, lib. 8. Mathem. Collect. prop. 14. ac veram quidem eius constructionem eam nempe quam ex illo nos iam attulimus, sed non demonstrat. Fredericus Commandinus demonstrationem supplere conatus est, ita scribens:

Producatur A M vsque ad T ita vt T M ipsi M A, sit æqualis: producatur etiam A N vsque ad Y vt Y N sit æqualis N A: erunt puncta T Y in ellipsi, ex ijs quæ demonstrata sunt ab Apollonio in propos. 47. 2. lib. Conic. sed R S parallela est ipsi A T, est enim angulus in semicirculo rectus, quare & O P ipsi A Y parallela erit. Quoniam igitur C D ad A B ordinatim est applicata quę per A ipsi D C parallela ducitur, videlicet F G sectionem in puncto A continget, & cum F G sectionem contingens diametro occurrat in G & A M ordinatim applicetur, erit per 37. prim. Coni. Apollon. rectangulum G E M æquale quadrato ex E O vel E P. Eadem quoque ratione cùm A N ordinatim applicetur rectangulum F E N quadrato ex E R vel E S æquale est; ergo O P, R S ellipsis coniugati axes erunt.

Hac Commandinus, quibus rectè ostendit O P *&* R S *coniugatos axes esse ellipsis, quæ per puncta* A T Y *incedit, & à linea* F G *in puncto tangitur: verùm hoc propositum non fuit. Nam ad inueniendum eiusmodi coniugatos axes non opus erat ad describendum circulum* F E G, *facere rectangulum* E A H *quadrato* E D *æquale, & secare* E H *bifariam in* K *indeq; normalem excitare; quæ congrediens cum* F G *in* L, *centrum praberet* L *circuli* F E G, *sumpto siquidem in linea* F G *centro quocumque, si per* E *circulus circumducatur, qui secet lineam* F G: *non iam quidem in punctis* F *&* G *sed in aliis quæ ex* E *recta emittentur angulum rectum continebunt, non secus ac* E F *&* E G, *quare si ab* A *ad has ipsas postremo ductas lineas, normales ducantur, quales erant* A M *&* A N, *duplicenturq; vt* A T *&* A Y, *erunt puncta quæ vices punctorum* T *&* Y *subibunt in ellipsi, quæ per* A *incedit, tangiturq; ab* F G *in* A, *axesq; habet in normalibus illis, quæ ex* E *ad communes insectiones circuli & lineæ* F G *infinitæ destinantur. At perspicuum est hanc ellipsin (quod fuerat demonstrandū)*

per

per puncta C *&* D *minimè transire, propterea quod circuli centrum aliud ab* L *assumptum sit, nec sit quadratum* E D *rectangulo sub* E A, *& alia linea quàm* A H *contentum æquale. Itaque vt ostendatur* O P *&* R S *coniugatos axes esse ellipsis, quæ per terminos diametrorum coniugatarum* A B, *&* C D *incedit, alia ratio est ineunda, quàm in demonstratione nostra iam proposuimus.*

Hac hactenus super Commandini demonstratione.

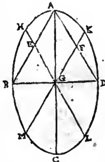
Cæterùm ipse Pappi textus temporum iniuriâ nescio quid infortunij passus videtur, ita enim habet: Facile autem est inuentis quibuscumque coniugationibus diametrorũ ellipsis, axes eius organicè inuenire. quod quidem hac ratione fiet. *Quæ verba legitimum sensum non habent, cùm ea, quam adfert constructio non organica, sed omnino Geometrica sit, vti eam legenti satis patet: quare puto omissum verbum Geometricè, sicq. legendum* : Facile autem est inuentis quibuscumque coniugationibus diametrorum ellipsis, axes eius organicè inuenire. quod quidem Geometricè hac ratione fiet. *Deinde addita sunt in ipsa constructione illa verba*: cùm sit D E maior quàm E A: *cùm enim constructio vniuersalis sit, siue* D E *minor siue maior, siue ipsi* E A *æqualis ponatur, vt ex nostra demonstratione colligi potest, quodq. Pappum etiam latere nullo modo potuisse certum est, frustra assumitur* D E *maior ipsa* E A. *Mirum proinde est hunc errorem Fredericum Commandinum non aduertisse, præsertim cùm illo assumpto in demonstratione sua, quam superiùs dedimus, vsus non fuerit: sed vniuersalem attulerit demonstrationem: vnde cùm & ipsa desit demonstratio, quam quin Pappus addiderit, dubium non est. satis manifestum est eorum errore id contigisse, in quorum manus venit hæc propositio (quæ pene tota, vt existimo, interciderat:) qui eam planè iam mutilam & imperfectam, frustra restituere conati sunt.*

PROPOSITIO XCI.

DAtis axibus in ellipsi, æquales diametros coniugatas exhibere.

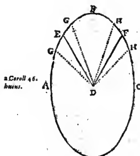
Constructio & demonstratio.

SInt A B C ellipsis axes A C, B D: oporteat autem exhibere diametros coniugatas æquales: iunctis A B, A D; diuidantur rectæ A B, A C bifariam in E & F; & per E & F ex G centro rectæ ducantur G H, G K, occurrentes ellipsi in H, K, L, M punctis. dico illas satisfacere propositioni. Quoniam enim rectæ duæ E B, B G, æquales sunt duabus lineis F D, D G (sunt autem & anguli, æqualibus lateribus contenti inter se æquales) erunt etiam anguli ad basim, E G B, F G D adeoque & reliqui A G E, A G F æquales. Rursum cùm angulus A G B sit rectus & basis A B in E diuisa bifariam, si centro E interuallo E A describatur circulus, transibit is etiam per B, adeoque E A, E G lineæ erunt æquales. Quare & angulus E A G, æqualis angulo E G A, hoc est A G F. ergo A B, K M lineæ parallelæ: eodem modo ostenduntur rectæ A D, H L parallelæ: vnde cùm diametri H L, K M mutuas parallelas bisecent, erunt coniugatæ. quia verò angulus H G A est angulo A G K ostensus æqualis, erit quoque H G linea æqualis G K, vt patet ex 18. huius. ergo H L, K M diametri sunt coniugatæ & æquales. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.



PROPOSITIO XCII.

IN vna ellipsi duas tantùm est reperire diametros coniugatas æquales.



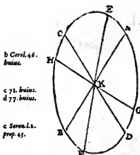
Demonstratio.

a Coroll 46. huius.

SIt ABC ellipsis centrum D & in ea æquales diametri coniugatæ ED, FD: dico alias diametros coniugatas & æquales in ea exhiberi non posse: sint enim, si potest fieri, præter ED, FD diametros; aliæ æquales & coniugatæ GD, HD: erit igitur a EDF sectori æqualis sector GDH. Quod fieri non potest, nam GD, HD diametri cùm sint æquales necesse est maiores vel minores illas esse diametris ED, FD, adeoq; ambas simul cadere supra vel infra diametros ED, FD. Igitur præter ED, FD diametros cõiugatas æquales, nullas alias æquales in ellipsi est exhibere. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCIII.

IN ellipsi æquales diametri coniugatæ simul sumptæ, maximæ sunt omnium diametrorum coniugatarum simul sumptarum.



Demonstratio.

b Corol. 46. huius.

c 71. huius.

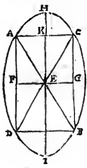
d 77. huius.

e Seren. l. 2. prop. 45.

SInt AB, CD diametri coniugatæ æquales, sit autem & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: dico diametros AB, CD simul sumptas maiores esse diametris EF, GH simul sumptis; cùm enim sectores AKC, GKE b sint inter se æquales, necesse est vnam coniugatarum inæqualium (sit EF) axi viciniorem esse vtrauis æqualium AB, CD: alteram verò HG, remotiorem. vnde c ex quatuor diametris EF maxima, & GH minima est. sunt autem EF, GH d quadrata simul sumpta æqualia quadratis AB, CD simul sumptis; igitur AB, CD lineæ simul sumptæ maiores e quoq; sunt lineis EF, GH simul sumptis: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCIV.

LIneæ quæ extrema diametrorum coniugatarum æqualium coniungunt, ab axibus bifariam secantur.



Demonstratio.

SInt AB, CD diametri coniugatę æquales, iunganturque illarum extrema AD, AC, CB, DB. Dico illas ab axibus bifariam secari, diuisa enim AD bifariam in F, agatur per E centrum FEG occurrens CB rectæ in G. Quandoquidem ergo AB, CD ponantur æquales, harum dimidiæ AE, DE, etiam sunt æquales. æquantur autem ex const. similiter AF, DF. Itaque in triangulis AEF, DEF cùm FE sit commune, omnia latera sibi inuicem æquantur. ergo anguli ad F ęquales, adeoque recti: & anguli quoque FEA, FED, æquales. Quare anguli etiam GEC, GEB prioribus ad verticem oppositi æquantur. sunt verò latera rursum CE, EB æqualia & EG commune vtrique triangulo GEC, GEB. Igitur

tur C G, B G æquales, & anguli ad G æquales adeoque recti. Cùm ergo F G rectas A D, C B, (quæ per 19. huius sunt parallelæ) bifariam & ad angulos rectos secet, axis est, secantur igitur ab axe bifariam rectę A D, C B extrema coniugatarum æqualium connectentes. Eodem modo ostendemus reliquas duas A C, B D ab axe H I bisecari. constat ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XCV.

Si lineæ quæ extrema coniugatarum connectunt, ab axibus secentur bifariam:

Dico diametros illas esse inter se æquales.

Demonstratio.

POnatur eadem figura quæ priùs, sintque A D, C B, A C lineæ, extrema coniugatarum connectentes in F G & K bifariam & ad rectos diuisæ axibus H I, F G. dico A B, C D, diametros coniugatas esse inter se æquales: cùm enim A D, C B per 19. huius sint parallelæ & ex hypothesi ab axe in F & G bisecentur, anguli ad F, recti sunt, & latera duo. A F, F E æqualia sunt lateribus D F, F E; reliqua igitur latera A E, E D quoque inter se æqualia. similiter ostendam C E, E B æquales. vnde & totę diametri A B, C D æquales. Quod fuit demonstrandum.

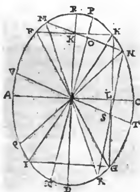
Corollarium.

HInc patet lineas, quæ inæqualium coniugatarum extrema coniungunt, nunquã ab axibus aut alia quauis diametro bifariam & ad rectos secari.

PROPOSITIO XCVI.

LInearum quę extrema coniugatarum quarumuis coniungunt, illa maxima est quæ coniugatas æquales connectens, axem minorem secat; minima, quæ maiorem.

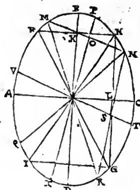
Demonstratio.



SInt A C, B D axes ellipseos A B C; coniugatæ verò æquales F G, H I iunctaque F H maiori axi occurrat in K: & H G minori in L. dico H G lineam maximam esse illarum quæ cuiuscunque coniugationis extrema coniungunt, & F H minimam. Fiat enim quæuis alia diametrorum coniugatio M R, N Q. quarum extrema iungant M N, N R, quibus in O & S bisectis ducantur per centrum X O P, V S T. Quoniam ergo F G, H I sunt coniugatæ, sectores E F B H, [a] E H C G æquantur. Ergo [b] segmenta F B H, H C G æqualia sunt. Quare, cùm axes B D, A C etiam bisecent [c] rectas F H, H G, quæ æquales coniugatas iungunt, erunt axes ipsi [d] in K & L, proportionaliter secti. Ergo [e] rectangulum B K D æquale est quadrato L H. simili planè discursu ostendemus rectangulum P O X æquari quadrato N S. Deinde quia [f] sectores M E N, F E H æquantur, adeoque [g] segmenta M P N,

a 46. huius.
b 60. huius.
c 94. huius.
d 53. huius.
e 74. huius.
f Coroll. 46. huius.
g 60. huius.

a 35. huius.



M P N, F B H, suntque ambæ F H, M N bisectæ in K & O, erunt ª D B, X P proportionaliter secta in K & O; sed D B axis maior est quàm X P. Ergo rectangulū B K D, hoc est, vt antè ostendi, quadratum H L, maius est rectangulo P O X, hoc est quadrato N S. Ergo recta H L maior rectà N S. sed H G dupla est ipsius H L, vt antè ostendi, & N R ex const. ipsius N S dupla est. ergo H G maior quàm N R; quia autem N R ᵇ maior est quam M N; erit H G etiam maior quàm M N. Eodem modo ostendemus H G maiorem esse quatumuis aliarum coniugatarum extrema connectentibus. ergo H G est omnium maxima, quod erat primum.

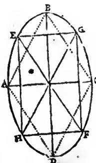
Quod autem F H sit omnium minima, discursu planè simili demonstrabimus. sumatur enim quæuis alia diametrorum coniugatio M R, N Q, & eadē, quæ suprà est adhibita, repetatur constructio, eodem modo ostendemus quadratum F K minus esse quadrato M O, & rectam F K minorem rectà M O, ac proinde F H, minorem quàm M N. est autem ᶜ R N maior quàm M N. ergo F H etiam minor est quàm N R. Atque ita demonstrabimus F H minorem esse quatumuis coniugatarum extrema connectentibus. omnium igitur minima est. Quod erat secundo loco ostendendum.

c Ibid.

PROPOSITIO XCVII.

Coniugatarum æqualium extrema coniungentes simul sumptæ minimę sunt omnium quę quascunq; diametros coniugatas coniungunt.

Demonstratio.



d 80. huius.

e Ser. lib. 2. prop. 45.

Sint in A B C ellipsi coniugatæ æquales E F, G H. ponatur autem & alia quæuis diametrorum coniugatio, E F, G H. dico lineas quæ extrema coniugatarum æqualium coniungunt, simul sumptas minores esse lineis quæ extrema alterius coniugationis connectunt. sunt enim E G, G F quadrata æqualia quadratis A B, B C, insuper & E G linea connectentium minima, & F G maxima per præcedentem: igitur ᵉ E G, G F lineæ minores sunt lineis A B, B C; eodem modo ostenduntur E H, H F lineæ minores lineis A D, D C: igitur lineæ, &c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCVIII.

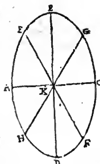
Sint A B C ellipseos axes A C, B D & E F vna ex diametris coniugatis æqualibus.

Dico quadrata A K, B K simul sumpta esse dupla quadrati E K.

Demon-

Demonstratio.

Dvcatur GH altera diametrorum coniugatarum æqualium. Quoniam A C, B D quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis EF, GH simul sumptis, erunt & quadrata AK, BK sub dimidijs axibus, æqualia quadratis EK, GK sub dimidijs diametris æqualibus; sunt autem EK, GK quadrata inter se æqualia, igitur quadrata AK, BK simul sumpta dupla sunt quadrati EK. Quod erat demonstrandum. a 77. huius.



PROPOSITIO XCIX.

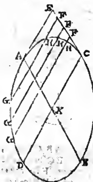
Apollonius l. 3. Conic. prop. 36. huiusmodi habet theorema: si ellipsim tangant A E, C E, *conuenientes in* E, *& sumpto in sectione puncto* G *ducatur* G H F *tangentium vni parallela* G H F. *erit rectangulum* G F H *ad quadratum* B C, *vt quadratum* A E *ad quadratum* C E.

Verùm non similitudo tantùm rationum sed spatiorum etiam æqualitas reperietur si tangentes à diametrorum coniugatarum æqualium ductæ fuerint.

Ellipseos diametri coniugatæ æquales sint A B, C D, in quarum terminis A, C, ellipsim tangant duæ rectæ conuenientes in E, si alterutri ducantur quotuis parallelæ G H erunt rectangula G F H quadratis F C æqualia.

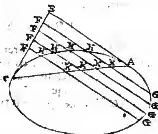
Demonstratio.

Qvoniam CD est diameter coniugata diametri A B, erit ad ipsam ordinatim posita: ergo tangenti AE parallela est. Eodem modo AK tangenti EC parallela est. figura igitur K A E C est parallelogrammum. Quare cùm AK, KC ex hypothesi sint æquales, etiam AE, CE æquales sunt; æquantur igitur quadrata AE, EC. Atqui est vt quadratum AE ad quadratum EC, ita rectangulum GFH ad quadratum FC, ergo rectanlum GFH quadrato FC æquale est. Quod erat demonstrandum.



Et quoniam Theorema illud Apollonij iam habemus in manibus, etiam hoc addo quod similiter Apollonius non videtur obseruasse: nimirum si ductis tangentibus AE, CE, iungantur puncta contactuum A, C, rectangula GFH, quadratis KF æqualia esse.

Quoniam FK, AE sunt parallelæ, triangula AEC, KFC similia sunt, ergo vt AE ad EC, sic KF ad FC. ergo vt quadratum AE ad quadratum EC, sic quadratum KF ad quadratum FC. sed etiam vt quadratum AC ad quadratum BC sic rectangula GFH ad quadratum KF. Ergo quadratum KF & rectangulum GFH ad quadratum EC, eandem habent rationem; æquantur igitur. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO C.

SInt A B, B C diametri coniugatæ inæquales, & ex A recta quæuis ducatur A D fecans ellipfim in D; cui ex C parallela ducatur C E iunganturq; E B, D B.

Dico E B, D B diametros effe coniugatas & contra.

Demonftratio.

a 51. huius.
b 59. huius.

PRimò cadant parallelæ ad eandem partem ellipfeos. Ducantur rectæ lineæ E A, D C. Quoniam A D, E C lineæ fibi mutuo æquidiftant, erunt [a] fegmenta B A, D C inter fe æqualia, adeoque [b] A B E, D B C fectores æquales. addito igitur communi A B D, erunt E B D, A B C fectores inter fe æquales. quare cùm vnius fectoris latera B A, B C fint diametri coniugatæ, etiam alterius latera E B, B D funt coniugatæ.

c 46. huius.
d Coroll 45. huius.

Secundò cadant A D, C E parallelæ ad partes ellipfis oppofitas: producantur femidiametri A B, D B in H & I, iunganturque puncta H I. Quoniam A B, B C funt coniugatæ erit [c] fector A B C quarta pars ellipfeos, fed A H diametro [d] bifecat ellipfim, adeoque portio A C H, dimidium eft ellipfeos. Ergo A B C fector dimidius eft femiellipfeos A C H. ac proinde æqualis fectori C B H. quia autem I H per 19. huius eft parallela ad D A. cui ex hypothefi etiam C E eft parallela, erunt I H, C E inter fe parallelę ergo fegmenta [e] C I, E H adeoque & fectores [f] C B I, H B E æquantur. addito igitur communi I B H, fector I B E æqualis eft fectori C B H, hoc eft, vt iam ante oftendi, fectori A B C. quare cùm fector A B C [g] fit quarta pars ellipfeos, fiue dimidium femiellipfeos, etiam fector I B E erit dimidium femiellipfeos, hoc eft portionis I E D, quam effe femiellipfim patet ex Coroll. 45. huius. Ergo fector I B E hoc eft fector A B C ęqualis eft fectori E B D. Quare cùm A B, B C fint coniugatæ, etiam D B, E B erunt coniugatæ.

e 51. huius.
f 60. huius.
g Coroll. 46. huius.

Sint iam A B, C B, item, E B, D B diametri coniugatæ iunganturque A D, E C. dico A D, E C lineas effe parallelas. Sin verò; ducatur ex A ipfi E C parallela A F iunganturque F B: erit igitur F B diameter coniugata ipfi E B per fecundam partem huius: fed D B per conftructionem coniugata eft diametro E B, ergo eidem E B plures diametri funt coniugatæ. quod fieri non poteft. igitur A F non æquidiftat ipfi E C. idem oftenditur de quauis alia. ergo A D fola parallela eft rectæ E C. Quod erat demonftrandum.

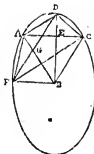
PROPOSITIO CI.

SIt in A D C ellipfi cuius centrum B quæuis diametrorum coniugatio A B, B C: iunctifque punctis A C, fecet A C lineam in E diameter quæcunque B D, cui coniugata ducatur B F, ductâque linea F D fecet A B diametrum vtcunque in G.

Dico A C, F D lineas, vti & B D, A B in E & G proportionaliter effe diuifas.

Demon-

Demonstratio.



QVoniam tam AB, BC diametri quàm DB, FB coniugatæ sunt, a sectores ABC, a FBD æquales erunt: ablato igitur communi ABD, æquales manent DBC, ABF sectores. vnde BD, b AB lineæ, item AC, FD in E & G proportionaliter sunt diuisæ.

a Corol. 46. huius.
b 61. huius.

PROPOSITIO CII.

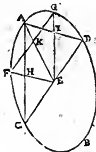
IIsdem positis:
Dico iunctas AD, FC æquidistare.

Demonstratio.

PEr præcedentem sectores DBC, ABF ostensi sunt æquales; segmenta igitur DC, c AF quoque inter se æquantur: ergo AD, FC d lineæ æquidistant. Quod erat demonstrandum.

c 60. huius.
d 61. huius.

PROPOSITIO CIII.



SEcet ABC ellipsim quæuis diametrorum coniugatio AE, CD: sit autem & alia diametrorum coniugatio, FE, GE quę iunctas AD, AC secet in H & I:

Dico esse vt AH ad HC, sic DI ad IA.

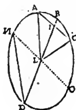
Demonstratio.

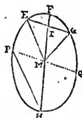
DVcatur FG quę AE secet in K. vt AH ad HC, sic FK ad KG: sed vt FK ad KG, sic DI e est ad AI, igitur vt AH ad HC sic DI ad AI. Quod erat demonstrandum.

e 101. huius.

PROPOSITIO CIV.

SEcet ABC ellipsim diameter quæcunque BD: sit autem & EFG, ellipsis similis & æqualis ellipsi ABC: quam secet quæuis alia diameter FH: dein BD, FH diametris proportionaliter diuisis in I & K, agantur per I & K, ordinatim lineæ AC, EG: è quarum extremitatibus ducantur semidiametri AL, CL, EM, GM.

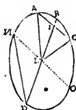


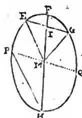


Dico ALC, EMG triangula esse æqualia.

 Demon-

Demonstratio.





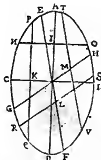
Diametro BD coniugata ducatur NO, & FH diametro PQ: iunganturque ND, PH. Quoniam diametri BD, FH tam in IK quàm LM proportionaliter sunt diuisæ, erit vt rectangulum BID ad rectangulum BLD sic FKH, rectangulum ad rectangulum FMH: quare vt quadratum AI ad quadratum NL sic quadratum EK ad quadratum PM: & vt AI linea ad lineam NL sic EK ad PM: sed etiam est per constructionem vt IL ad BL, id est LD, sic KM ad FM id est MH; igitur vt triangulum NLD ad triangulum AIL, sic PMH triangulum ad triangulum EKM (quia ex iisdem illorum ratio componitur:) & permutando vt NLD triangulum ad triangulum PMH, sic AIL triangulum ad triangulum EKM. sed NLD, FMH triangula sunt æqualia, igitur AIL, EKM triangula, adeoque tota ACL, EGM æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CV.

Secent ABC ellipsim duæ diametrorum coniugationes AB, CD, EF, GH, & omnes quatuor diametri proportionaliter sint diuisæ in I, K, M, L punctis, per quæ ordinatim ducantur lineæ NO, PQ, RS, TV.

Dico quadrata NO, PQ simul sumpta æquari quadratis RS, TV simul sumptis.

Demonstratio.



Quoniam tam AB, EF, quàm CD, HG proportionaliter sunt diuisæ, erit vt AB quadratum ad rectangulum AIB, sic EF quadratum ad rectangulum ELF, & quadratum CD ad rectangulum CKD, & HG quadratum ad rectangulum HMG. Ex iisdem enim rationibus singulæ quadratorum ad rectangula proportiones cõponuntur. Igitur vt AB, CD quadrata simul sumpta ad rectangula AIB, CKD simul sumpta, sic quadrata EF, GH simul sumpta, sunt ad rectangula ELF, HMG simul sumpta: & permutando vt AB, CD quadrata ad quadrata EF, GH, sic AIB, CKD rectangula, sunt ad rectangula ELF, HMG. hoc est [a] quadrata PK, NI ad quadrata SL, TM: sed AB, CD quadratis simul sumptis [b] æqualia sunt quadrata EF, GH simul sumpta; igitur & quadratis NI, PK æqualia sunt quadrata SL, TM: ergo NO, PQ quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis SR, TV. Quod erat demonstrandum.

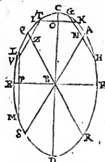
a 74. huius.
b 77. huius.

PROPOSITIO CVI.

SEcet ABC ellipsim quęuis diametrorum coniugatio CD, EF, quibus proportionaliter diuisis in O & P: ducatur vna ex diametris coniugatis æqualibus AS quę diuidatur in N, vt CD est diuisa in O. per NOP rectæ ducantur ordinatim GH, IK, LM.

Dico IK, LM quadrata simul sumpta esse dupla quadrati GH.

Demonstratio.



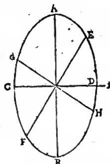
DVcatur altera coniugatarum æqualium QR, quâ similiter diuisâ in Z, vt SA est in N, & CD, EF, in O & P, per punctum Z ponatur ordinatim VT. quia igitur QR, AS sunt æquales & similiter sectę, rectangulum QZR æquatur rectangulo ANS. sed rectangula QZR, ANS a æquantur quadratis GN, TZ. ergo quadrata GN, TZ adeoque & quadrata GH, TV æqualia sunt. sed quadrata ML, IK b æquantur quadratis VT, GH. ergo quadrata ML, IK dupla sunt quadrati GH. Quod erat demonstrandum. a 74 huius. b 105 huius.

PROPOSITIO CVII.

SEcent ABC ellipsim duæ diametrorum coniugationes AB, CD, EF, GH: sitque AB maxima & EF magnitudine secunda.

Dico rationem AB ad EF minorem esse ratione GH ad CD.

Demonstratio.



QVoniam AB, CD quadrata simul sumpta æqualia sunt quadratis EF, GH simul sumptis: non est vt AB ad EF, sic GH ad CD, nam tunc quadrata AB, CD maximę & minimæ maiora essent quadratis EF, GH. fiat igitur vt AB ad EF, sic GH ad CI: eruntque AB, CI quadrata maiora quadratis EF, GH, hoc est quadratis AB, CD. quare CI linea est maior rectâ CD, & ratio GH ad CD, id est ex constr. ratio AB ad EF minor est ratione GH ad CD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CVIII.

IN data ellipsi diametros exhibere coniugatas in data ratione.

Constructio & demonstratio.

a 49. De Circulo.

b 77. huius.

SInt A B C ellipsis axes A B, C D: centrum E: ratio verò data maioris ad minus F ad G, quam non maiorem esse oportet ratione axium A E, E C. si ratio data æqualis est axium rationi, res patet: si minor, sumantur H I, I K lineæ, rectis A E, E C æquales, ponanturque ad angulum rectum H I K: ductaque H K, & diuisa bifariam in L, centro L interuallo L H circulus describatur H I K qui transibit per puncta I & K, in segmento dein H I K inclinentur [a] duæ lineæ H I K habentes datam rationem F ad G. Quoniam igitur H M est ad M K vt F ad G, estque ratio F ad G, minor ratione axium, hoc est ex constr. ratione H I ad I K, patet punctum M cadere inter I & H, adeoque rectam H M minorem quàm H I, hoc est quàm E A, rectam verò M K maiorem quàm I K hoc est quàm E C. centro igitur E interuallo H M, descriptus circulus secat ellipsim in puncto aliquo N inter A & C, ducatur igitur diameter N E, eique coniugata E O. dico N E, O E diametros satisfacere petitioni. Quoniam quadrata N E, O E [b] sunt æqualia quadratis A E, E C hoc est H I, I K hoc est quadratis H M, M K: sit autem & N E linea æqualis rectæ H M. erit & O E linea æqualis lineæ M K. igitur vt H M ad M K, id est vt F ad G, sic N E ad O E. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CIX.

SEcet A C D ellipsim quæuis diametrorum coniugatio A B, B C, assumptoque in peripheria puncto quouis D inter A & C, agatur per D contingens E F, quæ cum A B, B C lineis concurrat in E & F, cui per centrum parallela ducatur B G.

Dico D F, B G, D E lineas esse in continua analogia.

Demonstratio.

c Coroll. 461 huius.
d Corol. 60. huius.
e 101. huius.

QVoniam ex hypothesi D F, B G sunt parallelæ, triangula D F H, B H G, vt ex elementis patet, erunt similia, ac proinde D F est ad B G, vt D H ad H G: hoc est vt triangulum D H B ad triangulū B H G. Deinde, quoniam B G per centrum est tangenti D F parallela, liquet eam coniugatam esse diametrum ipsi D B: sunt verò ex hypothesi etiam A B, B F coniugatæ. Ergo [c] sectores B D C G, B A D C, adeoque [d] & triangula B D G, B A C æquantur: Quorum bases D G, A C, cùm [e] proportionaliter sint diuisæ in H & I, vt D H sit ad H G, sicut C I est ad I A, constat ex elementis triangula B H D, B I C & B H G, B I A esse æqualia. ergo cùm priùs ostenderetur D F esse ad B G

vt

vt triangulum BHD ad triangulum BHG, erit quoque DF ad BG, vt triangulum BIC ad triangulum BIA. Vlterius cùm triangulum BHG sit ad triangulum BHD, vt GH ad HD, hoc est [a] vt AI ad IC, hoc est vt KI ad IB (cùm enim CB sit coniugata ipsi AB, & AK, ex constructione tangens, patet AK, CB esse parallelas) hoc est vt triangulum AIK ad triangulum AIB: erit componendo triangulum BDG ad triangulum BHD, vt triangulum AKB ad triangulum AIB; & permutando triangulum BDG ad triangulum AKB, vt triangulum BHD, hoc est sicut ante ostendi, vt triangulum BIC ad triangulum AIB. sed triangulum AKB est [b] triangulum EDB, ergo triangulum BDG est ad triangulum EDB, hoc est, quoniam ED, BG sunt parallelæ, BG est ad ED, vt triangulum BIC ad triangulum AIB, hoc est sicut ostendi supra, vt DF ad BG. sunt igitur in ratione continua DF, BG, ED. Quod erat demonstrandum.

a ibid.

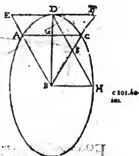
b 71. huius.

PROPOSITIO CX.

Sint AB, BC diametri quæcunque coniugatæ, assumptoq; in peripheria, inter A & C puncto quouis D, agatur per D contingens, occurrens AB, BC diametris in E & F, iunctaque AC occurrat diametro DB in G.

Dico rectam DF ad DE, rationem habere duplicatam, eius quàm habet CG ad GA.

Demonstratio.



Ducatur ex B linea BH parallela ipsi EF, & ex D recta DH occurrens FB lineæ in I. erunt igitur per præcedentem, continuæ FD, BH, ED. adeoque ratio FD ad ED, duplicata rationis FD ad BH, id est DI ad IH, quia DF, BH per constructionem æquidistant: rursum cùm HB recta æquidistet tangenti DF, erunt DB, BH diametri coniugatæ; sunt autem ex constructione etiam AB, BC coniugatæ; igitur [c] vt DI ad IH, sic CG ad GA: quare & ratio FD ad DE, duplicata est rationis CG ad GA. Quod erat demonstrandum.

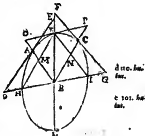
c 101. huius.

PROPOSITIO CXI.

Sint AB, BC diametri coniugatæ & per A & C tangentes ducantur DE, FG. sit autem & alia quæuis diametrorum coniugatio HI, KL, quæ producta occurrat tangentibus DE, FG in E, F, D, & G.

Dico lineas DE, FG in A & C proportionaliter esse diuisas, nimirum esse EA ad AD, vt GC ad CF.

Demonstratio.



Ducantur lineæ HK, KI quæ rectas AB, BC secent in M & N. Ratio EA ad AD [d] duplicata est rationis KM ad MH; & GC ad CF, duplicata est rationis IN ad NK. Atqui ratio KM ad MH æqualis est [e] rationi IN ad NK. ergo rationes EA ad AD, & GC ad CF æqualium rationum duplicatæ, sunt æquales, proportionaliter ergo sectæ sunt DE, GF in punctis C, A. Quod erat demonstrandum.

d 110. huius.

e 101. huius.

Corol-

Corollarium.

QVod si per K ducatur tertia tangens, conueniens cum B A, B C coniugatis in O & P, dico fore OK ad KP, vt E A ad A D. quod ducta recta A C eodem modo quo vsi sumus demonstrabitur.

Itaque tres tangentes D E, O P, F G similiter sunt diuisæ sic vt E A sit ad A D, sicut OK ad KP, & GC ad CF.

PROPOSITIO CXII.

SInt duæ diametrorum coniugationes A B, B C, F G, D E, aganturque per A & C tangentes H I, K L, quæ F G, D E diametris occurrant in H, I, K, L punctis.

Dico esse vt B C ad B A sic H I ad K L.

Demonstratio.

QVoniam recta B C æquidistat rectæ H I, & K L linea ipsi A B, erunt tam H A, B C, A I quàm K C, A B, C L lineæ in continua analogia. cùm ergo sit vt H A ad A I, prima ad tertiam, sic[a] K C ad C L, prima ad tertiam: erit etiam H A ad B C, prima ad secundam vt K C est ad A B, prima ad secundam: quare permutando est H A ad K C, vt B C ad A B, cùm igitur ante ostenderim H A esse ad A I, vt K C ad C L, adeoque inuertendo, componendo, ac permutando sit vt H A ad K C, sic H I, ad K L, erit vt B C ad B A, ita H I ad K L.

[a] 110 huius.

Corollarium.

EOdem modo ostenditur, si per F agatur tangens quæ cum A B, B C conueniat in P & Q esse vt B C ad B D, sic H I ad P Q.

PROPOSITIO CXIII.

SInt duæ diametrorum coiugationes A C, B D, E F, E G: actisque per F & G tangentibus quæ diametris A C, B D occurrant in H, I, L, M. ducatur recta F G secans B E diametrum in K.

Dico L K, K E, K I lineas esse continuas.

Demonstratio.

QVoniam F E, vtpote coniugata ipsi E G, æquidistat tangenti L G, erit L K ad K E, vt G K ad K F. similiter quoniam E G, vtpote coniugata ipsi E F, parallela sit tangenti F I, est vt G K ad K F, sic K E ad K I: igitur vt L K ad K E, sic K E est ad K I. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXIV.

Iisdem positis:
Dico IHE, LME triangula esse æqualia.

Demonstratio.

Ducatur recta AB quæ FE lineam secet in N: & ex E rectæ ducantur EO, EP, normales ad lineas HI, LM. Quoniam LM linea æquidistat ipsi FE (est enim LM tangens, & FE coniugata ipsi EG,) erit angulo FEG æqualis angulus EGP, eodem modo erit angulus OFE æqualis angulo FEG. quare anguli OFE, EGP sunt inter se æquales: sunt autem EPG, EOF anguli recti; igitur triangula EGP, EFO similia. quare vt EG ad EF, sic EP ad EO. sed est [a] vt EG ad EF, sic HI ad LM. igitur vt EP ad OE, sic reciprocè HI ad LM. ergo IHE, LHM triangula sunt æqualia. Quod erat demonstrandum. [a] 110. huius.

PROPOSITIO CXV.

Iisdem positis triangulum EGM, triangulo EFI, & EGL triangulum, triangulo EFH æquale est.

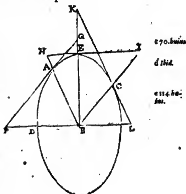
Demonstratio.

Est enim [b] vt HF ad FI, sic LG ad GM, & componendo vt HI ad FI, sic LM ad GM: sed est vt HI ad FI, sic HIE triangulum ad triangulum FIE, & vt LM ad GM, sic ELM triangulum ad triangulum EGM; igitur vt HIE triangulum ad triangulum FIE, sic ELM triangulum est ad triangulum EGM, & permutando vt HIE triangulum ad triangulum ELM, sic FIE triangulum est ad triangulum EGM. quare FIE, EGM triangula sunt æqualia. eodem modo ostenduntur reliqua EGL, HFE æqualia. [b] 111. huius.

PROPOSITIO CXVI.

Si ellipsim ADC duæ secent diametrorũ coniugationes AB, BC; EB, BD: aganturque per A,E,C. contingentes FG, HI, KL quę diametris quidem EB, BD occurrãt in G,K,F,L, diametris verò AB, BC, in H & I. Dico triangula FGB, HBI, KLB esse inter se æqualia.

Demonstratio.



Nam triangulum BIE [c] æquatur triangulo BKC, hoc est per 115. huius triangulo BFA: & triangulum BHE, [d] æquatur triangulo GAB. ergo triangulum totum BIH æquatur toti BFG. quare cùm etiam FGB, [e] KBL æqualia sint, liquet tria triangula esse æqualia.

[c] 70. huius. [d] ibid. [e] 114. huius.

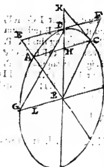
PROPOSITIO CXVII.

Sint ellipseos duę diametri coniugatæ AB, BC, & ex puncto aliquo inter A & C assumpto, scilicet D ducatur tangens DE coniugatis AB, BC

pro-

productis occurrens in E & F: deinde ex centro B ducatur B G, ipsi E F æquidistans, sitque G B media inter E D, D F.

Dico punctum G esse in peripheria ellipseos, cuius diametri coniugatæ A B, B C, & tangens E D.



Demonstratio.

Ex centro ad contactum ducatur B D, & quia G B ex hypothesi est parallela tangenti E D, erit G B ordinatim posita ad B D, & quidem ad centrum. vnde B D, G B sunt diametri coniugatæ. iungantur deinde A H C & D G, ex C ducatur C K parallela ipsi A B, occurrens B D protractæ in K: quæ sectionem in C contingit, eritque vt A H ad H C, ita B H ad H K: sed vt A H ad H C, ita est A B H triangulum ad triangulum H B C, & vt B H ad H K, ita est triangulum H B C, ad triangulum H C K: ergo vt triangulum A B H ad ipsum H B C ita est triangulum H B C ad triangulum H C K: ergo componendo, ac permutando triangulum A B C, ad triangulum B C K est vt triangulum B H C ad triangulum H C K, id est vt iam ostensum, vt triangulum A B H ad triangulum H B C, id est vt linea [a] A H ad lineam H C: sed æqualia sunt triangula [a] B C K, B D F, ergo etiam erit triangulum A B C ad triangulum B D F, vt A H ad H C. Vlterius quoniam D F, G B sunt parallelæ, erit triangulum [b] G D B, ad D B F triangulum, vt G B, ad D F: sed, quoniam ex hypothesi E D, G B, D F sunt continuæ, ratio G B ad D F, est dimidiata rationis E D ad D F. Ergo ratio trianguli G D B ad triangulum D B F, dimidiata est rationis E D ad D F. Atqui [c] ratio A H ad H C, hoc est vt ostensum supra, ratio trianguli A B C ad triangulum D B F, dimidiata quoque est rationis E D ad D F. ergo triangulum G D B est ad triangulũ D B F, vt triangulũ A B C ad idem triangulum D B F. æquantur igitur triangula G D B, A B C. ergo & parallelogrammum contentum semidiametris, vt supra ostendi, coniugatis, G B, B D in angulo G B D æquatur parallelogrammo contento sub semidiametris coniugatis A B, B C. Ergo [d] punctum G est ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

[a] 70. huius.
[b] Patet ex elementis.
[c] 109. huius.
[d] Patet ex 71. huius.

PROPOSITIO CXVIII.

Sint rursum binæ diametri coniugatæ B A, B C. Et sumpto in perimetro ellipsis puncto D inter A, ac C, tangat ellipsim E F in D, occurrens diametris in E & F. Deinde ex centro B ducatur ad perimetrum B G parallela tangenti.

Dico E D, G B, D F esse in continua analogia.

Demonstratio.

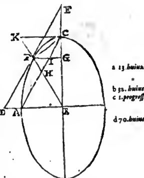
Si non sit aliqua L B minor vel maior quàm G B media inter E D, D F. Ergo per præcedentem punctum L est ad ellipsim. quod fieri non potest, cùm ex hypothesi punctum G ad ellipsim existat. Nulla igitur præter G B media est inter E D, D F. ergo E D, G B, D F sunt continuæ proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXIX.

SInt in ellipsi diametri coniugatę AB, BC iungaturq́; AC cui parallela fiat linea DE tangens ellipsin in F, & occurrens diametris coniugatis protractis in D & E.

Dico triangulum EDB trianguli CAB duplum esse.

Demonstratio.



EX centro B per tactum F ducatur diameter BHF, cui occurrat in K, recta CK ellipsim tangens in C, deinde ex tactu F ponatur ordinatim FIG. Quoniam AC parallela est ex hypothesi tangenti DE, erit [a] ad diametrum BF ordinatim posita. ergo KB, FB, HB [b] sunt continuæ proportionales. ergo [c] est vt KB ad FB, sic KF ad FH. sed KB est ad FB, & triangulum KCB ad triangulum FCB, hoc est, quia [d] triangula KCB, EFB æquantur, vt triangulum EFB ad idem triangulum CFB, hoc est vt EB ad CB. Igitur vt EB ad CB, sic KF ad FH. Deinde quia ex constr. KC tangit, & FG est posita ordinatim ad BC, rectæ EB, CB, GB sunt continuæ. Ergo vt EB ad CB, sic EC ad CG. sed etiam est vt iam ostendi, sicut EB ad CB ita KF ad FH. Ergo vt KF ad FH, sic EC ad CG. Ergo vt triangulum KCF ad triangulum FCH, sic triangulum EFC ad triangulum CFG. Atqui cum tota KCB, EFB, æqualia sint, ablato communi FBC reliqua KCF, EFC æqualia sunt. Ergo & FCH, CFG æqualia sunt; ablato igitur communi FIC, æqualia remanent FIH, CIG, quibus si commune addis BHIG, FGB æquabitur CHB. Iam verò quia AC ordinatim posita est, vt supra ostendi, ad BF, bisecta est AC in H, adeoque & triangulum CAB duplum est trianguli CHB, & DE parallela ad AC etiam bisecatur in F: est verò FG, vtpote ducta ordinatim ad CB, parallela ad CB, diametrum coniugata ipsi CB. ergo & BE bisecatur in G. proindeque EFB duplum est GFB. Atqui CHB, FGB ostensa sunt æqualia. Ergo & eorum dupla CAB, EFB æqualia sunt. sed triangulum DEB duplum est trianguli EFB, est enim DE bisecta in F. Ergo triangulum DEB duplum quoque est trianguli CAB. Quod erat demonstrandum.

a 13. huius.
b 31. huius.
c 1. progress.
d 70. huius.

ELLIPSEOS
PARS QVARTA

Sectionis polos, & lineam à puncto in axe dato ad peripheriam, breuissimam designat.

PArtem hanc, quæ de polis est, aggressuri, paucis præmittemus ea quæ ad inuentionem polorum ab Apollonio libro tertio propositione 42. & 45. demonstrata sunt; & quidem hoc necessarium esse duxi; tum quod ad illorum intelligentiam quæ Apollonius in rem hanc contulit, nec omnium captui ita patent, plurimum conducant; tum quod ad rem nostram planè iudicem necessaria. Apollonius igitur vt in axe ellipseos polos exhibeat, hac vtitur constructione propositione 45. & 6. Quartę, *inquit,* parti figuræ æquale rectangulum comparetur ex vtraque parte : *id est, sectionis axis* A C *ita secetur in duobus punctis* G *&* H, *vt tam* AGC *quàm* CHA *rectangulum æquale sit quartæ parti figuræ: quo posito vlterius ostendit* G *&* H *polos esse sectionis : quos puncta vocat ex comparatione facta; videlicet ex comparatione rectangulorum sub segmentis axeos, cum quarta parte figuræ. Figuram porrò hic vocat Apollonius rectangulum quod fit sub latere recto axeos maioris & ipso axe: atque illud cùm quarta sui parte ad vsus seruiret eximios; videlicet inuentionem polorum &c. singulari præ reliquis rectangulis appellatione figuram appellauit antiquitas: huius autem quartæ parti æquale est quadratum semiaxeos minoris: quod Pergæus lib. tertio, propos. 42. præclarè demonstrauit, & nos verbo vno sic ostendimus.*

Lemma.

PEr vndecimam huius, figuræ siue rectangulo sub axe maiore & latere illius recto æquale est quadratum axeos minoris; sed quadrati minoris axis quarta pars est quadratum dimidij axis minoris; igitur quadratum dimidij axeos minoris æquale est quartæ parti figuræ. vnde cùm voce illa in hac parte vtar, quarta pars figuræ, intelligi volo quadratum semiaxeos minoris.

Occurrent in hac parte propositiones aliquot eadem cum illis quas Apollonius de focis, demonstrauit : quod eo consilio feci, ne quid in hac materia studiosus lector desideraret.

PROPOSITIO CXX.

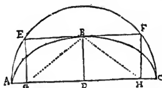
SInt ABC ellipsis axes AC, BD, actaque per B tangente EF : centro BD interuallo DA circulus describatur AEFC, qui tangenti occurrat in E & F. dein ex E & F, normales demittantur EG, FH ad axem AC.

Dico tam AGC quàm AHC rectangulum æquale esse quartæ parti figuræ.

Demon-

Demonstratio.

QVoniam tam EB linea æquidistat rectæ AD quàm EG[a] ipsi BD. erunt EG, BD lineæ æquales: est autem AGC rectangulum æquale quadrato EG, quod recta EG ducta sit ad diametrum circuli normalis; igitur & quadrato BD æquale est rectangulum AGC. eodem modo



[a] 13. huius.

est FH quadrato, hoc est quadrato BD æquale rectangulum AHC. sed BD quadratum est æquale quartæ parti figuræ, igitur tam AGC quàm AHC rectangulum est æquale quartę parti figuræ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

HInc patet AG, HC lineas esse æquales & GH bifariam esse diuisam in D.

PROPOSITIO CXXI.

IIsdem positis ducantur rectæ BG, BH.
Dico BG, BH lineas simul sumptas axi AC esse æquales.

Demonstratio.

QVoniam æquales sunt [b] AG, HC, quadratum AG æquatur rectangulo ex AG & HC. Iterum quia æquales sunt GD, DH, æquabitur rectangulum AGD bis sumptum rectangulo AGH. Quare cùm [c] quadratum AD æquale sit quadratis DG, AG & rectangulo AGD bis, idem quadratum AD æquabitur quadrato DG & rectangulo ex AG, HC vnà cum rectangulo AGH. Atqui rectangula AG, HC, & AGH, [d] æquantur rectangulo AGC. Ergo quadratum AD æquale est quadrato DG vnà cum rectangulo AGC; hoc est quadratis DG, GE, hoc est quadratis DG, DB. sed ijsdem æquatur quadratum GB, ęquantur igitur quadrata AD, GB, ac proinde rectæ AD, GB æquales sunt. Eodem modo demonstrabitur rectas CD, HB æquales esse. Ambę igitur GB, BH simul sumptæ axi sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

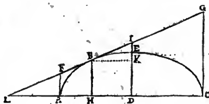
[b] Coroll. 120. huius. [c] 4. secundi. [d] 1. secundi.

Corollarium.

HInc sequitur: si ABC ellipsis axes fuerint AC, BD, & ex B vertice minoris axis rectæ dimittantur BG, BH, æquales lineis AD, DC, secantes axem AC in G & H. Quod tam AGC quàm AHC rectangulum, æquale sit quartæ parti figuræ. adeoque G & H sectionis poli sunt.

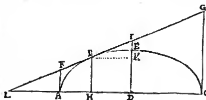
PROPOSITIO CXXII.

ELlipsim ABC, cuius diametri coniugatæ AC, DE contingant in A & C, & alio puncto quouis B tres lineæ AF, CG, FG: & FG quidem occurrat AF, CG rectis in F & G. productaque ED occurrat FG lineæ in I, & ex B, recta demittatur BH ordinatim ad AC diametrum:



 Dico

Dico rectangulum super A F, C G lineis æquari rectangulo super B H I D.



Demonstratio.

a 32. huius.

PRoducatur F G linea donec cum axe conueniat in L. Quoniam D H, D A, D L lineæ a sunt in continua ratione, erit vt L D ad A D, hoc est ad D C sic L A ad A H, & inuertendo componendo vt C L ad D L, sic H L ad A L, sed est vt C L ad D L, sic C G ad D I, & vt H L ad A L, sic H B ad A F, igitur vt C G ad D I, sic H B ad F A: adeoque rectangulum super A F, C G lineis æquale rectangulo B H, I D. Quod erat demonstrandum.

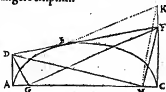
Corollarium.

HInc sequitur rectangulum A F, C G vel H B, I D, æquale esse quartę parti figuræ: ducatur enim B K parallela axi A C: erit rectangulum D K, D I æquale quadrato E D: igitur & A F, C G rectangulum est æquale quadrato E D hoc est quartę parti figuræ.

PROPOSITIO CXXIII.

ELlipsim A B C cuius axis A C, contingant in A & C, & alio quouis puncto B, lineæ A D, C F, D F: & D F quidem conueniat cum A D, C F lineis in D & F. diuidatur autem linea A C in G & H, vt A G C, A H C rectangula sint æqualia quartæ parti figurę. ducanturq; lineę D G, G F, D H, H F.

Dico angulos D G F, D H F esse rectos, & si sint recti: dico D F, lineam tangere ellipsim.



Demonstratio.

b Coroll. 121. huius.

c 6. sexti.

REctangulum D A C F b est æquale quartę parti figurę, hoc est rectangulo A G C. Ergo vt A G ad A D, sic F C ad C G, sunt autem anguli D A G, F C G recti: igitur D A G, F C G triangula c similia: & angulus A D G æqualis angulo C G F, est autem angulus A D G, vnà cum angulo A G D æqualis vni recto, cùm D A G angulus in triangulo A D G sit rectus: igitur & angulus C G F, vnà cum angulo A G D vni recto sunt æquales. ergo reliquus D G F est rectus. eodem modo ostenditur angulus D H F rectus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXIV.

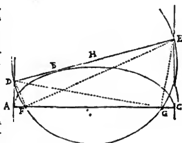
ELlipsim A B C cuius axis A C contingant in A, C, B, punctis lineæ A D, C E, D E: & D E quidem occurrat rectis A D: C E in D & E: fiant autem quartæ parti figurę, æqualia rectangula A F C, A G C, seceturque E D bifariam in H:

Dico

Dico circulum centro H interuallo D & E, descriptum transire per F & G.

Demonstratio.

IVngantur puncta DF, FE, DG, GE. Quoniam tam angulus DFE, quàm DGE est rectus; & DE linea vtrumque subtendens diuisa bifariam in H, patet circulum centro H interuallo HD descriptum transire per F & G. Quod erat demonstrandum.



Corollarium.

HInc sequitur angulos EDG, FDA esse inter se æquales, est enim angulus ADF in demonstratione præcedentis æqualis ostensus angulo GFE: sed angulo GFE æquatur angulus EDG cum eidem arcui EG insistat, ergo anguli EDG, FDA sunt inter se æquales.

PROPOSITIO CXXV.

ELlipsim ABC cuius axis AC contingant in A, C, B, lineæ AD, CE, DE: & DE quidem conueniat cum AD, CE lineis in D & E. fiant autem AFC, AGC rectangula æqualia quartæ parti figuræ: ductisque lineis FE, GD quæ se interfecent in H, ex puncto H ad contactum B, ducatur recta HB.

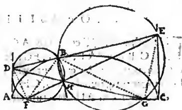
Dico HB normalem esse ad tangentem DE.

Demonstratio.

DVcatur rectę FD, CE. a Anguli DFE, ECD recti erunt. Iam super HD, HE lineis vt diametris circuli describantur DBH, EBH. Quoniam DH, HE lineæ non sunt in directum, patet DBH, EBH circulos se inuicē secare in puncto aliquo B. Iunctis igitur punctis HB. ducantur rectæ DB, EB: erunt anguli DBH, EBH recti, adeoque DB, EB lineæ in directum, & HB linea normalis rectæ DE. sunt autem vt ante ostendi DFE, EGD anguli rectis igitur DE b linea est tangens. Quare recta BH est normalis ad ED tangentem. Quod erat demonstrandum.

a 123. huius.

b Patet ex 123. huius, quæ facile conuertitur.

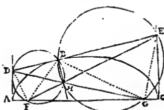


PROPOSITIO CXXVI.

EAdem manente figura: ducantur FB, BG.

Dico angulos DBF, EBG ad contingentem esse æquales.

a 123 huius.
b Ibid.



Demonstratio.

QVoniam anguli D F H, E G H a recti sunt, transibunt per F & G, circuli D F H, E G H: transit autem vterque etiam per B: quia b anguli E B H, D B H sunt recti: igitur tam anguli D B F, D H F quàm E B G, E H G anguli sunt inter se æquales: sed angulus D H F æqualis est angulo E H G: ergo & D B F æquatur angulo E B G. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

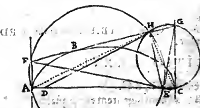
CVm punctum B in peripheria assumptum, sit quodcunque sequitur lineas omnes ex F in peripheriam ellipsis ductas, reflectendas in G. Quare & puncta F G poli seu foci à nonnullis vocantur: quæ ab Apollonio puncta ex comparatione facta dicuntur. porrò hæc in ellipticis mirabiles habent proprietates: inter reliquas placuit sequentem hic adiungere.

Sint A, C, *foci ellipseos, quorum distantia par sit interuallo oculorum, ponaturq; in* A *oculus sinister, & dexter in* C. *Dico illum per totum speculum apparere oculo dextro, in* C *posito: & vicissim oculum dextrum in* C. *per totum speculum videri ab oculo sinistro in* A. *demonstratio patet: species enim obiecti* A, *per totum speculum diffusa, reflectuntur in* C. *& species obiecti* C *per totum diffusa reflectuntur in* A. *quare obiectum* A *per totum apparebit speculum, oculo* C, *vti & obiectum* C, *oculo* A. *hinc sequitur quod minimum & visibile positum in* C, *maximum apparebit oculo in* A *posito: quia apparebit per totam speculi superficiem diffusum.*

PROPOSITIO CXXVII.

ELlipsim A B C, cuius axis A C & poli D E contingant in punctis A, C, B rectæ A F, C G, F G; & F G quidem conueniat cum A F, C G lineis in F & G. erigatur ex E, linea E H normalis ad tangentem F G, iunganturq; puncta A H, C H.

Dico angulum A H C rectum esse.



Demonstratio.

DVctis lineis F E, E G describantur super F E, E G diametris circuli F H E, H G C: ac circulus quidem F H E, cùm anguli E H F, E A F sint recti, transibit per H, F, A. puncta; circulus verò H G C; cùm D H E, E C G anguli quoque recti sint transibit per H, C. erunt igitur tam anguli A H F, A E F quàm E H C, E G C, anguli

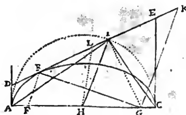
guli æquales: ſed angulus CGE per demonſtrata in 121. huius æqualis eſt angulo FEA, igitur & angulo CHE æquatur angulus AHF; addito ergo communi angulo AHD, erit angulo FHE recto æqualis angulus AHC, quare & ipſe rectus eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXVIII.

Ellipſim ABC cuius axis AC contingant in A, C, B, lineæ AD, CE, DE, ac DE quidem occurrat AD, CE lineis in D & E: ſint autem poli F, G, centrum H ductaque ex F recta FB ad punctum contactus ducatur ex H linea HI parallela rectæ FB occurrens ED lineæ in I.

Dico HI lineam æqualem lineæ HC, & ſi HI occurrens ED rectæ, ſit æqualis HC. dico HI lineam æquidiſtare FB.

Demonſtratio.

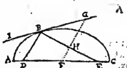


Fiat BI æqualis IK: iunganturque BG, GK, & rectæ ducantur AI, IC: Quoniam IB, IK ſunt æquales, erit BI ad IK, vt FH ad HG: adeoque BF, KG lineæ parallelæ; & angulus BKG æqualis angulo DBF, hoc eſt [a] IBG: quare BG, GK lineæ æquales: ſunt autem & duo reliqua latera BI, IG æqualia duobus lateribus KI, IG. Angulus ergo BIG, æqualis angulo KIG: adeoque GI linea normalis tangenti DE, & angulus AIC rectus. quare circulus centro H interuallo HC deſcriptus tranſibit per I, eritque HI linea æqualis lineæ HC. Quod erat primum. [a] 115. huius.

Reliquis manentibus, ſit iam HI linea quæ occurrat tangenti ED in I, æqualis lineæ HC. Dico HI rectam æquidiſtare lineæ BF: ſin verò ducatur ex H linea HL, parallela rectæ FB occurrens ED tangenti in L erit igitur HL linea æqualis lineæ HC, hoc eſt HI. quare circulus centro H interuallo HC deſcriptus tranſilit per I & L puncta. Quod impoſſibile: igitur HL non eſt parallela ipſi FB: nec quæuis alia: præter HI lineam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXIX.

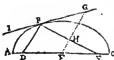
Sit ABC ellipſeos axis AC, poli autem D, E ex D & E rectæ inflectantur DB, EB conuenientes in puncto quodam peripheriæ B.



Dico DB, EB lineas ſimul ſumptas æquari axi AC.

Demon-

Demonstratio.



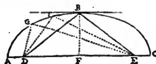
Sit F centrum ellipseos; actáque per B tangente BG: ducatur recta FG parallela lineæ DB secans EB lineam in H. Quoniam BD, FG lineę sunt parallelæ, erit angulus FGB æqualis angulo DBI hoc est ᵃ EBG, adeoque HB, HG lineæ æquales: rursum cùm sit vt DE ad FE, sic BE ad HE, sitque DE dupla FE, erit & EB, dupla rectæ BH id est HG: sed etiam BD dupla est FH, cùm sit vt DE ad FH, sic DB ad FH. igitur EB, BD lineæ simul sumptæ duplæ sunt rectæ FG hoc est FC: quare & æquales axi AC. Quod erat demonstrandum.

a 111. huius.

PROPOSITIO CXXX.

Triangulorum isoperimetrorum maximum est isoscelium.

Demonstratio.



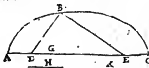
Describatur ellipsis quæcunque ABC cuius axes AC, FB poli D, E, iunganturque puncta DB, BE: tum super ED basi triangula constituantur quęcunque DGE, quorum vertices G sint in peripheria. Quoniam tam DB, BE lineæ quàm DG, GE simul sumptæ sunt æquales axi AC: patet DBE, DGE triangula esse isoperimetra: dico autem illorum esse maximum triangulum DBE: agatur enim per B tangens: quæ cùm in vno tantùm puncto B ellipsi occurrat & reliqua sui parte tota cadat extra, patet DGE triangula quæ terminantur in ellipsi minorem habere altitudinem triangulo DBE, adeoque illo esse minora: est autem DBE triangulum isosceles, quia DF, FB latera æqualia sunt lateribus EF, FB & anguli illis contenti recti; igitur triangulorum isoperimetrorum maximum est isosceles. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXI.

Oporteat è focis ellipseos DE duas inclinare ad idem punctum perimetri quæ datam contineant rationem H ad K.

Debet autem data ratio maior esse ratione AD ad DC, minor verò ratione AE ad EC.

Constructio & demonstratio.



Secetur axis AC in G, secundùm datam rationem H ad K, quę cùm ponatur maior ratione AD ad DC, & minor ratione AE ad EC, manifestum est AG lineam maiorem esse recta AD: minorem verò AE, ac proinde punctum G cadere inter polos D, E. erigatur igitur ex D ad peripheriam linea DB æqualis rectæ AG. Iunganturque puncta BE. dico factum esse quod petitur. cùm enim rectæ duæ DB, BE simul sumptæ sint æquales axi AC, sit autem per constructionem DB linea æqualis lineæ AG, erit BE reliqua æqualis reliquę GC: igitur DB est ad BE, vt AG ad GC, id est vt H ad K. Inclinauimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

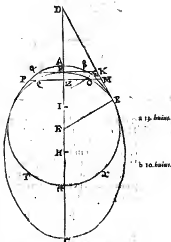
PRO-

PROPOSITIO CXXXII.

Ellipsim ABC contingat in B linea BD conueniens cum axe maiore CA, in D. ex B autem contactu, normalis ad contingentem ponatur BE, occurrens axi in E.

Dico EB lineam breuissimam esse illarum quæ ex E puncto ad peripheriam ellipseos duci possunt.

Demonstratio.



Centro E interuallo EB circulus describatur FBG occurrens axi in F & G. centrum ellipseos sit H. Quoniam DB ellipsim contingens cũ axe maiori conuenit in D, & angulus DBE rectus est, BE linea non transit per H. centrum ellipseos: si enim E centrum est, recta EB, normaliter ad contingentem posita axis erit coniugatus axi AC, (cùm æquidistantes omnes contingenti DB [a] bifariam & ad rectos diuideret.) adeòque DB æquidistaret axi AC: non igitur E centrum est ellipseos, nec EB diameter: quia verò DB cum axe conuenit ad partes A, EB linea [b] minor est semidiametro, sibi parallela: adeòque & minor est semiaxe HC, & multò minor rectâ EC, quare circulus radio EB descriptus, occurrit axi in G intra ellipsim, punctum igitur G, supra C est. Rursum cùm HC id est AH, maior sit ostensa quàm EB id est EG, ablato communi EH, manet AE maior quàm HG, posita autem EI æquali EH, recta FI æquatur HG, igitur AE quoque maior est FI: ablato ergo ex FE & AE, communi IE, manet IA maior quàm IF: vnde & F punctum cadit intra ellipsim infra A. vlterius ponatur per F, contingens FK, cui æquidistet PQNM, erit igitur vt MB quadratum ad quadratum BK sic [c] QMO rectangulum ad quadratum FK: sed vt MB quadratum ad quadratum BK [d] sic PMN rectangulum ad rectangulum αKβ; igitur vt QMO rectangulum ad quadratum FK sic PMN rectangulum est ad rectangulum αKβ: & permutando, inuertendo vt FK quadratum ad rectangulum αKβ, sic QMO, rectangulum est ad rectangulum PMN: est autem FK quadratum maius rectangulo [e] αKβ, igitur & QMO rectangulum maius est rectangulo PMN: iterum QMO rectangulum vnà cum quadrato ZO æquale est quadrato ZM, & PMN rectangulum vnà cum quadrato ZN, eidem quadrato ZM æquale est; æquale igitur est rectangulum QMO & vnà cum quadrato ZO, rectangulo PMN, vnà cum quadrato ZN; à quibus si inæqualia auferantur rectangula QMO, PMN, inæqualia remanent quadrata ZO, ZN: & quia QMO rectangulum maius est rectangulo PMN, quadratum ZO minus est quadrato ZN: & ZQ minus quadrato PZ; puncta igitur O & Q intra ellipsim sunt: similiter ostendentur puncta XT, & quæuis alia perimetri circuli FBG esse intra ellipsim; circulus igitur FBG totus intra ellipsim cadit: vnde cùm rectæ omnes ex E centro circuli ad ellipsis peripheriam ductæ priùs circulo occurrant quàm ellipsi: adeòque semidiametris eiusdem maiores sint: igitur EB, quæ in B puncto communi ellipsi & circulo terminatur omnium illarum breuissima est quæ ex E puncto ad ellipsis peripheriam duci possunt. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. huius.
[b] 10. huius.
[c] 35. tertij.
[d] 99. huius.
[e] 6. secundi.

PROPOSITIO CXXXIII.

A Puncto (H) in axe ellipseos assignato lineam ad perimetrum breuissimam ducere.

M
L
B
A D F H E C

Constructio & demonstratio.

SInt D, & E foci ellipseos. Axem A C seca in F, ita vt A F sit ad F C, sicut D H est ad H E. Tum ex polo ad perimetrum aptetur D B æqualis ipsi A F, iunganturq; H B. Dico H B esse breuissimam.

Ducatur enim ex polo B ad B recta E B. & L M tangens ellipsim in B, D B, B E ᵃ æquantur axi. sed D B æqualis est A F. ergo B B æqualis est F C. Ergo D B est ad B E, vt A F ad F C; hoc est ex constr. vt D H ad H E. ergo anguli D B H, E B H æquantur, æquantur ᵇ autem & anguli ad contingentem D B L, E B M, toti igitur anguli H B L, H B M æquales sunt; normalis igitur est H B ad tangentem, ergo per præcedentem breuissima omnium quæ ex puncto H ad perimetrum duci possunt. Factum igitur est quod petebatur.

a 13. sexti.

b 126. huius.

Si punctum F incidat in polum D, aut inter A, & D: tunc breuissima ex dato puncto H ad perimetrum erit pars axis, vt patet constructionem ac demonstrationem priorem considerenti.

PROPOSITIO CXXXIV.

IN data ellipsi circulum describere maximum eorum qui ellipsim in termino axis contingunt & ab ellipsi comprehenduntur.

A
D
F
G
B
E
C

Constructio & demonstratio.

POli ellipseos sint D &, E. Fiat vt C D ad D A, sic E F ad F D. Dico circulum centro F interuallo A descriptum eum esse qui petitur. Cùm enim ex const. sit C D, ad D A, vt E F ad F D, patet ex præced. F A esse breuissimam omnium, quæ à puncto F ad perimetrum duci possunt; circulus igitur centro F per A descriptus tangit ellipsim, quod erat primum; quod autem tangentium intra ellipsim maximus sit, sic ostendo. Sume vlterius punctum aliquod G pro centro maioris circuli, quoniam igitur E G est ad G D, in minori ratione quàm E F ad F D, hoc est quàm C D ad D A, sit exemp. grat. vt E G ad G D, sic C F ad F A: eritque F A necessariò maior quàm D A: adeoque punctum F cadet vltra polum D versus E: si igitur ex polo D ad perimetrum aptetur D B æqualis G A, iungaturque G B, patet ex præced. G B fore minimam omnium quæ ex G ad perimetrum ducuntur. Quare G A maior est quàm G B, circulus ergo centro G per A descriptus extra ellipsim cadit. similiter ostendemus quemlibet circulum alium maiorem circulo qui interuallo F A ante descriptus est, cadere

extra

extra ellipsim: ergo ille omnium intra ellipsim tangentium, maximus est. In datâ igitur ellipsi, &c. Quod erat faciendum.

Corollarium.

EX huius propositionis discursu clarè constat circulos omni interuallo descriptos quod minus est interuallo F A ellipsim intra contingere in puncto A. si centro inter F & A constituto pertingant vsque ad A. verticem axeos. Illi etenim circuli contingent eum qui radio F A descriptus est, eoque minores erunt; quare etiam ellipsim intra contingent cuius axis A C.

PROPOSITIO CXXXV.

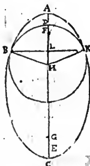
SIt A B C ellipseos axis maior A C & in illo poli D, E, fiatque vt C D ad D A sic E F ad F D, & D G ad G E.

Dico ex quouis puncto rectæ F G circulos posse describi qui ellipsim intus in duobus punctis contingant: centra verò illorum consistere inter F & G exclusis terminis.

Demonstratio.

SVmatur enim quoduis in F G recta punctum H, & ex H linea ducatur H B, breuissima illarũ a quæ ex H ad peripheriam duci poterunt; dein ex B ordinatim ad axem ponatur B L K, & iunge H K, H B, patet per elementa H K iunctam æquari H B, adeoque circulum centro H interuallo H B descriptum transire per K & B: & cùm H K, H B lineæ sint breuissimæ per constructionem, patet circulum B D K, totum cadere intra ellipsim ac proinde eam in B & K, punctis contingere. Quod autem centra circulorum ellipsim in duobus punctis contingentium consistant inter F & G exclusis terminis, ex eo patet quod F A, G C lineæ breuissimæ sint illarum quæ ex F & G, ad peripheriam duci poterunt, adeoque circuli centro F vel G, & interuallo quouis maiore quàm sit F A vel G C descripti ellipsim secent: radijs verò F A vel G C descripti b maximi sint, illorum qui ellipsim intus in vno tantum puncto contingunt.

a 133 huius.



b 134 huius.

PROPOSITIO CXXXVI.

EAdem manente figura: propositum sit in axe punctum designare quo centro circulus describatur, qui ellipsim in dato puncto intus contingat.

Constructio & demonstratio.

SIt datum in peripheria punctum B, per quod si acta intelligatur contingens, demittatur ex B linea B H, normalis ad tangentem, occurrens axi in H. Manifestum est c H punctum satisfacere petitioni. nam cùm c H B linea breuissima sit earum quæ ex H ad peripheriam duci possunt, continget circulus centro H interuallo H B descriptus ellipsim in d puncto B; igitur, &c. Quod erat faciendum.

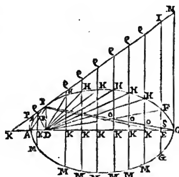
c 131. huius. d 135. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

Ellipseos axis ſit A, C, poli D, E, ex quibus ductæ ſint D B, E F G normales axi; ellipſim autem tangat K B I in B, occurrens axi in K, rectæ verò G F in I, iungaturque D F.

Dico rectangulum F I G quadrato D E æquale eſſe.

Demonſtratio.



a 129. huius.

b 110. huius.

c 121. huius.

Qvoniam D B, E B ductæ ſunt è polis ad contactum, anguli K B D, I B E [a] æquales ſunt. ſed, quia D B, E I parallelæ, angulus K B D angulo E I B æqualis eſt, æquantur igitur anguli I B E, E I B, ergo B E, I E æquales ſunt. Deinde quia rectangula C E A, C D A [b] æqualia ſunt, etiã quadrata E F, D B ſunt æqualia, adeoque & rectæ E F, D B æquales. Quare cùm D B, B E [c] æquentur E F, F E, etiam B E, D F æquales erunt. Atqui B E oſtenſa eſt æqualis E I. ergo & D F eſt æqualis E I, & quadrata proinde D F, E I æqualia ſunt. ſed quadrata D E, E F, æquantur quadrato D F: & quia G F biſecta eſt in E eique adiecta F I, rectangulum G I F cum quadrato E F æquatur quadrato E I. quadrata ergo D E, E F æquantur rectangulo G I F cum quadrato E F. Dempto igitur communi quadrato E F, remanent æqualia rectangulum G I F & quadratum D E. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXVIII.

Iiſdem poſitis ducantur quotcunque aliæ Q, H, K, M, normales axi. Dico rectangula H, Q, M, quadratis D K eſſe æqualia.

Demonſtratio.

Ellipſim tangat C N in C, occurrens tangenti B N in N, ducaturque B C ſecans Q M in O, & I G in S. quoniam N C, I G, Q M ſunt normales axi, æquidiſtant. ergo per ea quæ propoſ 99. huius demonſtrauimus, rectangulum F I G, æquatur quadrato S I, & rectangulum H Q M quadrato Q O æquale eſt: quare vt quadratum I S ad quadratum Q O, hoc eſt vt quadratum S B ad quadratum O B, hoc eſt vt quadratum E D ad quadratum K D, ita rectangulum F I G ad rectangulum H Q M, & permutando vt rectangulum F I G ad quadratum E D, ita rectangulum H Q M ad quadratum K D, ſed rectangulum F I G per præced. æquatur quadrato E D. Ergo rectangulum quoque H Q M æquatur quadrato K D.

Similiter demonſtrabimus ad alteram partem poli D, rectangula H Q M quadratis K D eſſe æqualia. tangat enim ellipſim A P, in A occurrens tangenti in P, & tactus iungat A B ſecans Q M in R. in triangulo B C N, Ducatur aliqua Q O, parallela N C normali ad axem, ita ſe habens ad Q B, vt Q R eſt ad Q B. erit igitur permu-

permutando vt QB ad BQ hoc est vt KD ad DK, ita QO ad QR. ergo vt quadratum KD ad quadratum DK, ita quadratum QO ad quadratum QR, hoc est[a] rectangulum HQM ad rectangulum HQM. permutando igitur vt rectangulum HQM ad quadratum KD, ita rectangulum HQM ad quadratum DK. Atqui suprà demonstratum est rectangulū HQM (illud nempè quod est versus C) æquari quadrato KD, ergo rectangulum quoque HKM quod est versus A, æquatur quadrato DK. Omnia igitur rectangula HKM, &c. Quod erat demonstrandum. [a] Inde prop. 99. huius.

Corollarium.

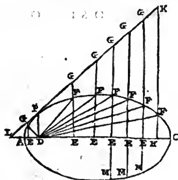
EX discursu demonstrationis iam allatæ licet colligere quadrata tangentium CN, AP, quadratis CD, DA esse æqualia.

PROPOSITIO CXXXIX.

DAta sit ellipsis cuius axis AC, poli D, H, ex polo D ducta sit ad perimetrum DP normalis axi, & in P ellipsim tangat linea GPG. Ducantur autem quotcunque normales axi GFE, iunganturq; DF, DF.

Dico lineas omnes DF, lineis omnibus GE æquales esse.

Demonstratio.



PRoducatur vna rectarum GE in M. per præced. rectangulum FGM æquatur quadrato DE. addito igitur communi quadrato EF, æquantur quadrata DE, EF, hoc est quadratum DE, rectangulo FGM cum quadrato EF, hoc est,[b] quadrato GE. Quia igitur quadratum DF æquatur quadrato GE, etiam recta DF rectæ GE æqualis est. Eodem discursu reliquæ omnes DF, reliquis omnibus GE æquales sunt. Quod erat demonstrandum. [b] 6. secundi.

In libro de hyperbola, tria sequentia theoremata licet sint demonstranda quòd ab hyperbolę proprietatibus dependeant, ob miram tamen eum ellipticis affectionibus connexionem visum est non alienum hoc loco proponere.

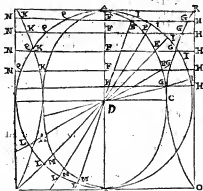
PROPOSITIO CXL.

EAdem manente figura, si rectis DF è polo ductis æquentur lineæ EFG normales ad axem AC.

Dico lineam per puncta G ductam esse rectam quæ ellipsim contingat in P.

Demonstratio manifesta est ex propositione præcedenti.

PROPOSITIO CXLI.

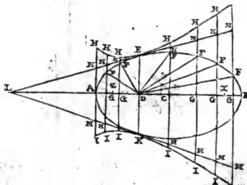


Ata sit ellipsis axem habens AB, centrum D sumatur in axe punctum quod primò sit centrum ellipseos, ex eo ducatur ad perimetrum normalis axi DC ac deinde quotcunque aliæ DE, DE: quibus æquales fiant lineæ FEG axi normales.

Dico lineam per puncta G descriptam esse hyperbolam quę idem habeat cum ellipsi centrum D, eamque contingit in C.

Demonstrationem vide in lib. de hyperbola.

PROPOSITIO CXLII.



Ata sit ellipsis axem habens AB, centrum C, polos X, Z. in axe sume punctum aliquod D inter centrum C & polum D, ex quo ducatur ad perimetrum DE normalis axi, ac deinde quæuis aliæ DF, DF; quibus æquales fiant GFH axi normales.

Dico lineam per puncta H, H descriptam esse hyperbolam, quæ ellipsim tangat in F.

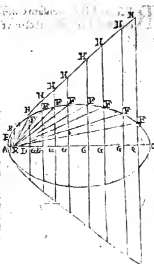
Demonstrabitur in libro de hyperbola.

PRO-

PROPOSITIO CXLIII.

DAta rursum sit ellipsis axem habens A C, polos D, Q, in axe sumatur punctum E inter polum D & verticem A, ex quo ducatur ad perimetrum normalis axi E B : & quotuis aliæ E F, quibus æquales fiant G F H axi normales.

Dico lineam quę per puncta H describitur hyperbolam esse quæ ellipsim ambiat & tangat in puncto B.

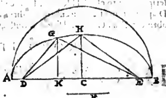


Demonstrationem dabimus in libro de hyperbola.

PROPOSITIO CXLIV.

DAtâ basi aggregato laterum & altitudine triangulum exhibere.

Constructio & demonstratio.



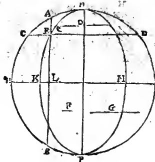
DAto aggregato laterum ponatur A B, æqualis, qua bifariam diuisa in C fiat D E æqualis basi trianguli bifariam diuisæ in C sic vt vtrimque relinquantur æquales A D, B E, altitudini autem sit æqualis F, ex lateribus A C, C B, D E fiat triangulum D H E: (nam A C, C B, simul sumptæ maiores sunt D E,) erit D H E Isosceles. Deinde fiat vt quadratum H C ad F quadratum, ita rectangulum A C B ad A K B, & erigatur K G æqualis F parallela H C, & iungantur D G, G E. Dico D G E, esse triangulum quæsitum. quoniam A C B, rectangulum est ad A K B rectangulum, vt quadratum H C ad quadratum F, hoc est G K, quadratum, erunt puncta A, G, H, B ad eandem ellipsim cuius A B, est axis: & quia A D, ipsi E B, itemque D H, H E, æquales sunt ipsi A B, erunt D E, a puncta ex cōparatione facta siue foci ellipseos, quare D G E, latera æqualia sunt axi A B, hoc est aggregato laterum estque basis data D E, & altitudo F hoc est G K. Igitur exhibuimus triangulum quod quærebatur.

a Coroll. 121. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXLV.

RECtam A B, ſubtenſam cuiuſuis arcus circuli A B C, alterâ ſecare C D, eidem ad angulos rectos vt C E ad E D, datam obtineat rationem F ad G.



Conſtructio & demonſtratio.

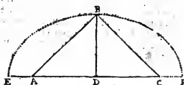
Libro de circulorum proprietatibus propoſuimus hoc problema: ſed quoniam eius demonſtratio ab elliptica proprietate dependet, idcirco in hunc locum eam diſtulimus, conſtructio vera eſt. Ducatur diameter H I normalis ad A B, ſecans A B, in L. Fiatque vt F ad G, ſic H K ad K I: ſumptâ deinde I M æquali ipſi H K, diuidatur diameter H P, in O punćto vt diuidatur K M in L: deinde rectangulo N O P, fiat æquale quadratum L E; tandem ducatur per E, recta normalis C E D. Dico C E D, diuiſam in E, ſecundùm rationem F ad G. Quoniam ſunt lineæ N P, K M ad angulos rectos bifariam diuiſæ; igitur deſcripta ponatur circa illas tamquam axes ellipſis N K P, erunt itaque O Q, L E, ordinatim poſitę ad ſingulos axes: & quia axes ſimiliter diuiſæ ſunt in O & L, eſtque rectangulum N O P æquale qua-

a 74. huius. drato L E, patet a punctum E eſſe ad ellipſim per puncta N, K, P, M deſcriptam. ergo eſt vt H K ad K I, hoc eſt vt F ad G, ſic C E ad E D, patet rectam D applicatam eſſe in circulo normaliter ad C D, vt C E ad E D datam rationem obtineat F ad G. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLVI.

DAta recta A C & altitudine B D, ellipſim deſcribere cuius poli ſint A, & C.

Conſtructio & demonſtratio.



FIat ſuper A C linea in altitudine B D triangulum iſoſceles A B C, dein A C linea vtrimque æqualiter producatur in E & F: vt tota E F ſit æqualis duabus A B, B C, tum per E, B, F, puncta ellipſis deſcribatur: dico illam eſſe quæ petitur. Quoniam E F linea diuiſa eſt bifariam in D & non bifariam in A: erit E A F b rectãgulum vnà cum quadrato A D, æ-

b 5. ſecundi. quale quadrato E D hoc eſt per conſtructionem quadrato A B; ſed etiam quadrato A B æqualia ſunt quadrata A D, B D; dempto igitur communi quadrato A D, manet E A F rectângulum æquale quadrato B D id eſt quartæ parti figuræ. eodem

c Ex 120. huius. modo oſtenditur quadrato B D æquari rectangulum F C E: quare c A & C, foci ſunt deſcriptæ ellipſeos E B F. data igitur linea & altitudine, &c. Quod erat faciendum.

Corol-

Corollarium.

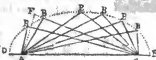
HInc sequitur dato quouis triangulo isosceli ABC continente ad verticem, angulum quemcunque, describi posse ellipsim cuius foci sint extrema basis trianguli dati ABC. demonstratio patet ex propositione.

PROPOSITIO CXLVII.

SVper AC linea descripta sint quotcunque triangula isoperimetra ABC, AGC.

Dico puncta G, B, B esse ad eandem ellipsim cuius poli sint A & C.

Demonstratio.



PRoducatur AC vtrimque æqualiter in D & E, vt tota DE sit æqualis duabus AB, BC, tum per puncta D, E, G ellipsis describatur, dico illam transire per reliqua puncta B, B. sin verò; transeat supra vel infra B. ac primum supra per punctum F, productâ CB donec peripheriæ occurrat in F, iungantur AF. quoniam igitur GF puncta ad ellipsim sunt, cuius a poli A & C, erunt AGC, AFC triangula b isoperimetra: est autem AGC triangulum per constructionem isoperimetrum triangulo ABC; igitur AFC, ABC triangula sunt isoperimetra. quod fieri non potest. quare DGE, ellipsis non transit supra B, sed nec infra B, cadere eodem modo demonstrabitur. ergo per B, B puncta; igitur GBB sunt ad ellipsim cuius poli sunt A, C. Quod erat demonstrandum.

a Patet ex praecedenti.
b Patet ex 121.

ELLIPSEOS

PARS QVINTA

Varias exhibet ellipsis geneses.

PROPOSITIO CXLVIII.

SIt AB linea vtcunque diuisa in C, & ex C quotcunque erigantur parallelę CD, fiatque vt ACB rectangulum ad rectangulum ACB sic DC quadratum ad quadratum DC. Dico ADB puncta esse ad eandem ellipsim vel circulum.

Demonstratio.

AB bisecta in G, erigatur GE parallela ipsis CD; fiatque vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB, sic quadratum CD ad quadratum GE, intelligatur deinde descripta esse ellipsis cuius diametri coniugatæ sint AG, GE: si ergo ellipsis non transit per punctum D, occurrat rectę CD supra vel infra D in F. quia AG, EG sunt diametri coniugatæ; erunt DC, ipsi EG parallelæ ordinatim positæ ad diametrum AB. Quare cùm ellipsis dicatur transire per F, erit [a] quadratum FC ad quadratum EG vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB, hoc est ex constr. vt quadratum DC ad quadratum EG: Quod est absurdum. non igitur punctum vllum F supra aut infra D, est ad ellipsim, sed ipsum D punctum ad ellipsim est. sumatur iam aliud quodlibet punctum D, exempli gratia punctum propius sequens; si rursum ellipsis non transit per D, occurrat rectæ CD supra vel infra D in M. Quoniam est ex hypothesi vt quadratum DC ad quadratū DC, sic rectangulum ACB ad rectangulum ACB, & ex constr. vt quadratum DC ad quadratū EG, ita rectangulum ACB ad rectangulum AGB: erit ex æquali vt quadratum DC ad quadratum EG, ita ACB rectangulū ad rectangulum AGB: sed etiam est quadratum MC ad quadratum EG, vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB cùm punctum M ponatur esse ad ellipsim. Ergo quadrata DC, MC ad quadratum EG, eandem habent rationem. Quod est absurdum. Non igitur punctum M aut aliud vllum præter D ad ellipsim est. simili discursu reliqua puncta D ad ellipsim esse demonstrabimus. ex quibus constat veritas Theorematis.

[a] 24. huius.

PROPOSITIO CXLIX.

SIt ABC triangulum quodcunque, diuisoque latere BC vtcunque in punctis DD: ducantur ex D rectæ DE parallelæ AB, & ex A demittantur lineæ EF sic vt quadrata EF, sint BDE rectangulis æqualia. Dico puncta A, F, C esse ad eandem ellipsim.

Demon-

Demonstratio.

VT BDE rectangulum ad rectangulum BDE, sic BDC, rectangulum est ad rectangulum BDC, hoc est rectangulum AEC ad rectangulum AEC: sed vt BDE rectangulum est ad rectangulum BDE, sic EF quadratum est ad quadratum EF, igitur vt rectangulum AEC est ad rectangulum AEC, sic EF quadratum est ad quadratum EF. ergo a AFC, puncta sunt ad ellipsim. a Per 149. huius.

PROPOSITIO CL.

SIt AB, CD parallelogrammi diameter AC, ducanturq; AB lateri quotcumque parallelæ FG, secantes AC lineam in E: dein fiant inter FE, EG mediæ EH.

Dico puncta A, C, & omnia puncta H esse ad eandem ellipsim, nisi sint ad circulum.

Demonstratio.

RAtio FEG rectanguli ad rectangulum FEG est composita ex ratione FE ad FE, id est AE ad AE, & ex EG ad EG, id est EC ad EC: sed ex iisdem componitur ratio rectanguli AEC ad AEC, rectangulum, igitur vt FEG rectangulum ad rectangulum FEG, hoc est quadratum EH ad quadratum EH, sic AEC rectangulum est ad rectangulum AEC. quare b AH, HC puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum. b Ibid.

Corollarium.

SI AB recta sit normalis ad AC, & illi fuerit æqualis, erunt AHH puncta ad eundē circulum: erit enim AEC rectangulum æquale rectangulo FEG hoc est quadrato EH. adeoque puncta HH ad circulum.

PROPOSITIO CLI.

SEcent se in E duæ quæuis lineæ A B, C D quas cõiungant duæ parallelæ A D, B C; iungantur item puncta A C: tum rectæ ducantur F G parallelæ lineis A D, B C, occurrentes A B lineæ in H H, fiantq; H G F, rectangulis æqualia quadrata G I.

Dico puncta I, I, I esse ad ellipsim.

Demonstratio.

RAtio H G F rectanguli ad rectangulum H G F est composita ex ratione H G ad H G, id est A G ad A G, & ex ratione F G ad F G, id est G C ad G C: sed ex iisdem est composita ratio rectanguli A G C ad A G C. igitur vt H G F rectangulum est ad rectangulum H G F hoc est quadratum I G ad quadratum I G, sic A G C rectangulum est ad rectangulum A G C: quare I, I puncta[a] sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

a 149 huius.

Corollarium.

DVcatur ex E puncto intersectionis recta E K parallela lineæ A D: si A K, E K, K C fuerint continuæ, & E K linea normalis ad rectam A C. dico I, I, puncta esse ad circulum. cùm enim sit vt A K C rectangulum ad A G C rectangulum, sic E K quadratum ad quadratum I G: (id enim eodem discursu probabimus, quo rectangula A G K ostendimus esse ad rectangula A G K vt quadrata G I ad quadrata G I.) erit permutando vt A K C rectangulum ad quadratum E K sic A G C rectangulum ad quadratum G I. adeoque quadratum I G æquale rectangulo A G C. igitur, I, I sunt ad circulum.

PROPOSITIO CLII.

SIt A B C semicirculi diameter A C, diuisa vtcunque in D D, & ex D normales erigantur D E, fiantque vt B D ad B D, sic E D ad E D.

Dico puncta E, E esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.

VT quadratum D B ad quadratum D B, sic E D quadratum est ad quadratum E D: sed vt quadratum B D ad quadratum B D sic A D C rectangulum est ad rectangulũ A D C: igitur vt quadratum E D ad quadratum E D sic A D C rectangulum ad rectangulum A D C. Quare[b] E, E puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

b Ibid.

PRO-

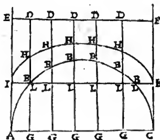
PROPOSITIO CLIII.

SVper ABC semicirculi diametro AC rectangulum describatur AF: ductisque lineis DG parallelis lateri AE quæ circulo occurrant in BB, ducatur quæuis IK parallela rectæ ED occurrens DG lineis in LL. fiatque vt AI ad IE sic BH ad HD.

Dico puncta HH esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.

VT AE ad AI, hoc est GD ad LD, sic BD est ad DH, igitur permutãdo diuidendo, iterumque permutando vt GB ad LH, sic BD ad DH, atqui BD est ad HD, vt BD ad HD, sunt enim ambæ rationes BD ad HD, eædem rationi AE ad IE. quare vt GB ad LH, sic GB ad LH: & permutando vt GB ad GB, sic LH ad LH: & vt quadratum GB ad quadratum GB, sic LH quadratum ad quadratum LH: est autem vt quadratum GB ad quadratum GB sic AGC rectangulum ad rectangulum AGC, id est ILK, rectangulum ad rectangulum ILK, igitur vt LH, quadratum est ad quadratum LH, sic ILK rectangulum est ad rectangulum ILK: quare [a] H,H puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum. [a] *Ibid.*



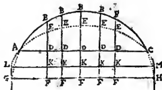
PROPOSITIO CLIV.

SIt ABC segmentum circuli quodcunque, cuius AC subtensa, diuisa vtcunque in DD, erigantur ex D normales DB, fiatque vt BD ad BD sic ED ad ED.

Dico puncta E,E esse ad ellipsim.

Demonstratio.

PErfecto semicirculo ABC: ducatur GH diameter circuli GBH parallela lineæ AC, quæ BD, lineas productas secet in FF: fiatque vt BD ad DF, sic ED ad DK: tum ex G & H rectæ erigantur GL, HM parallelæ lineis BF secantes KK lineam in L & M. Quoniam est vt BD ad DF, sic DE ad DK, erit permutando, vt BD ad ED, sic DF ad DK. Atqui BD est ad DE, vt BD ad DE. igitur vt DF ad DK, sic DF ad DK: quare puncta K,K ad eandem lineam, & quidem parallelam lineæ GH. Rursum cùm sit vt BD ad DF, ita ED ad DK, erit componendo & permutando BF ad EK, vt DF ad DK. igitur vt BF ad EK, sic BF ad EK, & rursum permutando, vt BF ad BF, sic EK ad EK, & vt qua-



 dratum

quadratum BF ad quadratum BF, sic EK, quadratum ad quadratum EK: sed vt BF quadratum ad quadratum BF, sic HFG rectangulum est ad rectangulum HFG, id est MKL rectangulum ad rectangulum MKL, igitur vt MKL rectangulum ad rectangulum MKL sic quadratum EK ad quadratum EK. quare [a] E, E puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

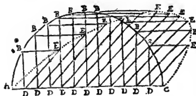
a 129. huius.

PROPOSITIO CLV.

Esto ABC semicirculi diameter AD, quam in D secent quotcunque normales BD: dein rectis BD fiant æquales BE parallelæ diametro AC.

Dico puncta E, E esse ad ellipsim cuius diameter est AC.

Demonstratio.



Ducantur rectæ DE. quoniam anguli BDC recti sunt, & BE parallelæ, anguli quoque DBE erunt recti. quadrata igitur DE, æquantur quadratis, BD, BE, hoc est quia BD, BE sunt æquales, dupla sunt quadratorum BD. ergo vt quadratum BD ad quadratum BD, hoc est vt rectangulum ADC ad rectangulum ADC, ita quadratum DE ad quadratum DE. Sunt verò & DE rectæ inter se parallelæ: cùm enim anguli DBE recti sint, & latera BD, BE æqualia, erunt BDE semirecti. cùm ergo etiam BDC rectus sit, reliqui EDC sunt semirecti, adeoque æquales: vnde DE parallelæ. Puncta igitur E, E [b] sunt ad ellipsim. Quod autem AC sit diameter, facile apparebit si perfecto circulo ellipsis eadem constructione ad partem alteram producatur, tunc enim parallelæ omnes DE à recta AC bifariam diuidentur.

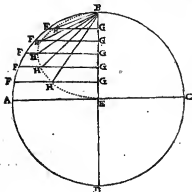
b ibid.

PROPOSITIO CLVI.

Circulum ABC secent ad angulos rectos diametri AC, BD ductisque rectis FG quę AC, diametro æquidistent, demittantur ex B lineæ BH æquales rectis FG secantes FG lineas in HH.

Dico puncta B, H, E esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.



Quoniam FG quadrato æquale est rectãgulũ BGD hoc est BGE, [a] rectangulum bis sumptum vnà cum quadrato BG, erit & quadratum HB æquale rectangulo BGE bis sumpto vnà cum quadrato BG: sed HB quadratum est æquale quadratis HG, BG, ablato igitur communi quadrato BG manet HG, quadratum æquale rectangulo BGE bis sumpto. similiter reliqua quadrata HG dupla sunt rectan-

rectangulorum B G E ; igitur vt quadratum H G ad quadratum H G : sic B G E rectangulum est ad rectangulum B G E. quare puncta B, E, & omnia puncta H, ad eandem sunt ellipsim. Quod erat demonstrandum.

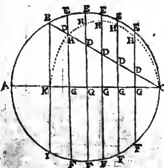
PROPOSITIO CLVII.

Esto A B C circuli diameter A C & ex C recta quæuis ducta C B occurrant circuli perimetro in B, dein ex B demissa recta B I quæ A C, diametrum ad rectos angulos secet in K. ducantur quotcunque lineæ E F parallelæ rectæ B I occurrentes A C diametro in G, & lineæ B C in D: fiantque E D F rectangula æqualia quadratis G H.

Dico K H C puncta esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.

Vt E D F rectangulum ad rectangulum E D F, sic B D C rectangulum est ad rectangulum B D C ; id est rectangulum K G C ad rectangulum K G C : sed (quemadmodum alternando patet ex hypothesi) vt E D F rectangulum ad rectangulum E D F ; sic H G quadratum est ad quadratum H G : igitur vt K G C rectangulum est ad rectangulum K G C, sic H G quadratum est ad quadratum H G. quare K H C puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.



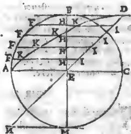
PROPOSITIO CLVIII.

Secent A B C circulum ortogonaliter diametri A C, B E actaq; per B tangente B D : ducatur per E centrum recta quæuis E D, occurrens tangenti B D in puncto quouis D. dein rectæ ducantur F H I, parallelæ tangenti B D, occurrentes E B diametro in H H, & E D lineæ in I, I: fiatque vt F H ad F H, sic I K ad I K.

Dico A K D puncta esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.

Producta B E diametro in M. producatur & D E linea donec actæ per M tangenti occurrat in N. Quoniam B D, N M, H I lineæ æquidistant, erit vt rectangulum B H M ad rectangulum B H M, sic D I N rectangulum ad rectangulum D I N ; sed est vt B H M rectangulum ad rectangulum B H M, sic F H quadratum ad quadratum F H, id est quadratum I K ad quadratum I K : igitur vt D I N rectangulum ad rectangulum D I N, sic est quadratum I K ad quadratum I K. quare A K D puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.



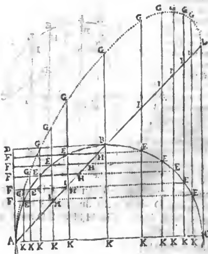
PRO-

PROPOSITIO CLIX.

Circulum A B C cuius diameter A C contingant duæ lineæ A D, B D secantes sese ortogonaliter in D: iunctisque punctis A B, agatur per C tangens C L, occurrens A B lineæ in L. dein rectæ ducantur quotcunque F E parallelæ lineę D B occurrentes A B lineæ in H H: & circulo in E E. tum per E rectæ ducantur G K parallelę lineæ A D occurrentes A C diametro in K & A L lineæ in I I. fiantque F E lineis æquales E G.

Dico puncta A G L esse ad ellipsim.

Demonstratio.



Vt A D est ad D B, sic A F est ad F H: sed A D, D B lineæ sunt æquales, igitur & A F, F H lineæ æquantur. quare & E K, F H lineæ sunt ęquales. Rursum cùm sit vt A F ad F H, sic E I ad E H, erunt E I, E H lineæ inter se æquales: est autem ex constructione F E linea æqualis lineæ E G: igitur tota I G, est æqualis toti F H, hoc est F A id est E K. quare vt quadratum E K ad quadratum E K, sic I G quadratum est ad quadratum I G. sed vt E K quadratum est ad quadratum E K, sic A K C rectangulum est ad rectangulum A K C. id est A I L rectangulum ad rectangulum A I L, igitur vt quadratum I G est ad quadratum I G, sic A I L rectangulum est ad rectangulum A I L. Quare A G L puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

Quod si eadem constructio ad alteram partem continuetur, perficietur ellipsis, altera sui parte, quæ intra circulum cadet. Vbi hoc notatu dignum occurrit, quod licet circulus & ellipsis sese inuicem secent, eandem tamen rectam D A in sectionis mutuæ puncto A contingant. Quod enim circulus contingat rectam A D patet ex hypothesi: quod eandem contingat etiam ellipsis, inde fit manifestum quod omnia perimetri elliptici puncta sint in lineis G K quæ inter puncta C & A, ipsi D A ducuntur parallelæ.

PROPOSITIO CLX.

Secent se duo circuli A B C, A D C vt illorum alter A B C transeat per E centrum circuli A B, iunctisque punctis A C ducantur ex E lineæ quæcunque E F occurrentes circulo A B C in punctis F & A D C circulo in punctis G: tū per G rectæ agantur H I normales ad lineam A C,

occur-

occurrentes A C lineæ in HH, & circulo ABC in II: fiantq; rectis GF æquales lineę GL.

Dico puncta A L L esse ad ellipsim.

Demonstratio.

Dvcantur ex C per G lineæ CGK. vt KGC rectangulum est ad rectangulum KGC, sic a FGE rectangulum est ad rectangulum FGE: sed est b vt KGC rectangulum ad rectangulum KGC, sic GH linea ad lineam GH, & vt FGE rectangulum ad rectangulum FGE, sic FG linea ad lineam FG, igitur vt GH ad GH, sic FG ad FG, id est LG ad LG, & componendo permutando LH ad LH, vt GH ad GH. Quare puncta ALL sunt ad ellipsim.

a Per elementa. b Coroll 14. lib. de circulo.

PROPOSITIO CLXI.

Sit ABC ellipsis diameter quæcunque AB, actisque per A lineis C D, quę ellipsi occurrant in CC. fiat vt A C ad AC, sic AD ad AD, & vt AC ad AD, sic AB ad AE.

Dico puncta A, D, E ad eandem ellipsim esse.

Demonstratio.

Qvoniam DG, FG sunt parallelæ, triangulaque proinde FCA, DGA similia; erunt vt lineæ CA ad lineas AD singulæ ad singulas, ita singulæ FC ad singulas GD. Atqui singulæ CA sunt ad singulas AD vt BA ad AE. Ergo singulæ FC sunt ad singulas DG, vt BA ad AE. Quare quam rationem habet vna FC ad vnam DG, eandem habent singulæ reliquæ FG ad singulas reliquas DG. Igitur permutando vt sunt FC ad FC, ita GD sunt ad DG, adeoque vt sunt quadrata FC ad quadrata FC, ita quadrata GD sunt ad quadrata GD. similiter demonstrabimus, vt AF sunt ad AF, sic esse AG ad AG. Vnde vt reliquæ FB sunt ad reliquas FB, ita reliquæ GE sunt ad reliquas GE. Quare cùm rectangula AFB rationem habeant ad sese inuicem compositam ex rationibus AF ad AF, & FB, ad FB, quæ ostensæ sunt eædem esse rationibus AG ad AG, & GE ad GE, ex quibus componitur ratio rectangulorum AGE; erunt vt rectangula AFB ad rectangula AFB, sic rectangula AGE, ad rectangula AGE. Atqui rectangula AFB sunt ad rectangula AFB, vt quadrata FC ad quadrata FC, hoc est per superiùs demonstrata, vt quadrata GD ad quadrata GD. ergo rectangula AGE sunt ad rectangula AGE, vt quadrata GD ad quadrata GD. Puncta igitur DA; ADE sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

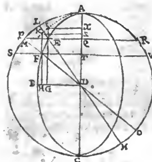
Esto ABC ellipsis diameter quæuis AB, diuisa vtcunque in D: & ex D ad peripheriam rectæ ducantur DC, DF quæ proportionaliter diuidantur in E & G: dein AD diuidatur in L, & DB in M, vt DC, DF diuisę sunt in E & G.

Dico LEGM puncta esse ad ellipsim.

Demonstratio.

Dvcantur ex C & F ordinatim lineæ CH, FI ad AB, diametrum quibus ex E & G parallelæ ducantur EK, GN vt DC ad DE, sic DF ad GD, igitur vt CH ad EK, sic FI ad GN, & EK ad GN, vt CH ad FI: igitur & quadratum EK ad quadratum GN, vt CH quadratum ad quadratum FI. Deinde, quoniam DI est ad DN, vt DF ad DG, & DA est ad DL, vt DF ad DG, erit vt DI ad DN, sic DA ad DL, ergo vt vna antecedens DI ad vnum consequens DN, (hoc est vt DF ad DG, hoc est vt DC ad DE, hoc est vt DH ad DK) ita ambæ antecedentes, hoc est tota AI ad ambas consequentes, hoc est totam LN. similiter inferemus AH esse ad LK, vt DH ad DK. Vnde AI est ad LN, vt AH ad DK, & permutando AI est ad AH, vt LN ad LK. præterea, quoniam est vt DF ad DG (hoc est vt tota DB ad totam DM) sic ablata DH ad ablatam DN, erit & reliqua IB ad reliquam NM, vt tota DB ad totam DM. Similiter inferemus HB esse ad KM, vt DB ad DM. Ergo IB ad NM, vt HB ad KM, permutando igitur ac inuertendo HB ad IB, vt KM ad NM. Cùm igitur ostenderimus rationes AH ad AI, & AK ad AN, item rationes HB ad IB, & KM ad NM easdem esse, rationes quoque rectanguli AHB ad rectangulum AIB, & rectanguli AKB ad rectangulum ANB, ex rationibus illis æqualibus compositæ, eædem erunt. sed rectangulum AHB est ad rectangulum AIB, vt quadratum CH ad quadratum FI, hoc est per superius demonstrata vt quadratum EK ad quadratum GN. Ergo rectangulum LKM est ad rectangulum LNM, vt quadratum EK ad quadratum GN. ergo puncta L, E, G, M sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIII.

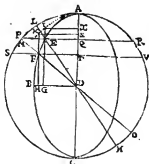


Sint ABC ellipsis axes AC, BD: ductisque ex D semidiametris quibusuis DE, DF, agantur per E & F lineæ IG, KH æquales ipsis ED, FD, parallelę verò axi AC, occurrentes axi BD in G & H.

Dico puncta AIK esse ad ellipsim. cuius axis.

Demonstratio.

Svper AC vt diametro describatur circulus ALC, & DE, DF lineæ vtrimque producantur donec circuli perimetro occur-



occurrant in L, M, N, O: actisque per E & F, lineis PER, SFV quæ circulo occurrant in R, V & AC diametro in Q & T, & æquidistent axi BD, ducantur ordinatim ad axem AC lineæ IX, KZ. Quoniam PER, SFV lineæ in E & F, proportionaliter sunt diuisæ, ratio rectanguli PER ad rectangulum SFV duplicata est rationis PE ad SF, adeoque erit PER rectangulum ad rectangulum SFV vt quadratum PE ad quadratum SF id est vt quadratum EQ ad quadratum FT, id est vt quadratum IX ad quadratum KZ. Quare cùm rectangula LEN, PFO æqualia sint rectangulis PER, SFV, etiam LEN rectangulum est ad rectangulum MFO, vt quadratum IX ad quadratum KZ: deinde cùm IG hoc est XD sit æqualis ED, & DC æqualis DN, erit XC æqualis EN. est verò & tota AC æqualis toti LN. ergo reliqua AX reliquæ LE æqualis est: adeoque AXC rectangulum æquale rectangulo LEN: eodem modo ostenditur rectangulum AZC æquari rectangulo MFO, erit igitur vt AXC rectangulum ad rectangulum AZC, sic quadratum IX ad quadratum KZ. Quare [a] AIKC, puncta ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

a 148. huius.

ELLIPSIS
PARS SEXTA

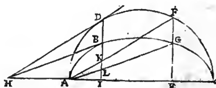
Circulum cum ellipsi comparat.

PROPOSITIO CLXVIII.

HAbeant ABC ellipsis, & circulus ADC communem axem AC, ductaque ordinatim EF, occurrat circulo in F & ellipsi in G: iunganturque AF, AG. dein ductâ DH parallelâ AF quæ circulum contingat in D, occurratq; axi in H; demittatur ex D ordinatim linea DI ad diametrum AC secans ellipsim in B & AF, AG, in K & L: iunganturque HB.

Dico AG lineam æquidistare rectæ HB.

Demonstratio.



a Schol. prop. 4. huius.

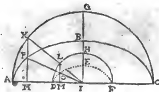
VT EG ad EF, sic IL est ad IK. sed a vt EG ad EF, sic IB est ad ID, igitur vt IL ad IK, sic IB ad ID; & permutando vt IK ad ID, sic IL ad IB, est autem vt IK ad ID, sic IA ad IH (quia AF, HD ex hypothesi æquidistant) igitur vt IL ad IB, sic IA ad IH. quare AG, HB lineæ sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIX.

SInt ABC, DEF ellipses similes, similiterque ad idem centrum I constitutæ: & super AC, DF diametris, circuli describantur AGC, DHF: ponatur autem ex centro quædam IK occurrens circulis in L & K, punctis, è quibus normales demissæ LM, KN, secent ellipses in O & P: ducanturque lineę IO, OP.

Dico esse vt IL ad LK, sic IO ad OP.

Demonstratio.



ERigatur ex I centro normalis IG occurrens ellipsibus in E, B, circulis verò in H & G. Quoniam tam circuli AGC, DHF quàm ellipses ABC, DEF similes sunt similiterque ad idem centrũ constitutæ, vt IG ad IB, sic IH est ad IE, sed vt GI ad BI, sic KN ad PN, &

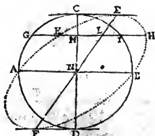
& vt HI ad EI, sic LM ad OM: igitur vt KN ad PN, sic LM est ad OM, & permutando vt KN ad LM, hoc est IN ad IM, sic PN ad OM. in directum igitur sunt I, O, P. Quare cùm KN, LM ad AC, sint perpendiculares, ac proinde inter se parallelæ, erit vt IL ad LK, sic IO ad OP. Quod erat demonstrandũ.

PROPOSITIO CLXX.

Circulum ABC secent diametri duæ AB, CD ad rectos sese angulos decussantes, actæque per C & D lineę quę circulum contingant in C & D, contingant etiam ellipsim AEB cuius aliqua sit diameter AB. dein quæuis ducatur GH parallela CE, occurrens circulo in G & I, ellipsi verò in K & H, & CD lineę in M.

Dico lineas GI, HK esse æquales.

Demonstratio.



EX contactu ponatur ad centrum EN, quæ [a] producta incidet in punctum contactus F ad hanc diametrum, vt patet ex alibi hoc in libro demonstratis, erunt ordinatim positæ KH, AB, vnde rectangulũ ELF est ad rectangulum ENF, vt quadratum LH ad quadratum NB, sed rectangulum ELF est ad rectangulum ENF, vt rectangulum CMD ad rectangulum CND, (cùm enim CE, DF [b] & KH ex hypothesi sint parallelæ, rectangulorum illorum rationes ex ijsdem rationibus componuntur,) & rectangulum CMD, est ad rectangulum CND, vt quadratum MI ad quadratum NB, quadratum igitur MI est ad quadratum NB, vt quadratum LH ad quadratum NB; æquantur ergo quadrata MI, LH, adeoque & rectæ MI, LH earumque duplæ GI, KH æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

[a] Patet ex 15. huius.

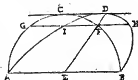
[b] 15. huius.

PROPOSITIO CLXXI.

Semicirculum ABC cuius diameter AB & centrum E, contingat recta CD, æquidistans AB, & per A & B, puncta ellipsis describatur quę diametrum habeat AB, & rectam CD contingat in puncto quouis D: ex D verò ponatur DE occurrens circuli peripheriæ in F, agaturq; per F parallela GH, secans ellipsim in H & I, circulum verò in G & F.

Dico lineam GH in I & F, trifariam esse diuisam.

Demonstratio.



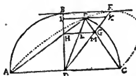
QVoniam HI per præcedentem est æqualis GF, ablata communi IF, manet FH, æqualis GI; sed ipsi FH æquatur IF (quia HI ordinatim posita est ad diametrum DE) æquantur igitur GI, IF, FH lineæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXII.

Circulum ABC cuius diametri AC, BD se ad rectos decussent in D, contingat in B linea BE, ducta deinde per A & C ellipsis AEC, contingens BE in E, occurrat circulo in F, & posita ex contactu ad centrum recta ED ducantur AF, CF: & AF quidem secans BD diametrum circuli in H, CF verò ellipseos diametrum ED in G.

Dico iunctam GH æquidistare BE.

Demonstratio.



Ponatur per F, linea IK æquidistans EB. iunctisque punctis FD, ex H recta ducatur HG, parallela IK, occurrens FD lineæ in L & ED in G. Quoniam IK æquidistat tangenti EB, a IF, FK lineæ inter se æquales sunt; quare & HG, linea æquidistans IK in L, diuisa quoque est bifariam. si iam punctum G non sit commune lineis FC, ED, HG, occurrat HG ipsi FC in M: Quoniam ergo HM æquidistat EB adeoque AC, vt AD ad DC, sic HL ad LM, quare MH in L diuisa est bifariam: sed & HG, in L bifariam est diuisa; puncta igitur G & M, vnum idemque sunt: vnde G commune lineis FC, ED æquidistant; igitur HG, BE. Quod erat demonstrandum.

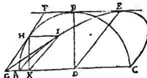
a 170. huius.

PROPOSITIO CLXXIII.

Circulum ABC cuius diametri AC, BD sese ad rectos decussant, contingat in B recta BE, ductaque ex E recta linea ED, describatur ellipsis AEC, contingens FE, in E: ponatur quoque FG contingens circulum in H, occurrens diametro AC, in G: dein ex H ponatur HI, parallela BE occurrens ellipsi in I, iunganturque IG.

Dico IG lineam contingere ellipsim in I.

Demonstratio.



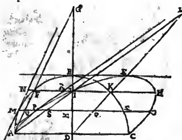
Ponatur IK æquidistans ED, erit illa ordinatim posita ad diametrum AC, cùm AC, DE diametri sint coniugatæ: ex K verò erigatur KH, parallela BD, occurrens HI lineæ in H. Quoniam tam HK, BD, quàm IK, ED æquidistant, erit vt quadratum ED ad quadratum IK, sic BD quadratum ad quadratum HK: sed vt quadratum ED ad quadratum IK, sic ADC rectangulum ad rectangulum AKC, vt igitur rectãgulum ADC ad rectangulum AKC, sic BD quadratum ad quadratum HK. Quare punctum H in peripheria circuli est: igitur cùm HK sit normalis & HG contingens, vt GC ad CK, sic CK ad AK: est autem IK ad diametrum AC, ordinatim posita; ergo GI b linea est tangens. Quod erat demonstrandum.

b Parte ex 30. huius.

PROPOSITIO CLXXIV.

Circulum A B C cuius diametri se decussant ad rectos in D, contingat in B linea B E: dein per A & C puncta ellipsis describatur contingens B E lineam in E, cuius vna è diametris sit A C. iunctisque E D, ducatur ex A secans A F, & per F agatur F H, parallela B E, occurrens ellipsi in I. Tum per A & I ducatur recta A I. contingat autem circulum recta M N in M, parallela secanti A F, & ex M ducatur M O, parallela tangenti B E, occurrens ellipsi in P; ponaturq́; per P, rectæ B E æquidistans P R, secans F H lineam in R.

Dico P R lineam, contingere ellipsim in P.



Demonstratio.

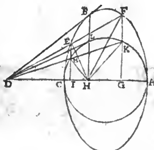
Secantes A F, A I ipsis D B, D E occurrant in G & L. Deinde F H occurrat ipsi B G in T, & tangenti in N, & rectæ D E in K. similiter M O occurrat ipsi A F in V, & A I in S, & D E in Q, & G D in X. Quoniam A G D, A L D triangula, eandem habent basim A D, suntque F T, K I [a] æquales, erunt triangula [b] A G D, A L D inter easdem parallelas. Rursum cùm M O linea æquidistet F K, erunt V X, S Q lineæ æquales; est verò & M X iterum [c] ipsi P Q æqualis; ergo & reliqua M V, reliquæ P S æqualis est: sed rectæ M V æquatur linea N F, & P S, est æqualis R I, igitur & N F, R I lineæ sunt inter se æquales: est verò & F T ipsi K I æqualis, igitur N T, K R æquales sunt. Sed, quia M N tangens cadit tota extra circulum, N T maior est quàm F T, hoc est quàm K I. ergo & K R maior est quàm K I. ergo punctum R, cadit extra ellipsim. eodem modo si iam supra quàm infra M O, parallelæ ducantur quotcúque, ostendentur omnia puncta rectæ P R, cadere extra ellipsim præter punctum P; tota igitur P R, tanget ellipsim. Quod erat demonstrandum.

[a] 171. huius.
[b] Patet ex demonstratione.
[c] Clauius ad 40. 1.

PROPOSITIO CLXXV.

Esto A B C ellipsis axis A C vtcunque productus in D, ductaq; ex D linea D B, quæ ellipsim contingat in B ponatur secans altera D F, occurrens ellipsi in E & F: demissis deinde E F ex E, B, F normalibus F G, B H, E I ad axem A C, iungantur F H, E H.

Dico F G H, E I H triangula esse similia.



Demonstratio.

Super A C diametro describatur circulus A K C, occurrens rectis F G, B H, E I in K L M, ducantur autem rectæ M H, K H, E H, F H: cùm igitur sit [d] vt F G ad E I, (hoc est vt G D ad I D,) sic K G ad M I, patet M K productam conuenire in D: est autem [e] D L contingens, igitur H K G, H M I triangula similia sunt. quare vt K G ad M I, sic H G ad H I: sed est vt K G ad M I, sic F G ad E I, igitur vt F G ad E I, sic H G est ad H I: sunt autem an-

[d] Schol. 4. huius.
[e] Patet ex 33. huius.

guli

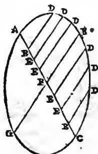
guli lateribus proportionalibus contenti recti; triangula igitur F G H, E I H sunt similia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVI.

Sit in ABC ellipsi diameter AC vna coniugatarum æqualium: ad quam ordinatim ponantur quotcunque DE.

Dico AEC rectangula æquari quadratis DE.

Demonstratio.



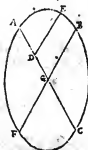
Ponatur BC altera diametrorum coniugatarum æqualium: centrum autem sectionis sit F: erit igitur AEC rectangulum ad quadratum ED, vt AFC rectangulum ad quadratum FB: sed AFC rectangulum id est quadratum AF æquatur quadrato FB, cùm diametri sint æquales, rectangulum igitur AEC æquale est quadrato DE: quod erat demonstrandum.

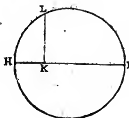
PROPOSITIO CLXXVII.

Secet ABC ellipsim vna ex diametris coniugatis æqualibus AC, quam in D secet ordinatim linea ED, sumptaque HI linea quę sit æqualis AC, descriptoque super AI circulo HLI, diuidatur HI in K, vt AC est diuisa in D, & ex K normalis erigatur KL.

Dico ED, KL quadrata esse inter se æqualia.

Demonstratio.





Ducatur coniugatarũ æqualium altera FB: sectionis autem centrum sit G, rectangulum ADC, est ad quadratum ED, vt AGC rectangulum hoc est quadratum AG est ad quadratum GB: sed AG, GB quadrata sunt æqualia. igitur & ADC rectangulum est æquale quadrato ED: rursum cùm HI, AC lineæ ponantur æquales & proportionaliter in D & K diuisę, erit ADC rectangulum hoc est quadratum ED, æquale rectangulo HKI, id est quadrato LK. Quod erat demonstrandum.

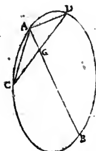
PRO-

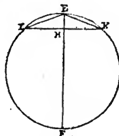
PROPOSITIO CLXXVIII.

SEcet ellipſim vna ex diametris coniugatis æqualibus A B, ad quam ponatur recta C D ordinatim, iunganturq́; A C, A D; tum ſuper E F æquali rectę A B, & in H proportionaliter diuiſæ ipſi A B deſcribatur circulus E F K: actaque per H normali I K, iungantur E I, E K.

Dico quadrata A C, A D ſimul ſumpta, æquari quadratis I E, E K ſimul ſumptis.

Demonſtratio.





QVadrata A C, A D ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis a C G, A G bis ſumptis, & quadrata I E, E K b æqualia ſunt quadratis I H, H E bis ſumptis; ſed per præcedentem C G, I H quadrata ſunt æqualia, ſuntque item æqualia inter ſe quadrata A G, E H, quod A G, E H rectę æquales ſint ex conſtructione, quadrata igitur C G, A G bis ſumpta æquantur quadratis G H, E H bis ſumptis; igitur & quadrata duo C A, A D ſimul ſumpta ęqualia ſunt quadratis I E, E K ſimul ſumptis. Quod erat demonſtrandum.

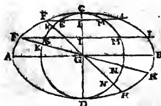
a 4. De & neis. b Pater ex 47. primi.

PROPOSITIO CLXXIX.

SInt A B C ellipſis axes A B, C D: & ſuper axe minore C D, circulus deſcribatur C E D; poſitis F L ordinatim ad axem C D, quæ circulo occurrant in E & M, axi autem in I, & ellipſi in L; ducantur ex F per G, centrum, F H occurrentes circulo in K & N, ellipſi autem in H.

Dico eſſe vt quadratum F I ad quadratum F I, ſic F K H rectangulum ad rectangulum F K H.

Demonſtratio.



EX ſcholio quartæ huius libri patet has duas proportiones F E ad F E, & E L ad E L eaſdem eſſe cum ratione E I, ad E I. quare cùm ratio rectanguli F E L ad rectangulũ F E L, componatur ex rationibus F E ad F E, & E L ad E L, erit ratio rectãguli F E L ad rectangulũ F E L, duplicata rationis E I ad E I, ac proinde eadem quę quadrati E I ad quadratum E I: ſed rectangula F E L ſunt rectangula

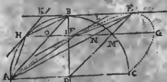
a 36. tertij. MFE, hoc eſt rectangula a NFK, id eſt FKH. ergo rectangula FKH ſunt ad ſe inuicem vt quadrata EI id eſt quadrata FI. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXX.

Circulum ABC cuius diametri AC, BD ſe decuſſant ad rectos, contingat in B linea BE: deſcriptâ dein ellipſi per A, C puncta quæ, contingat BE lineam in E, iungantur puncta AE, AB.

Dico AFE, AHB ſegmenta eſſe æqualia.

Demonſtratio.



Ductâ HK parallela ipſi AB quæ circulum contingat in H ducatur ex H linea HG, parallela tangenti BE occurrens ellipſi in F & rectis AB, AE, ED, BD in M, N, I, O, iunganturq; puncta BH, AH, EF, FA, deiñ per F ducatur linea FL æquidiſtans ipſi AE: Quoniam tam HK tangens æquidiſtat rectę AB, quàm EL ipſi AE, ſit b autem & FL tangens, erunt c AHB, AFE triangulorum maxima quę ſegmentis AHB, AFE inſcribi

b 174. huius.
c Patet ex 13. & 42. huius.
d 43. huius.
e 170. huius.
f 43. huius.
g 116. Progreſſ. ſiue 2. huius.

poſſunt : ac proinde plus quàm dimidia ſuorum ſegmentorum. Rurſum cùm triangula ABD, AED ſint ſuper eadem baſi & intra eaſdem parallelas conſtituta, & HM linea æquidiſtet baſi AD, erunt OI, NM lineæ d æquales; ſed & totæ HI, FM ſunt e æquales; igitur & reliquę HO, FN inter ſe æquantur: Quare tam triangula HOB, NEF, quàm triangula HAO, NFA, adeoque tota triangula BHA, EFA ſunt æqualia. eodem modo ſi reſiduis ſegmentis triangula inſcribantur, oſtendemus triangula reſiduo circuli inſcripta æquari triangulis reſiduo ellipſeos inſcripta, & vtraque maiora dimidijs eſſe ſuorum ſegmentorum. Quare cùm dicta triangulorum inſcriptio, vtrimque ſemper æqualium & maiorum dimidiis ſegmentorum ſine termino continuari poſſit, ſegmenta g AHB, AFE æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Iiſdem poſitis ſequitur ſemicirculum ABD æqualem eſſe ſemiellipſi AEC, eſt enim ſegmentum AHB oſtenſum æquale ſegmento AFE, ſunt autem triangula ABD, AED ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas cōſtituta inter ſe ęqualia, igitur quadrans circuli ABD ęqualis eſt quadranti ellipſis AED. ergo ſemicirculus ABC ęqualis eſt ſemiellipſi AEC. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO CLXXXI.

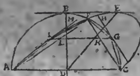
Habeant ABC ſemicirculus & AEC ſemiellipſis communem diametrum AC & tangentem BE, parallelam diametro AC: ſecet autem AEC ellipſis circulum ABC in F, ducanturq; lineæ AF, CF.

Dico ſegmenta AIF, CGF eſſe æqualia.

Demon-

Demonstratio.

DVctâ GH linea parallela rectæ CF, quæ circulum in G contingat, ducatur ex G linea GI parallela rectæ AC, occurrens lineis CF, AF in K & L, ellipsi verò in I: actaque per I linea IM, quæ AF lineæ æquidistat, iungantur puncta AI, FI, CG, FG: Quoniam IM linea æquidistat secanti AF, erit [a] IM recta tangens, ideoque AIF triangulum [b] eorum maximum quæ AIF segmento possunt inscribi: quod autem CGF triangulum eorum sit maximum quæ CGF segmento circuli inscribuntur manifestum est, vtrumque ergo triangulum [c] plus est quàm dimidium sui segmenti. Deinde, quia IL, KG sunt æquales, vt facile ex 174. huius deducetur, suntque IG, AC parallelæ, triangula IAL, GCK sunt æqualia: sunt verò ob eandem causam æqualia triangula IFL, GFK. tota igitur AIF, CGF æqualia sunt. Similiter demonstrabimus segmentis reliquis ellipticis ac circularibus inscribi posse, siue termino triangula maiora dimidijs segmentorum & æqualia inter se; æqualia igitur sunt segmenta AIF, CGF. Quod erat demonstrandum.



a Facile deducetur ex 174. huius.
b Patet ex 3. & 42. huius.
c 43. huius.

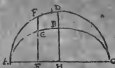
PROPOSITIO CLXXXII.

HAbeant ABC ellipsis & circulus ADC eundem axem AC, ducaturque recta quæuis EF normalis ad axem AC, occurrens ellipsi in G.

Dico esse vt EG ad EF, sic ABC ellipsim ad circulum ADC.

Demonstratio.

EX centro H normalis erigatur HBD: occurrens ellipsi in B & circulo in D. vt HB ad HD, sic EG est ad EF: sed vt HB ad HD, sic [d] ABC ellipsis est ad circulum ADC: igitur vt EG ad EF, sic ellipsis ABC est ad circulum ADC. Quod erat demonstrandum.



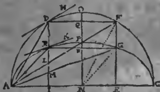
d Coroll. 40. huius.

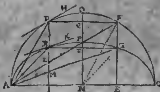
PROPOSITIO CLXXXIII.

HAbeant ABC ellipsis & circulus ADC eundem axem AC ad quem ordinatim posita sit recta EF occurrens ellipsi in G & circulo in F: Dico segmentum ADFE esse ad segmentum ABGE vt ADC circulus est ad ellipsim ABC.

Demonstratio.

IVngantur AF, AG, ducaturque recta DH æquidistans ipsi AF, contingens circulum in puncto D: ex quo ordinatim demittatur ad axem recta DI, occurrens ellipsi in B & AF, AG lineis in L & M, agaturque per B recta BK parallela ad AG, quæ per 154. ellipsim tanget. dein lineæ ducantur AD, DF, AB, BG, vt EF ad EG, sic IL est ad IM, sed est vt EF ad EG, sic ID ad IB. igitur vt ID ad IB, sic IL ad IM. ergo & reliqua DL ad reliquam BM, vt tota ID ad totam IB. est





autem vt D L ad BM, sic triangulum D A L, ad triangulum B A M, & (quia parallelæ sunt D I, F E,) triangulum D F L ad triangulum B G M, igitur triangulum D A L est ad triangulum B A M, vt I D ad I B, & triangulum D F L est ad triangulum B G L vt I D ad I B. ergo totum triangulum A D F est ad totum triangulum A B G, vt I D ad I B. quia autem D H, B K sunt tangentes, triangula A D F, A B G maxima [a] sunt eorum quæ inscribi segmentis possunt, ac proinde maiora [b] segmentorum dimidijs. similiter demonstrabimus segmentis residuis tam circuli quàm ellipseos inscribi posse triangula, quæ sint maiora residuorum dimidijs, & rationem habeant, quam I D ad I B. Quare cùm hoc fieri possit sine termino, segmentũ [c] A D F est ad segmentum A B G, vt I D ad I B: est verò & triangulum A F E ad triangulum A G E, vt E F ad E G, hoc est vt I D ad I B. ergo totum segmentum A D F E est ad totum segmentum A B G E, vt I D ad I B, hoc est vt circulus ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

a Patet ex 13 & 42. huius.
b 43 huius.
c 44 huius.

PROPOSITIO CLXXXIV.

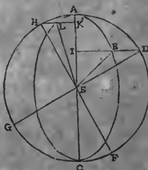
EAdem manente figura ducatur ex centro N quævis diameter N F, demissaque ex F normali F E quę ellipsim secet in G, iungantur N G: Dico A N F sectorem esse ad sectorem A N G, vt circulus A D C ad ellipsim A B C.

Demonstratio.

Segmentum A D F E [d] est ad segmentum A B G E, vt F E ad G E: & triangulum F N E est ad triangulum G N E, vt F E ad G E. Ergo & reliquum nempe sector A N F est ad reliquum nempe sectorem A N G, vt F E ad G E, hoc est [e] vt circulus ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

d 183. & 182. huius.
e 182. huius.

PROPOSITIO CLXXXV.



SIt ellipsis A B C, & circulus A D C, habentes communẽ axem A C: & per centrum commune E ducantur duæ diametri circuli sese ad angulos rectos intersecantes, occurrentesque circulo in punctis D, F, G, H: deinde ex D & H, ordinatim ad A C applicentur lineæ D I, H K occurrentes ellipsi in B & L: iunganturq; E B, E L.

Dico L E B quadrantem ellipseos esse, sicut H E D est quadrans circuli.

Demonſtratio.

Segmentum ABI ad ſegmentum ᵃADI eſt vt IB ad ID, vtque eadem IB ad ID, ita eſt triangulum IEB ad triangulum IED. ergo vt IB ad ID, ita eſt ſector AEB ad ſectorem AED. ſimili modo oſtendemus ſectorem LEA ad ſectorem HEA, eſſe vt KL ad KH, id eſt, ᵇ vt IB ad ID: ergo vt IB ad ID, ita eſt totus ſector BEL ad totum ſectorem DEH, ſed vt IB ad ID, hoc eſt minor axis ellipſeos ad diametrum circuli, per 5. Archimedis de Spher. ita eſt ellipſis ABC ad circulum ADC; ergo ſector BEL ad ſectorem DEH, vt ellipſis ad circulum, & inuertendo ac permutando vt ſector DEH ad circulum ADC, ita eſt ſector BEL ad ellipſin ABC, ſed ſector DEH eſt quadrans circuli, ᶜ ergo & ſector BEL quadrans ellipſeos erit, adeoque ᶜ erunt BE, EL diametri coniugatæ, ergo, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 184. huius. b Cor. 1. pr. 8. huius. c 46. huius.

Nota idem demonſtrari ſi ADC ſit ellipſis cuius axis AC, ſintque HF, DG ipſius coniugatæ diametri; ſi verò DEH non ſit quadrans ellipſeos vt ſector DEH ad circulum, ita erit ſector BEL ad ellipſin, vt ex demonſtratione conſtat.

PROPOSITIO CLXXXVI.

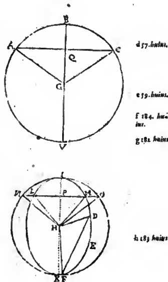
Eſto circuli ABC quicunque ſector AGC, & ellipſis DEF ſector DHF: ſit autem ſector ad ſectorem vt circulus ad ellipſim: ducanturque rectæ AC, DF.

Dico ſegmentum ABC eſſe ad ſegmentum DEF, vt circulus ABC eſt ad ellipſim DEF, & contra.

Demonſtratio.

Inuento ellipſeos maiore axe IK, deſcribatur ſuper IK diametro circulus, ductaq; ᵈ ad axem ordinatim LM quæ auferat ſegmentum LIM æquale ſegmento DEF, occurrat circulo in N & O, ducanturque rectæ LH, MH, NH, OH. Quoniam ſegmentum MIL æquale eſt ſegmento DEF, erit ᵉ ſector LHM æqualis ſectori DHF. Rurſum cùm ſit vt ellipſis ad circulum NOK, ſic LHI ſector ᶠ ad ſectorem NHI, adeoque & LHM ſector ad ſectorem NHO, ſitque LHM triangulum ad triangulum NHO, vt LM ad NO, hoc eſt ᵍ vt ellipſis ad circulum NOK, erit vt ellipſis ad circulum NOK, ſic LIM ſegmentum ad ſegmentum NIO, & permutando circulus NOK ad ſegmentum NIO, vt ellipſis ad ſegmentum LIM. iam verò circulus ACV eſt ad ſectorem AGC, ex hypotheſi vt ellipſis ad ſectorem HDF, hoc eſt (vt oſtendi ſupra) vt ellipſis ad ſectorem LHM, hoc eſt vt circulus NOK ad ſectorem NHO. ergo etiam ʰ circulus ACV ad ſegmentum ABC, vt circulus NOK ad ſegmentum NIO, hoc eſt, vt ante oſtendi, vt ellipſis ad ſegmentum LIM, hoc eſt (quoniam ſegmenta LIM, DEF ſunt ex conſtruct. æqualia) vt ellipſis ad ſegmentum DEF, igitur permutando vt circulus ACV ad ellipſim, ſic ſegmentum ABC ad ſegmentum DEF. Quod erat demonſtrandum.

d 57. huius. e 59. huius. f 184. huius. g 181. huius. h 183. huius.



Iam verò ſi fuerit ſegmentum ABC ad ſegmentum DEF, vt circulus ABC ad

 ad





ad ellipsim I D F: dico & sectorem A G C esse ad sectorem D H F, vt est circulus A B C ad ellipsim I D F: inuento enim vt antè ellipseos D E F maiore axe I K,

a 181. huius. super I K vt diametro describatur circulus N O K: ductaque ordinatim L M quæ segmentum L I M auferat æquale segmento D E F, fiant reliqua vt prius. segmentū igitur N I P est ad segmentum L I P, vt a circulus N O K ad ellipsim I D F. Itaq; segmentum N I O ad segmentum L I M, vt circulus N O K ad ellipsim: & permutando, circulus N O K ad segmentum N I O, vt ellipsis ad segmentum L I M, hoc est ex hypothesi vt circulus A C V ad segmentum A B C. Cùm ergo sit vt circulus N O K ad segmentum N I O, ita circulus A C V ad segmentum A B C, erit etiam b vt circulus N O K ad sectorem N H O, ita circulus A C V ad sectorē A G C. Atqui vt circulus N O K ad sectorem N H O, sic ellipsis ad sectorem L H M, hoc est quoniam segmenta L I M, D E F sunt æqualia, ad sectorem D H F. ergo vt circulus A C V ad sectorem A B C, ita ellipsis ad sectorem D H F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXXVII.

ESto A D B circuli diameter A B diuisa vtcunque in C, & per C normalis posita D E, sit autem & F G, diameter quæcunque ellipseos diuisa in H, vt A B est in C, & per H ordinatim ducta I K.

Dico segmentum D B E esse ad segmentum I G K vt est circulus A D B ad ellipsim F L G, & contra.

Demonstratio.

INuento ellipseos axe maiore L M, describatur super L M circulus L O M. diuisaq; L M in N, vt A B est diuisa in C, agatur per N normalis O P, secans ellipsim in Q & R: ducanturque semidiametri O T, Q T, R T, P T. Rectangulum B C A est ad quadratum D C, vt rectangulum L N M ad quadratum O N, & permutando rectangulum B C A est ad rectangulum L N M, vt quadratum D C ad quadratum O N, sed ratio rectanguli B C A ad rectangulum L N M, componitur ex rationibus B C ad L N, & C A ad N M. ergo rationes B C ad L N, & C A ad N M, simul sumptæ æquantur rationi quadratorū D C, O N, hoc est rationi ad D C, O N bis sumptæ. Atqui rationes B C ad L N, & C A ad N M, sunt eædem siue æquales, cùm sint B A, L M ex hypothesi proportionaliter diuisæ: ergo earum vna B C ad L N, eadem est rationi D C ad O N: sed, cùm sit vt B C ad L N, sic C A ad N M, erit quoque vt B C ad L N, sic B A ad L M. Quare B A ad L M, id est S D ad O T, vt

vt D C est ad O N: sunt autem anguli D C S, O N T recti; igitur triangula D C S, O N T sunt similia, anguliq́ue D S C, O T N æquales: quare & anguli D S E, O T P illorum dupli sunt æquales & D S E, O T P sectores sunt similes, adeoq́ue & segmenta D B E, O L P sunt similia. igitur vt segmentū O L P ad circulum L O M, sic segmentum D B E ad circulum D B A: sed etiam vt segmentum O L P ad circulum L O M, sic segmentum [a] Q L R ad ellipsim. quare vt segmentum D B E ad circulum A D B, sic Q L R segmentum est ad ellipsim F L G, hoc est ex constructione segmentum I G K ad ellipsim F L G, & permutando est segmentum D B E ad segmentum I G K, vt circulus A D B ad ellipsim F L G. Quod erat primum. a 181. huius.

Sit iam segmentum D B E ad segmentum I G K, vt circulus A D B ad ellipsim F L R: dico B S, G T lineas in C & H, proportionaliter esse diuisas, ponantur eadem omnia quæ priùs: Quoniam est segmentum D B E ad segmentum I G K, id est Q L R vt circulus A D B ad ellipsim F L R, & permutando D B E segmentum ad circulum A D B, vt segmentum Q L R ad ellipsim F L R; sit autem [b] & O L P segmentum ad circulum O L M, vt Q L R segmentum ad ellipsim F L R, erit vt segmentum O L P ad circulum L O M, sic D B E segmentum ad circulum A D B. Quare & sectores D S E, O T P sunt similes & anguli D S E, O T P adeoq́ue & illorum dimidij D S C, O T N æquales: sunt autem & anguli D C S, O N T recti; igitur triangula D C S, O N T similia: & vt D S ad O T, id est B S ad L T, sic S C ad N T. quare B S, L T in C & N proportionaliter sunt diuisæ. sed cùm per constructionem segmenta Q L R, I G K sint æqualia, erit vt L T in N, sic [c] G T diuisa in H. igitur vt B C ad C S, sic G H ad H T. Quod erat demonstrandum. b ibid. c 52. huius.

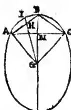
PROPOSITIO CLXXXVIII.

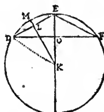
Esto A B C ellipseos segmentum quodcunque A B C; sumatur autem in circulo D E F segmentum D E F, quod ita se habeat ad suum circulum, vt A B C segmentum ad ellipsim suam: dein A B C, D E F segmentis triangula inscribantur maxima A B C, D E F, diuisisq́; A B, D E lineis bifariam in H & L, agantur per H & L, diametri G I, K M.

Dico illas in H & L proportionaliter esse sectas.

Demon-

Demonstratio.





EX B & E ducantur diametri B G, E K, iunganturque D K, K F, G A, G C, & quoniam è verticibus maximorum triangulorum ductæ sunt diametri, in circulo quidem patet D F bisecari in O, in ellipsi autem bisecari quoq; A C colliges ex 42. huius. Quare tā in ellipsi quàm in circulo sectores A G C, D K F bisecantur. ergo sector A G B est ad sectorem D K E, vt sector A G C ad sectorem D K F. Iam verò cùm permutando hypothesim, segmentum A B C sit ad segmentum D E F, vt ª 187. huius. ellipsis ad circulum, etiam ª sector A G C erit ad sectorem D K F, hoc est (vt iam ostendi) sector A G B, ad sectorem D K E, vt ellipsis ad circulum. Et quoniam est sector A G B ad sectorem D K E, vt ellipsis ad circulum, erit quoque segmentum A I B ad segmentum A M E, vt ellipsis ad circulum. Ergo diametri I G, M K proportionaliter in H & L sunt diuisæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXXIX.

EAdem manente figurâ: si fuerit segmentum A B C ad segmentum D E F, vt A B C ellipsis ad circulum D E F.

Dico esse & triangulum maximum A B C ad triangulum maximum D E F vt A B C ellipsis est ad circulum D E F.

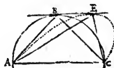
Demonstratio.

VT A B C ellipsis est ad circulum D E F, sic ostendimus in priori segmenta A I B, B C esse ad segmenta D M E, E F. Quare cùm etiam ex hypothesi sit, vt ellipsis ad circulum sic totum segmentum A B C ad totum segmentum D E F, igitur & reliquum triangulum A B N est ad reliquum triangulum D E O vt A B C, ellipsis ad circulum D E O. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXC.

ESto A B C semicirculo inscriptum triangulum maximum A B C; sit autem & A E C semiellipsi quę communem A C habeat diametrum, triangulum inscriptum maximum A E C: si fuerint A B C, A E C triangula æqualia:

Dico & semicirculum A B C æqualem semiellipsi A E C.



Demonstratio.

IVngantur puncta B & E. Quoniam triangula A B C, A E C super eadem basi descripta per hypothesim sunt æqualia, erit iuncta B E parallela rectæ A C; adeoque cùm tam A B C, quàm A E C

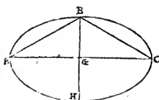
sic

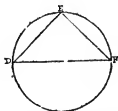
sit triangulum maximum, continget recta BE & circulum & ellipsim; igitur a semicirculus ABC æquatur semiellipsi AEC. Quod erat demonstrandum. a 159. huius.

PROPOSITIO CXCI.

Ellipsis est ad circulum vel ellipsim vt triangulum maximum inscriptum semiellipsi ad triangulum maximum inscriptum semicirculo aut semiellipsi.

Demonstratio.





CVm enim sit vt semiellipsis ad semicirculum aut semiellipsim, ita tota ellipsis ad totum circulum aut ellipsim; erit b vt triangulum maximum AEC semiellipsi inscriptum ad triangulum maximum DEF semicirculo aut semiellipsi inscriptum, ita ellipsis ad circulum ad ellipsim. Quod erat demonstrandum. b 190. huius.

PROPOSITIO CXCII.

Dato circulo vel ellipsi DEF ellipsim æqualem exhibere. Et datæ ellipsi circulum æqualem.

Constructio & demonstratio.

SEmicirculo vel semiellipsi DEF inscribatur triangulum maximum DEF, cui fiat æquale aliud quodcumque triangulum ABC, diuisaque AC bifariam in G, ducatur BG, & protrahatur BG in H, vt BG, GH sint æquales, & si AC, BH sese ad rectos intersecent, describatur ellipsis ABCH cuius axes sint ACBH, si autem non ad rectos sese intersecent, datis ACBH coniugatis diametris axes inueniantur c circa quos describatur ellipsis ABCH. Dico ellipsin ABCH circulo vel ellipsi DEF æquari: est enim triangulum ABC maximum eorum quæ semiellipsi inscribi possunt d quia ACBH ponuntur diametri coniugatæ. quare cùm triangulum maximum semiellipsi inscriptum æquale sit triangulo maximo circulo vel ellipsi inscripto, erit e ellipsis ABC circulo vel ellipsi DEF æqualis, ergo quod petebatur. c 60. huius. d 42. huius. e 190. huius.

Ex his secundæ partis constructio & demonstratio est manifesta.

Corollarium.

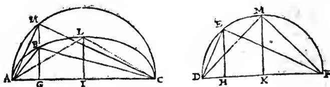
Hinc patet infinitas dari ellipses circulo vel ellipsi ABC æquales, quia triangulo ABC dantur infinita triangula æqualia.

PROPOSITIO CXCIII.

SIt semiellipsis ABC cuius axis sit AC, semicirculus autem DEF, semiellipsi ABC æqualis ponatur; inscribantur deinde semiellipsi & semicirculo triangula ABC, DEF inter se æqualia: & ex B & E, normales ad basim demittantur BG, EH.

Dico lineas AC, ADF in G & H, similiter diuisas esse.

Demonstratio.

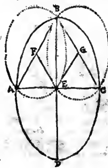


EX centris I & K, ad diametros AC, DF normales erigantur IL, KM iunganturq; AL, LC, & DM, MF: quoniam semiellipsis ABC semicirculo DMF, æqualis est, erunt & maxima triangula illis inscripta nempe ALC, DMF inter se æqualia 1 a erit igitur vt triangulum ALC, ad triangulum ABC id est vt LI ad BG, ita triangulum DMF ad triangulum DEF, id est ita linea MK ad EH, adeoque vt quadratum LI ad BG quadratum, ita erit quadratum MK ad ipsum EH: sed vt quadratum LI ad quadratum BG, ita est rectangulum AIC ad rectangulum AGC: & vt quadratum MK ad EH; quadratum, ita est DKF rectangulum ad rectangulum DHF, ergo vt AI quadratum ad rectangulum AGC, ita est quadratum DK ad rectangulum DHF: & permutando vt quadratum AI ad ipsum DK quadratum, siue vt quadratum AC ad DF ita est rectangulum AGC ad rectangulum DHF, constat igitur ex Sereni l.1. prop.12. lineas AC, DF in G & H, proportionaliter esse diuisas. Quod erat demonstrandum.

a 190. huius.

PROPOSITIO CXCIV.

SEcent ABC ellipsim diametri quæuis coniugatæ AC, BD iunctisq; punctis AB, CB, diuidantur AB, CB lineæ bifariam in F & G: ducanturq; ex E centro lineæ EF, EG: dein tam per puncta AEB, quàm CEB ellipses describantur quarũ coniugatæ sint diametri AB, EF, CB, EG: Dico ABC ellipsim æqualem esse duabus ellipsibus AEB, CEB.



Demonstratio.

QVoniam tam ABEF, CBEG, ACBE diametri sunt coniugatæ, erunt b ABC, AEB, CEB triangula maxima quę suis semiellipsibus inscribi possunt: est autem ABC triangulum duplum trianguli CEB, igitur & ellipsis ABC c dupla est ellipsis CEB. similiter ostendam ellipsim ABC duplam esse ellipsis BEA. æquantur

b Patet ex 93. huius.

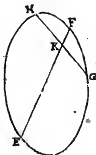
c Coroll. 191. huius.

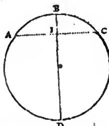
quantur; igitur ellipses BEA, CEB ac proinde ellipsis ABC singularum dupla æquatur vtrique simul sumptæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXCV.

Circulum ABC secet recta quæuis AC auferens segmentum ABC: oportet in data ellipsi EFG, ad datam diametrum EF ordinatim ducere HG, quæ segmentum auferat HFG, quod ad ellipsim eam habeat rationem quam ABC segmentum ad circulum ABC.

Constructio & demonstratio.





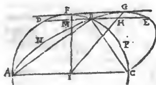
Diuisâ in circulo ABC recta AC bifariam in E, agatur per I normaliter diameter BD: dein in ellipsi EFG, diuidatur EF diameter in K, vt diuisa est BD in I, agatúrque per K ordinatim linea HG ad FE diametrum, patet a HFG segmentum esse ad ellipsim EFG, vt ABC segmentum est ad circulum ABC. dato igitur in circulo segmento, &c. Quod erat faciendum.

a 18. huius.

PROPOSITIO CXCVI.

Esto ABC semicirculo inscriptum triangulum quodcunque ABC, oporteat super BC linea segmentum describere ellipticum, æquale segmento circulari ADB.

Constructio & demonstratio.



Ducatur recta FG parallela diametro AC contingens circulum in F, dein per B recta agatur DE parallela diametro AC, fiatque BE æqualis ipsi DB, qua diuisâ in H bifariam ducatur per H ex I, centro circuli recta IG occurrens FG, lineæ in G: tum per A, G, C puncta b ellipsis describatur: cuius diametri coniugatæ sint AC, IG, & quoniam FG est ipsi AC per extremitatem diametri IG parallela, continget ellipsim in G. quare ellipsis c circulo æqualis est. Deinde quoniam FG, MH sunt parallelæ, facile ostendemus ex elementis rectangulum sub GH, & reliqua parte diametri, esse ad rectangulum sub GI, & reliqua parte diametri vt rectangulum sub FM, & reliqua parte diametri ad rectangulum sub FI & reliqua parte diametri. Atqui rectangulum sub FM, & reliqua parte diametri est

b 41. huius.
c Coroll. 180. huius.

ad rectangulum sub FI & reliquâ parte diametri vt quadratum DM ad quadratum AI, hoc est, vt quadratū BH ad quadratum AI. ergo etiam rectangulum sub GH & reliqua parte diametri est ad rectangulum sub GI, & reliqua parte diametri, vt quadratum BH ad quadratum AI. ellipsis ergo transit per punctum B. Iam quia ellipsis circulo æqualis est vt ostendi supra, ablato comnnni segmento curuilineo ANBPC, æqualia remanent segmenta BFCE, ANBD, quibus si addas segmenta BPC, ANB, quæ [a] æqualia sunt, segmentum ellepticum BCE basim habens rectam BC æquabitur segmento circulari ADB, basim habenti rectam AB. Factum igitur est quod petebatur.

a 181. huius.

PROPOSITIO CXCVII.

Esto ABC segmentum quodcunque circulare, oportet super AC subtensâ segmentum constituere ellipticum, dato ABC segmento æquale, cuius vna è diametris coniugatis sit data quæ sit maior diametro FG circuli ABC.

Constructio & demonstratio.

Inuento E centro circuli ABC ducatur per E diameter FG æquidistans rectæ AC, erectaque ex E normali EB, quæ AC lineam bifariam diuidet in H, agatur per B tangens BD, deinper H recta ducatur ID, æqualis datæ occurrens tangenti in D & FG diametro in I: fiatque IK æqualis rectæ FE, & IL æqualis EG, tum per KDL puncta ellipsis describatur, occurrens AC lineæ vtcunque in M. dico factum esse quod petitur. Quoniam enim LK, DI diametri sint coniugatæ & BD parallela ipsi LK, patet ED contingere ellipsim KDL, adeoque [b] rectam MH æqualem ipsi AH: ellipsis igitur transibit per punctum A. eodem modo ostenditur transire per C: igitur [c] segmentum ellipticum ADC æquale est segmento circulari ABC; super data igitur linea AC, &c. Quod erat faciendum.

b Colligitur ex 170. huius.

c Colligitur ex 180. huius.

PROPOSITIO CXCVIII.

Ellipsim à dato in peripheria puncto, in datos numero sectores æquales diuidere.

Constructio & demonstratio.

Data sit ellipsis ABC axis maior AC, datum in peripheria punctū B, oporteat ab hoc ellipsim secare in sectores tot æquales quot volueris, v.g. in sex.

Diametro AC describe semicirculū, cui inscribe AE, latus poligoni tot ha-

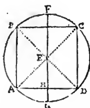
habentis latera quot æquales petebantur sectores. quoniam autē petebantur sectores æquales sex, erit AE latus hexagoni. ponatur ergo EFG normalis ad AC iunganturque ED, GD, BD, GB: & GB æquidistet AH: dico factū esse quod petitur. vt circulus ad ellipsin ita est segmentū EFA ad segmentū GFA id est vt FG ad FE: estq; itē vt FE ad FG, ita triangulū EDF ad triangulū GDF: ergo vt circulus ad ellipsin, ita est sector EDA, ad sectorem GDA: sed sector EDA est pars tertia semicirculi, cùm linea AE sit latus hexagoni; ergo & sector GDA tertia pars semiellipseos erit. Cùm autem GB ipsi AH æquidistet, erunt segmenta AG, BH: adeoq; & sectores GDA, BDH æquales inter se: hoc est sexta pars ellipseos totius. fiant a modò segmento BH æqualia a segmenta HI, IK iunganturque DH, DI, DK sectores igitur DBH, DHI, DIK æquantur adeoque singuli sunt sexta pars ellipseos, & simul sumpti semiellipsim constituunt BCK, reliquam igitur semiellipsim BAK seca vt diuisa est BCK, eritque tota ellipsis in sex æquales sectores diuisa. Quod facere oportebat. a 97. huius.

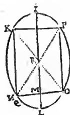
PROPOSITIO CXCIX.

ESto circulo ABC cuius centrum E inscriptum polygonum quoduis regulare ABCD: ductaque diameter FG secet latus quoduis AD bifariam in H: sit autem & IKL ellipseos diameter quæcunque IL diuisa in M sicut FG est diuisa in H, agaturq; per M ordinatim linea NO ad diametrum IL.

Dico rectam NO, esse vnum è lateribus polygoni regularis inscribendi ellipsi tot laterum, quot est polygonum circulo ABC inscriptum. Polygonum autem ellipticum regulare voco, cuius singula latera abscindunt elliptica segmenta æqualia.

Demonstratio.





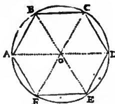
DVcatur ex O linea OP auferens segmentum æquale segmento NLO, & ex P recta PK quę segmentum auferat æquale segmento NLO, dein ex K linea KQ auferens segmentum ęquale segmento NLO, erit Q punctum idem cum puncto N. Iunctis enim in circulo ABC punctis EA, EB, EC, ED ducantur in ellipsi semidiametri, RK, RN, RO, RP. Quoniam diametri FG, IL sunt in H & M, proportionaliter diuisæ, & AD, NO lineæ per H & M, actę ordinatim ad diametros FG; IL. erit b vt sector AED ad circulum ABC, sic NRO sector ad ellipsim IKL: sunt autem tam AED, DEC, CEB, BEA sectores, quàm c NRO, ORP, PRK, KRQ sectores inter se æquales, (quia NO, OP, PK, KQ segmenta sunt æqualia) igitur vt sectores quatuor circulares ad suum circulum sic elliptici sectores quatuor ad suam ellipsim: sed toti circulo æquantur sectores circulares, igitur & ellipsi sunt æquales sectores elliptici, quare punctum Q idem est cum puncto N; & KNOP polygonum est regulare tot laterum quot est polygonum circulo inscriptum. Quod erat demonstrandum. b 180. huius. c 46. huius.

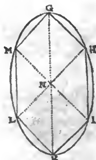
PROPOSITIO CC.

ESto circulo A B C inſcriptum polygonum quodcunque regulare A, B, C, D, E, F: ſit autem & ellipſi G H I inſcriptum polygonum regulare G, H, I, K, L, M, totidem laterum, quot eſt polygonum circulo inſcriptum.

Dico ſegmentum circulare ab aliquo laterum polygoni ablatum, eſſe ad ſegmentum ellipticum, ab aliquo laterum polygoni elliptici ablatum, vt eſt circulus A B C ad ellipſim G H I.

Demonſtratio.





SIt O centrum circuli & N centrum ellipſis: ducanturque ex O & N, ſemidiametri ad angulos ſui polygoni: Quoniam G H, H I, I K, &c. ſegmenta in ellipſi per conſtructionem ſunt æqualia, erunt & [a] ſectores G N H, H N I, I N K, &c. æquales: ſunt autem & ſectores circuli A O B, B O C, C O D, &c. æquales & pares numero ellipticis, igitur eſt ſector A O B ad ſectorem G N H, vt omnes ſectores circulares, id eſt circulus A B C ad omnes ſectores ellipticos, id eſt ellipſim G H I, quare & ſegmentum A B eſt ad ſegmentum G H, vt circulus ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

[a] 60. huius.

PROPOSITIO CCI.

CIrculo A inſcriptum ſit quodcunque polygonum, oportet datæ ellipſi B C D polygonum pari numero laterum proportionale inſcribere, hoc eſt quod & eandem ad ellipſim proportionem habeat quam circulare ad circulum; & cuius ſingula latera, ſegmenta auferant quæ ad ellipſim ſuam talem habeant rationem quam habent ſegmenta circularia, ſingulis lateribus polygoni circularis ablata ad ſuum circulum.

Demon-

Demonstratio & constructio.

INuento ellipsis maiore axe B D, describatur diametro B D circulus B E F, cui polygonum inscribatur B E F G H, simile illi, quod A circulo inscriptum est polygono; secetque F G latus, axem B D in Q; dein ductis ex E, F, G, H ad axem B D normalibus E I, F K, G L, H M, quæ ellipsim secent in C, N, O, P. ducatur rectæ B C, C N, N Q, O Q, O P, P B. dico factum esse quod petitur. Quoniam G L, F K sunt parallelæ, erunt triangula G L Q, K F Q similia, adeoque vt G L ad K F, hoc est vt O L ad K N, sic L Q ad Q K. sunt verò & anguli O L Q, F K Q, rectis ergo triangula O L Q, K F Q sunt similia. ergo O Q, Q F sunt in directum; figura igitur B C, N O, P B est polygonum ellipsi inscriptum. vt I E linea est ad lineam I C, sic I B E triangulū est ad triangulum I B C sed [a] est vt I E ad I C, sic I E F Q trapezium ad trapezium I C N Q; igitur tota figura B E F Q est ad figurā B C N Q, vt I E linea ad lineam I C, id est [b] segmentum I B E ad segmentū I B C, id est vt circulus B E F ad ellipsim B C D. eodem modo ostenditur figura B H G Q esse ad figuram B P O Q, vt circulus B E C ad ellipsim B C D. Quare erit totum polygonum B E F G H ad polygonum B C N O P, vt circulus B E F ad ellipsim B C D, & permutando, vt B E F G H polygonum ad circulum B E F; hoc est ex const. vt polygonum circulo A inscriptum ad suum circulum, sic B C N O P polygonum ad ellipsim B C D: Quod erat primum.

[a] Ex elementis.

[b] 181. & 183. huius.

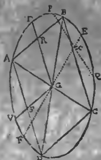
Rursum cùm tam segmentum I B E sit ad segmentum I B C, quàm I B E triangulum ad triangulum I B C, vt est circulus B E D ad ellipsim B C D, erit & segmentum B E ad segmentum B C vt B E D circulus ad ellipsim B C D: & permutando vt segmentum B E ad circulum B E D, sic B C segmentum est ad ellipsim B C D: idem similiter de reliquis segmentis ostenditur; igitur datæ ellipsi B C D polygonum inscripsimus, &c. Quod erat faciendum.

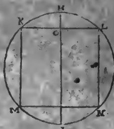
PROPOSITIO CCII.

ESto A B C ellipsi inscriptum quadrilaterum regulare A B C D, ductæq; per G centrum vni è diametris coniugatis æqualibus E F; æqualis sumatur recta H I: qua diametro circulus describatur H I K, cui inscribatur quadratum K L M N.

Dico quadrata K L, L N, N M, M K simul sumpta æquari quadratis A B, B C, C D, D A simul sumptis.

Demonstratio.





DIuisa KL bifariam in O ducatur per O diameter HI: dein applicetur ad FE diametrum ordinatim linea PQ, segmentum auferens æquale segmento AB: diuisisque AB, AD bifariam in R & S, ducantur semidiametri GRT, GSV iunganturque puncta AG, BG, CG, DG. Quoniam segmenta AB, BC, CD, DA per constructionem sunt æqualia, erunt & sectores AGB, BGC, CGD, AGD æquales, adeoque AG, BG [a] diametri coniugatæ. præterea cùm ex const. GT, GV
a 46. huius. b 50. huius. bisecent è centro rectas AB, AD [b] sectores AGT, AGV, dimidia pars sunt sectorum AGB, AGD, hoc est semiellipsis; sector igitur TGV quarta pars est ellipseos
c 46. huius. ergo [c] GT, GV sunt coniugatæ & AB, AD lineę ordinatim ad illas positæ: igitur cùm per constructionẽ segmentum PEQ æquale sit segmento ATB, siue AFD: erit PQ quadratum bis sumptum, æquale quadratis AB, AD simul sumptis, adeoq; PQ quadratum quartò sumptum æquale quadratis AB, BC, CD, DA. Rursum
d 187. huius. cùm segmentum PQ sit ad segmentum KL, vt [d] ABC ellipsis ad circulum KLM,
e 188. huius. EF, HI diametri sunt [e] in X & O, proportionaliter diuisæ, adeoque [f] PQ linea
f 178. huius. æqualis lineæ KL. igitur & quadratum KL quater sumptum æquale est quadratis AB, BC, CD, AD. Quod erat demonstrandum.

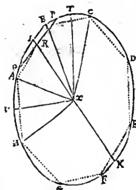
PROPOSITIO CCIII.

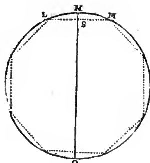
ESto ABC ellipsi inscriptum quodcunque polygonum regulare ABCD, EFGH: ductaq; IK vna ex diametris coniugatis æqualibus; describatur circulus LMN habens diametrum æqualem diametro IK: dein circulo inscribatur polygonum regulare tot laterum quot est polygonum ellipsi inscriptum.

Dico omnia quadrata laterum polygoni ellipsi inscripti, simul sumpta æquari quadratis laterum polygoni circularis simul sumptis.

Demonstratio.

STatuamus E, G, ellipsi & circulo inscripta esse octogona regularia, eadem quippe demõstratio polygonis omnibus conueniet. in circulo LMN ducatur diameter NO secans LM, lineam bifariam in S; diametrum verò IK secet ordinatim linea PQ segmentum auferens æquale segmento AB, tum ducantur semidiametri HX, AX, BX, CX, item TX, VX quę lineas AH, CB diuidant bifariam.
g 60. huius. Quoniam segmenta AB, BC, CD, &c. sunt ex constructione æqualia, erunt [g] & secto-





ſectores A X B, B X C, &c. æquales : ſunt autem illi ſimul ſumpti æquales toti ellipſi, igitur ſectores duo A X B, B X C hoc eſt quarta pars ſectorum, erunt quadrans ellipſis A B C. Iam quia X T, X V ex centro ductæ biſecant B C; a 50. huius.
A H,[a] erunt ſectores C X T, X A V dimidij ſectorum æqualium B X C, A X H, ac proinde inter ſe æquales. addito igitur communi ſectore A X T, totus ſector V X T; ſectori toti A X C æquatur, quare cùm A X C ſit quadrans ellipſeos, erit & V X T. Ergo [b] V X, T X diametri ſunt coniugatæ, ad quas A H C B ſunt ordinatim poſitę auferentes ſegmenta æqualia; igitur [c] quadratum P Q bis ſumptum, eſt æquale quadratis A H, C B ſimul ſumptis : eodem modo oſtenditur idem quadratum P Q bis ſumptum æquari quadratis A B, G H ſimul ſumptis: adeoque P Q quadratum quartò ſumptum æquari quadratis C B, B A, A H, H G, id eſt quadratis G F, F E, E D, D C. quare & quadratum P Q ſumptum octies quot laterum eſt polygonum : æquale eſt quadratis laterum totius polygoni ellipſi inſcripti. Iterum cùm ſit vt ellipſis A B C ad circulum L M N, ita ſegmentum A B id eſt P Q ad ſegmentum L M, erunt I K, N O diametri [e] in R & S, proportionaliter diuiſæ, & quadratum P Q [f] æquale quadrato L M. ergo quadratum P Q octies ſumptum æquatur quadratis laterum polygoni circularis. ſed quadratum P Q octies ſumptum ęquatur etiam, vt ſupra oſtendi, quadratis laterum polygoni elliptici; ergo quadrata laterum polygoni elliptici ſimul ſumpta æquantur quadratis laterum polygoni circularis ſimul ſumptis, Quod erat demonſtrandum.

b 46. huius. c 106. huius. d 187. huius. e 188. huius. f 177. huius.

Corollarium.

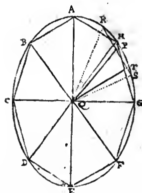
HInc patet : ſi eidem ellipſi duo inſcribantur polygona parium numero laterum, quadrata laterum vnius polygoni ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadratis laterum alterius polygoni ſimul ſumptis.

PROPOSITIO CCIV.

Ellipsi inſcriptum ſit polygonum regulare, vna autem coniugatarum æqualium ſit QP, ad quam ſit ordinatim RS.

Dico quadrata laterum polygoni ſimul ſumpta eſſe ad totum polygonum vt linea RS ad dimidium rectæ TQ.

Demonſtratio.



a 60. huius, & Coroll. eiuſd. b 106. huius.

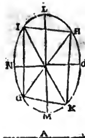
Dvcantur ex A, B, C, D, E, F, G, H, R, S punctis ſemidiametri. Quoniam RS ſegmentum per conſtructionem eſt æquale ſegmento AB, erit a & triangulum RQS æquale triangulo AQB: ſimiliter oſtendam triangula ſingula BQC, CQD, &c. æquari triangulo RQS: adeoque RQS triangulum octies ſumptum æquale toti polygono: eſt autem b RS quadratum octies ſumptum æquale quadratis omnium laterum polygoni, igitur vt RS quadratum octies ſumptum eſt ad triangulum RQS octies ſumptum hoc eſt vt RS quadratum ſemel ſumptum ad R, Q, S, triangulum ſemel ſumptum, ita omnia quadrata laterum polygoni ad totum polygonum. ſed cum RS quadratum ſit ad rectangulum ſuper RS, TQ, vt RS linea ad lineam TQ, erit RS quadratum ad triangulum RQS, dimidium rectanguli RS, TQ, vt RS linea ad dimidium rectæ TQ, igitur, & omnia quadrata laterum polygoni ſunt ad totum polygonum vt RS linea ad dimidium lineæ TQ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCV.

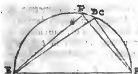
Datis axibus & diametro ellipſeos inuenire illius coniugatam & poſitione cum datis axibus in eadem conſtituere ellipſi.

Conſtru-

Constructio & demonstratio.



Sit A diameter data, & axes dati B C,D E, oportet inuenire diametrum coniugatam ipsi A, quam cum datis axibus oportet in eadem collocare ellipsi. axes E D, B C ad angulum ponantur rectum E C B, iunctâque B E, super ea semicirculus describatur E C B; in quo datæ, A æqualis aptetur E F, ducaturq; F B: quoniam igitur E C, C B axium quadrata æqualia sunt quadratis eiusuis coniugationis in ellipsi, eademque axium quadrata æquentur quadratis E F, F B; & E F æqualis A vna sit ex diametris, recta F B diameter est coniugata F E: exhibuimus igitur diametro A, coniugatam, quod primò faciendum fuit.



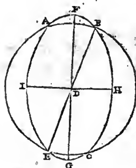


Iungantur deinde axium extrema D B E C quæ parallelogrammum exhibeant D B E C: cui æquale fiat parallelogrammum a I H K G, quod I K, G H diametros habeat rectis E F, F B æquales. data igitur diametrorum I K H G coniugatione, exhibeantur positione axes b L M, N O adeoque & ellipsis L M N. erit illa æqualis ellipsi B E C cuius axes dati sunt B C, E D; cùm enim per extrema coniugationis positione datæ, vnica tantum c ellipsis transeat, & I K, G H coniugatio positione sit in ellipsi L M N, eademq; pertineat ad ellipsin B E C, ellipses L M N, B E C adeoque & axes æquales sunt: ellipsis igitur L M N, illa est in qua coniugatas E F, F B, id est I K, G H positione cum datis axibus B C, D E, id est L M, N O collocare oportebat.

a *Praecedenti.*
b *90. huius.*
c *Ibid.*

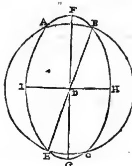
PROPOSITIO CCVI.

Data ellipsi & circulo illam intersecante puncta intersectionis geometricè exhibere. oportet autem circulum & ellipsim idem habere centrum.



Constructio & demonstratio.

Ellipsim A B C cuius centrum D, intersecet circulus A B, C E, oportet intersectionis puncta exhibere. quoniam igitur circulus & ellipsis commune habent centrum D, si ex illo ad intersectionis aliquod punctum



recta intelligatur duci, erit illa semidiameter circuli & ellipsis, diametrus igitur aliqua, circulo & ellipsi communis, sit illa A C. deinde cùm ellipsis data sit, dati quoque sunt axes F G, H I. datis igitur axibus & diametro A C, inueniatur illius coniugata & per præcedentem coniugatio illa cum datis axibus in eadem positione collocetur ellipsi, illarum vna, puncta assignabit intersectionum. Quod erat præstandum.

Finis libri quarti.



QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI
LIBER QVINTVS
DE
PARABOLA.

SEctionem hoc libro explanãdam aggredimur ab antiquis coni rectanguli sectionem dictam, ab Apollonio & recentioribus parabolam nominatam, atque in eiusdem explicatione nonnihil morosiores erimus; quoniam planè sectio illa ad circuli quadraturam & alias æquationes cum circularibus perficiendas necessaria est, ob admirandas eius proprietates quæ cum circularibus & ellipticis planè connexæ sunt.

ARGVMENTVM.

DIuiditur liber hic in partes omnino octo.

Prima sectionem è cono educit, passionesque illius essentiales & reliquis fundamentales exhibet.

Secunda linearum in parabola proportionem tam continuam quàm discretam considerat.

Tertia sectionis focum, & mutuas parabolarum intersectiones Geometricè designat.

Quarta parabolarum, sese mutuo, vel circulum intersecantium contemplatur affectiones.

Quinta parabolam tam conuexam quàm concauam quadrat.

Sexta, parabolas & segmenta inter se confert, dein maximas sectioni inscribit figuras.

Septima varias exhibet parabolæ geneses quæ tum ex lineis, circulis, ellipsibus, tum ex ipsa oriuntur parabola.

Octaua miram exhibet parabolarum parallelarum cum hyperbola inter asymptotos posita, tam in ortu, quàm reliquis proprietatibus symbolisationem.

DEFINITIONES.

I.

DIameter parabolæ est recta linea intra parabolam ducta, quę omnes lineas cuidam æquidistantes bifariam diuidit, & siquidem ad rectos illas secet angulos, axis dicetur.

In omni verò parabola diametros axi æquidiſtare; & ſectioni in vno tantum puncto occurrere, ſuo loco demonſtrabitur.

I I.

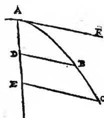
Verticem diametri voco punctum in quo diameter ſectionis perimetro occurrit: punctum autem quod axi & ſectionis perimetrò commune eſt, vertex dicitur parabolæ.

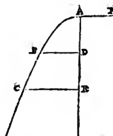
I I I.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur vnaquæque linearum æquidiſtantium, ac bifariam diuiſarum.

I V.

Latus rectum voco lineam iuxta quam poſſunt ordinatim ad diametrum applicatæ: ſiue latus rectum menſura eſt iuxta quam comparantur potentiæ linearum ordinatim ad diametrum poſitarum.





Porro illud præ reliquis ſectionibus peculiare in parabola ſibi vindicat latus rectum, quod rectangulum latere recto & parte diametri ab eiuſdem vertice, & puncto quo ab ordinatim poſita diuiditur, intercepta contentum, æquale ſemper conſtituat quadrato lineæ quę ordinatim poni dicitur.

Sit exempli cauſa in A B C parabola diameter A D, illiuſque latus rectum A F, ordinatim verò poſitæ ſint B D, C E: erit igitur ex mente Apollonij, quod & nos quoque demonſtrabimus, quadratum B D æquale rectangulo D A F; & E A F rectangulo æquale quadratum C E: & ſic de ceteris ordinatim poſitis idem oſtendetur.

Illud quoque hic obſeruandum eſt, quod & in ellipſi oſtendi, diuerſa diametris ſingulis aſſignari latera recta, cùm linearum quæ ad illas ordinatim poni dicuntur, diuerſæ quoque exiſtant potentiæ.

Deinde neceſſarium non eſſe latera recta ad extremitates diametrorum ſuarum, normaliter poni, ſed iiſdem eo poſſe applicari angulo quo diametri ab ordinatim poſitis interſecantur.

V.

Focum parabolæ appello, punctum in axe poſitum, à vertice interuallo diſſitum, quod æquale eſt quartæ parti lateris recti.

V I.

Parabolas parallelas voco quę ad eundem axem conſtitutæ diuerſos quidem habent apices, ſed latera recta æqualia, & concauas perimetros verſus eandem partem.

V I I.

Parabolæ æquales ſunt, quarum latera recta axibus inſeruientia ſunt æqualia.

PARA-

PARABOLÆ
PARS PRIMA

Parabolam è cono educit, paßionesq́ illius essentiales ac fundamentales exponit: & primò quidem diametros & ordinatim ad illas positas, præcipuasq́ illarum proprietates exhibet: secundò latus rectum illiusq́ naturam, dein secantium ac contingentium primarias designat affectiones.

PROPOSITIO PRIMA.

Esto conus ABC sectus triangulo per axem ABC, ductaque ED parallela lateri BC, fiat per ED sectio DFG, secundùm rectam EG normalem ad lineam AC; ponatur autem per H punctum quoduis in ED linea assumptum, recta IK æquidistans AC diametro basis coni: & per IK planum ducatur IFK æquidistans plano baseos AGC occurrens plano DFG secundùm communem intersectionem FH.

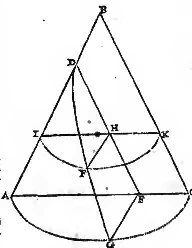
Dico HF quadratum esse ad quadratum EG, vt HD linea est ad lineam ED.

Demonstratio.

Qvoniam planum IFK æquidistat plano baseos AGC; circulus [a] erit IFK, & FH, EG communes intersectiones [b] parallelæ. quia verò AC, IK æquidistant, & EG normalis est ad AC, recta quoque HF normalis [c] est ad IK: ac proinde FH quadratum rectangulo IHK [d] æquale: sed & EG quadratum, rectangulo AEC æquale est; quadratum igitur EG est ad quadratum FH, vt AEC rectangulum ad rectangulum IHK: quia verò EH æquidistat KC adeoque HK, CE lineæ in parallelogrammo æquales sunt, rectangulum IHK est ad rectangulum AEC, vt IH ad AE [e] id est DH ad DE, quadratum igitur FH ad EG, quadratum est vt recta DH ad rectam DE. Quod erat demonstrandum.

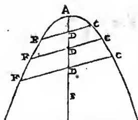
Vocetur autem sectio huiusmodi parabola cuius diameter DE, & ordinatim ad illam positæ FH, GE.

[a] 16. Prolog. ad sect. coni.
[b] 16. vndecimi.
[c] Ex elementis.
[d] 35 tertij.
[e] 1. sexti.



Scho-

Scholion.



Demonstratio hæc vniuersalis est & omni cono conuenit; ea tamen differentia, quod in scaleno dum ABC *triangulum non est maximum eorum quæ per axem fiunt recta* EG, FH *ordinatim ad diametrum* ED *posita, secent illam ad angulos obliquos, in recto autem ad rectos: cùm enim planum* ABC *in scaleno per axem ductũ, ad basim sit obliquum, sit autem &* ED *linea in plano* ABC, *illa quoque ad basim* AGC *adeoq; & ad lineam* EG *quæ in plano basis, ipsi* AC *normalis est, obliqua. igitur in scaleno, rectæ* EG, FH *ordinatim ad diametrum* DE *posita, ad obliquos eandem secant angulos. similiter ostendemus, in cono recto, ordinatim positas diametrum suam ad rectos diuidere.*

Hinc porro non leuis exsurgit difficultas, cum DFG *parabola in vtroque cono sit eadem, id est vtrum diametrus* ED *in scaleno, censeri debeat diameter aliqua secundaria parabolæ quæ in cono recto exhibetur: siue quod idem est, an in sectione coni recti, diameter aliqua sit quam ordinatim ad illam posita ad angulos secent obliquos: licet enim per priorem propositionem in vtroque cono demonstretur* DE *lineam diametrum esse, quam in cono recto ad angulos rectos in scaleno ad obliquos secent ordinatim ad illam posita, illud tamen ex discursu Apollonij non constat, in quauis parabola plures posse assignari diametros quarum vnam rectè, alteram obliquè secent ordinatim ad illas posita: & quia de parabolis inclinatis necdum constat, posset* ED *linea quoq; inclinata sectionis axis censeri, quem ordinatim posita ad obliquos secent angulos: sed difficultatibus illis omnino satisfacere conabimur: ostendemusq; in vna eademq; parabola diametros dari æquidistantes, quarum vnam ad rectos, ad obliquos alteram, secent ordinatim ad illas posita, ac nullas deinde inclinatas dari parabolas.*

Ex dictis & prima parabolæ proprietate constat primò, si AB *lineam ad angulum quemcunque æquidistantes secent* DC, *fueritq; vt* AD *linea ad lineam* AD, *sic* DC *quadratum ad quadratum* DC; *puncta* ACC *esse ad parabolam.*

Secundò patet si CDE *ordinatim posita ad* AB *æquidistans ponatur* CD, *cui indirectum addatur* DF *æqualis* CD, *punctum* F *esse ad parabolam: cùm enim sit vt* AD *ad* AD, *sic quadratum* CD *ad* CD *quadratum, ipsis autem* CD *æquentur* DE, DF: *quadrata quoque* DE, DF *proportionalia sunt lineis* AD, AD; *quare ea quæ diximus puncta* E & F *ad parabolam sunt: quæ singulariter & explicitè hic notare volui, eò quod postmodum sæpius sint assumenda.*

PROPOSITIO II.

SIt ABC triangulum productum plano per axem ABCG, positâque DE lateri AB æquidistante ducatur EG normalis ad diametrum basis AC, secundùm quam, & rectam ED, planum ponatur exhibens in superficie conica sectionem FDG: assumatur autem in ED, punctum quodcunque I per quod in plano FDG recta ponatur HK æquidistans FG;

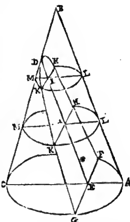
Dico HK in I bifariam secari.

Demon-

Demonstratio.

POsita per I punctum, LM parallela AC ducatur secundum LM, planum LKM æquidistans plano baseos AGC: circulus igitur a est LKM, & HK, FG communes intersectiones b parallelæ. & quia FEG ex hypothesi normalis ad diametrum AC, ab eadem in E bifariam est diuisa, HK quoque c normalis est ad LM, & d in I bifariam diuisa. Quod erat demonstrandum.

a 16. Prob.
b 16. Vndecimi.
c Ex schemb.
d 3. Tertij.



Corollarium.

EX hac propositione patet, in parabola, si diameter rectam quandam bifariam secet, omnes quoque eidem bissectæ æquidistantes bifariam secari, patet, cùm ED diameter sit quæcunque, & HIK quæuis æquidistantium rectę FG in E bifariam diuisæ.

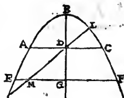
PROPOSITIO III.

DAta linea, parabolam in duobus punctis secante illius exhibere diametrum.

Constructio & demonstratio.

DIuisæ AC bifariam in D ponatur EF æquidistans, qua similiter bissecta in G, ducatur per G & D, linea BGD: dico illam diametrum esse quæsitam; si non, sit LD diameter, quæ producta secet EF in M: quoniam igitur LD diameter bifariam secat AC, bissecabit e quoque in M, FE ipsi AC æquidistantem, sed FE bissecta ponitur in G: erit igitur in G & M, bissecta linea FE. Quod fieri non potest. non igitur LD diameter est sed BD. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

e 1. huius.



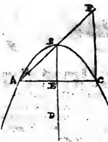
PROPOSITIO IV.

ADato in perimetro parabolæ puncto, ad datam diametrum ordinatim ponere.

Constructio & demonstratio.

SIt in perimetro parabolæ ABC. datum punctum A, & diameter data sit BED ad quam ex A ordinatim oporteat ponere lineam AEC, iuncta AB producatur in F, vt AB, BF æquales sint, & ex F demissa FC parallela BE, occurrat parabolæ in C. iungaturque AC: patet AC f in E bifariam esse diuisam, cùm AF, bissecta sit in B, & FC, BE æquidistent; à dato igitur in perimetro parabolę puncto, &c. Quod erat faciendum.

f Ex elementis.



Corollarium.

Hinc facilis praxis oritur, per datum in diametro punctum ordinatim ducendi lineam: ex assumpto enim in perimerto quouis puncto ponatur ordinatim quęcunque, cui per datum in diametro punctum æquidistans ducatur. patet illam ordinatim ad diametrum esse positam.

PROPOSITIO V.

Datam lineam ad datam in parabola diametrum ordinatim ponere.

Constructio & demonstratio.

F A B E C D

Data sit parabola ABC; & in ea diameter AD, ad quam oporteat datam rectam F ordinatim applicare; assumpto quouis puncto B in sectionis perimetro, ponatur ex B a linea BE ordinatim ad diametrum AD, fiatq; vt BE quadratum ad quadratum F; ita AE ad AD lineam, & per D punctum constituatur DC parallela EB. Dico factum esse quod requiritur: est enim ita pars diametri AE ad AD diametri partem, sicut b quadratum ordinatim positę BE, ad quadratum positę CD, sed ex constructione est BE quadratum ad quadratum F, vt AE linea ad lineam AD. Igitur CD c est æqualis ipsi F & est parallela ad EB; datam igitur lineam ordinatim posuimus, &c. Quod erat faciendum.

a 7. huius.
b 1 huius.
c 9. quinti.

PROPOSITIO VI.

Ordinatim applicatarum ad duas diametros quarum altera est axis, illa minor est quæ ad axem applicatur; modò distantiæ à puncto verticis æquales fuerint.

Demonstratio.

B A K C D E G H F

Sit parabolæ ABC axis BD & ordinatim ad illum posita AC: ducta deinde AE parallela BD, fiat BF quadrupla BD, ponaturque FG parallela DA dein FG, bisecta in H ponatur HA æquidistans BF, iungaturque BG: quoniam BD ad BF, eam rationem habet quam vnum ad quatuor ex constructione, igitur quadratum AD ad GF, est vt vnum ad quatuor; igitur GF linea dupla est AD, hoc est HF, & BF dupla est EH; ac proinde BG dupla GE: item AE æqualis ipsi BD, & AC ipsi GF. vnde BG ordinatim d posita est ad diametrum AE; est autem GB e maior GF hoc est AC, igitur GB ordinatim posita ad AE æqualem BD, maior est recta AC quæ ad axem ordinatim collocata est; & quia eandem rationem seruant quadrata applicatarum, quam f partes diametrorum inter verticem & ordinatim applicatas constitutæ, hinc vniuersaliter de omnibus applicatis constat veritas propositionis.

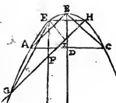
d Defin. 3. huius.
e Ex elementis.
f 1. huius.

Aliter.

Aliter.

Propositio hæc aliter per Archimedem demonstratur. Sint BD, EF diametri eiusdem altitudinis; & BD quidem axis: ponanturque per D & F, ordinatim lineæ AC, GH.

[a] Dico AC minorem esse recta GH, iungantur enim ABC, GEH: & ex E recta demittatur EI normalis ad GH. cùm igitur æquales sint distantiæ EF, BD, æqualia sunt triangula, GEH, ABC per Archimedem. quare vt EI ad BD, sic AC ad GH: est autem BD id est EF maior EI (cùm angulus I in triangulo EIF rectus sit) maior igitur erit GH quàm AC. Quod erat demonstrandum.

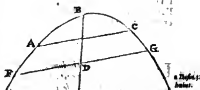


PROPOSITIO VII.

AD datum punctum in diametro parabolæ ordinatim ponere.

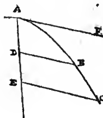
Constructio & demonstratio.

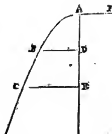
SIt data parabola ABC, cuius diameter aliqua BD, & in ea punctum assignatum D per quod oporteat rectam collocare ordinatim ad BD diametrum; assumpto in perimetro quouis puncto A ducta sit quæuis AC, ordinatim ad diametrum BD cui parallela ponatur per punctum D: patet FDG ordinatim esse [a] positam & in D bifariam diuisam. Fecimus igitur quod petebatur.



[a] Defin. 7. huius.

PROPOSITIO VIII.



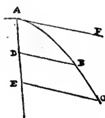


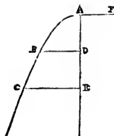
DAtæ diametri in parabola latus rectum exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabola, & in illa diameter AD cuius latus rectum oporteat exhibere, posita sit quæuis BD ordinatim ad diametrum AD, fiantque continuæ proportionales AD, DB, AF. Dico AF satisfacere petitioni: applicetur enim quæuis alia EC parallela DB [b] erit igitur vt AD ad AE, sic DB quadratum ad quadratũ EC: [b] 1. huius.

 sed

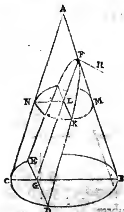




21 sexti. sed vt A D ad A E, sic F A D a rectangulum ad rectangulum F A E; igitur vt quadratum D B est ad quadratũ E C, sic F A D rectangulum ad rectangulum F A E; & permutando vt D B quadratum, ad rectangulum F A D, sic E C quadratum ad rectangulum F A E, sed B D quadrato æquale est rectangulum F A D, quia A F, B D, A D, proportionales sunt; igitur & E C quadratum æquale est rectangulo F A E, ac proinde F A latus rectum diametri A D: exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

Scholion.

Lubet hic apponere methodum, & constructionem qua Apollonius lib.1. Conicorum latus rectum parabolæ adinuenit: vnaq́ breuiter ostendere latus rectum præcedenti propositione à nobis inuentum, idem esse cum eo quod Apollonius aliâ constructione adinuenit.



Sit, inquit, coni vertex A, *basis, circulus* B, C: *seceturq́ plano per axem quod sectionem faciat triangulum* A B C: *secetur & altero plano secante basim coni secundùm rectam lineam* D E *qua ad* B C *sit perpendicularis, & faciat sectionem in superficie coni* D F E *lineam, diameter autem sectionis* F G *æquidistans sit vni laterum trianguli per axem: atque à puncto* F *linea* F G *ad rectos angulos ducatur* F H, *& fiat vt quadratum* B C *ad rectangulum* B A C, *ita linea* H F *ad* F A; *sumatur autem in sectione punctũ quodlibet* K, *& per* K *ducatur* K L, *ipsi* D E *æquidistans. Dico quadratum* K L *rectangulo* H F L *æquale esse. Assertionem porro doctissimo & sublimi discursu demonstrat; qui cùm tyronibus difficilior sit, faciliori nos latus rectum methodo præcedenti propositione conati sumus expedire, ostendimus enim posita eadem figura, si fiant* F L, K L, F H, *continua proportionales,* F H *latus rectum esse. Nunc restat vt ostendam, illud idem esse cum eo quod Apollonius constructione antedicta adinuenit. Acta per* L *linea* M N, *æquidistante ipsi* B C, *erit planum quod transit per* L K M N, *æquidistans plano coni baseos, adeoq́ circulus: &* L K *quadratum, id est ex hypothesi rectangulum* H F L, *æquale rectangulo* M L N; *quare rectangulum* M L N *ad ipsum* L F A, *est vt* H F L ad L F A: *sed* H F L *est ad* L F A, *vt* H F *ad* F A, *igitur vt* H F *ad* F A, *sic* M L N *ad* L F A: *sed ratio* M L N *ad*

ad LFA *componitur ex ratione* ML *ad* LF, *& ex* LN *ad* FA; *igitur proportio* HF *ad* FA, *componitur ex* ML *ad* FL, *&* LN *ad* FA: *est autem* ML *ad* LF, *vt* MN *ad* NA, *adeoq; &* LN *ad* FA, *vt* MN *ad* MA; *igitur proportio* HF *ad* FA, *componitur ex proportionibus* MN *ad* NA, *& ex* MN *ad* MA, *id est ex* BC *ad* CA, *&* CB *ad* BA: *sed ex iisdem quoque componitur ratio quadrati* BC *ad rectangulum* BAC, *igitur* HF *est ad* FA, *vt* BC *quadratum ad rectangulum* BAC: *sed posita proportione quadrati* HF *lineæ, ad lineam* FA *eadem, cum ea quam habet* BC *quadratum ad rectangulum* BAC, *erit* HF *linea per Apollonium latus rectum parabolæ; igitur si* FL, KL, FH *fiant continuæ proportionales, erit* HF *latus rectum idem cum eo quod aliter adinuenit Apollonius. vnde patet vtramque constructionem in idem incidere & alteram alterius tantùm esse conuersam; positâ enim proportione* HF *ad* FA, *quæ est* BC *quadrati ad rectangulum* BAC, *infert Apollonius* HF, KL, FL *continuè esse proportionales, adeoq;* LK *lineam posse rectangulum* HFL, *nos verò positis tribus continuis* HF, KL, FL *inferimus* HF *latus esse rectum, & omnes lateris recti proprietates habere: quia verò tribus illis positis continuis sequitur quoque* HF *esse ad* FA, *vt* BC *quadratum ad rectangulum* BAC, *patet* HF *idem latus rectum esse cum eo quod Apollonius proposuit.*

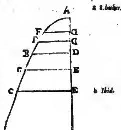
Ex antedictis verò patet ordinatim ad diametrum aliquam applicatas eo maiores esse quo remotiores sunt à vertice sua diametri, nam semper excrescit rectangulum sub latere recto & porte diametri intercepta à vertice eiusdem & puncto quo ab ordinatim posita secatur: vnde & ordinatim posita, & portio illa diametri ante determinata necesse est quandoque inter se & lateri recto sint quales, cuius casus sequentibus propositionibus assignabimus.

PROPOSITIO IX.

Sit ABC parabolæ diameter AD æqualis lateri recto, ex D ponatur ad diametrum AE ordinatim linea DB.

Dico DB lineam æquari AD, & si AD, DB lineæ æquentur, dico AD æquari lateri recto, quod inseruit diametro AD.

Demonstratio.



Qvoniam BD linea, ordinatim applicatur ad diametrum AD, erit BD quadratum æquale [a] rectangulo super AD & latere recto, sed AD linea æqualis ponitur lateri recto, igitur quadratum BD æquale est quadrato AD, adeoque BD, AD lineæ æquales sunt. [a] 1. huius.

Sint iam AD, BD lineæ æquales, & BD quidem ordinatim posita ad diametrum AD, dico AD lineam æquari lateri recto. cùm enim quadratum BD æquale ponatur quadrato AD, sit autem & BD quadratum æquale rectangulo [b] super AD & latere recto, erit & quadratum AD æquale rectangulo super AD & latere recto, ideoq; & AD linea lateri recto æqualis. Quod erat demonstrandum. [b] ibid.

PROPOSITIO X.

Iisdem positis ducantur ordinatim lineæ CE, FG: & CE quidem cadat infra BD, recta verò FG supra.

Dico AG ad GF rationem minoris inæqualitatis esse, & AE ad EC maioris.

Demonstratio.

Qvoniam AD linea æqualis ponitur lateri recto, erit FG quadratum æquale [c] rectangulo GAD, adeoque AG, GF, AD continuæ proportionales; est autem [c] ibid.

 autem

a Schol pro. pos. 8 huius. autem A D id est B D, maior quàm [a] F G, igitur & F G maior est quàm A G. Quod erat primum.

Rursum cùm D A E rectangulum æquale sit quadrato C E, proportionales erunt A D, C E, A E lineę: sed A D id est B D, minor est quàm C E ex ante demonstratis: igitur & C E minor est rectâ A E: adeoque ratio A C ad C E est maioris inæqualitatis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Esto parabolæ A B C quæuis diameter A D, & ex A ponatur A E, æquidistans ordinatim positis ad diametrum A D; ponatur quoque ex A linea A B, diuidens bifariam angulum E A D, occurrensque parabolæ iterum in B puncto, ex quo ordinatim ad diametrum ponatur B D.

Dico A D lineam æquari lateri recto.

Demonstratio.

b Ex elementis.
c 6. Primi.
d 9. huius.

Quoniam A E, B D æquidistant, angulus E A B [b] æquatur angulo A B D; sed angulo E A B ex hypothesi æquatur angulus B A D, æquales igitur sunt anguli A B D, B A D: adeoque [c] & lineæ B D, A D: vnde A D, [d] lateri recto est æqualis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Sit A B C parabolę axis A D, & ex A demissa linea A B, parabolæ iterum occurrat in B puncto ex quo ad axem ordinatim ponatur B E. ducatur autem & B D normalis ad A B, occurrens axi in D.

Dico D E lineam æquari lateri recto.

Demonstratio.

ABD
e Ex elementis.
f 8. huius.

Quoniam angulus A B D rectus est, & B E normalis ad axem A D, proportionales [e] sunt A E, E B, E D: & E B quadrato æquale rectangulum A E D: sed & E B quadrato æquale est rectangulum super A E [f] & latere recto, rectangulum igitur A E D æquale est rectangulo sub A E & latere recto. æqualis ergo E D est lateri recto. Quod erat demonstrandum.

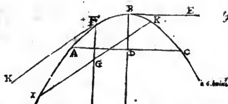
PROPOSITIO XIII.

Latus rectum axeos, minimum est laterum rectorum, reliquarum diametrorum.

Demon-

Demonstratio.

Parabolæ ABC axis sit BD, illiusque latus rectum BE, sit autem & alia quæuis diameter FG, cuius latus rectum ponatur FH: dico BE minus esse latere recto FH: ponatur enim ADC ordinatim ad axem, sumptaque FG æquali BD, ducatur per G ordinatim ad diametrum FG, linea IK. maior igitur est, a IG quàm AD, & IG quadratum maius quadrato AD: sed IG quadrato æquatur b rectangulum super HF, FG, & EBD rectangulum æquale est quadrato AD, maius igitur est rectangulum HFG, rectangulo EBD: æquales autem sunt ex constructione BD, FG, igitur FH latus rectum maius est latere recto BE: igitur latus rectum a xeos minimum est, &c. Quod erat demonstrandum.



a 6. huius. b 8. huius.

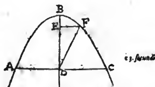
PROPOSITIO XIV.

Sit ABC parabolæ axis BD maior latere recto: & per D ordinatim ad axem posita ADC: factaque DE æquali lateri recto, ponatur EF æquidistans AC, iunganturque DF.

Dico FD lineam æquari lineæ DC.

Demonstratio.

Quoniam ED lateri recto æqualis est, quadratum FE æquatur rectangulo BED: addito igitur quadrato DE, quadrata FE, DE simul sumpta, id est quadratum FD, ob angulum FED rectum æquale est c rectangulo BDE: sed & BDE rectangulo æquale est quadratum DC: æqualia igitur sunt quadrata FD, DC. Quod erat demonstrandum.



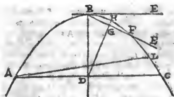
c 3. secundi.

PROPOSITIO XV.

Omnis linea per apicem diametri acta, & ordinatim positæ æquidistans, sectionem contingit: & contra quæ contingenti æquidistat ordinatim posita est ad diametrum ex contactu demissam.

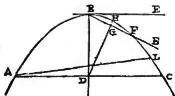
Demonstratio.

Sit ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim posita ADC: cui per B verticē diametri ponatur æquidistans BE, dico illam, contingere sectionem in B. si enim non contingit parabolam, secet illam in F: diuisaque BF bifariam in G, ponatur per G & D, linea GD; cùm igitur FB, AC æquidistantes bifariam diuidat GD, erit illa d diameter ad quam ordinatim posita est AC: sed & AC quoque ordinatim applicata est ad diametrum BD,



d 1. Defin. huius.

cùm



cū ab illa bifariam secetur; linea igitur A C ordinatim posita est ad duas diametros, quod fieri non potest: alias enim ipsi A C æquidistantes à diametris B D, G D bifariam in diuersis punctis diuiderentur. non igitur B E secat, sed contingit sectionem in B.

Sit iam E B contingens, illique æquidistet A C: dico illam ordinatim esse applicatam ad diametrum B D. si enim non, ponatur A L ordinatim ad B D, æquidistat igitur A L contingenti B E; & quia A C quoque contingenti parallela est, ipsa A L æquidistat A C, quod fieri non potest, cùm in A puncto sese decussent. non igitur A L ordinatim posita est ad B D, sed A C linea æquidistans contingenti B E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

PEr datum in parabolæ perimetro punctum, contingentem ducere.

Constructio & demonstratio.



SIt in A B C parabolę perimetro datum punctum B, oporteat per illud contingentē ponere: demissa sit ex B diameter B D, ad quam ordinatim ponatur A C, cui æquidistans per B ducatur B E: [a] patet illam esse contingentem; per datum igitur punctum, &c. Quod erat faciendum.

a 15. huius.

PROPOSITIO XVII.

PArabolam contingens conueniat cum diametro: ad quam ex puncto contactus ordinatim quædam posita sit.

Dico diametrum interceptam, inter ordinatim applicatam & punctum in quo contingens cum diametro concurrit, à parabola bifariam diuidi.

Demonstratio.

SIt A B C conus quicumque, sectus triangulo per axem A B C, diameter autem baseos A G B, sit A B, in qua assumpto quouis puncto E quod centrum non sit ponatur E H æquidistans A C: & E I normalis ad A B: tum per H E, E I fiat sectio, exhibens parabolam G H I; positoq; C D, axe coni, perficiatur parallelogrammum C D B, cuius lateri B M occurrat E H producta in F: iunctaque C F, diametro A B protractæ occurrat in K: ponatur dein per I contingens circulum A I B in I, conueniens cum A B in L, puncto quod idem est cum puncto K: cùm enim C K, sit ad [b] F K, vt C D ad F B, id est M B ad F B, id est D B ad E B, erit quoque D K ad B K, vt D B ad E B, & diuidendo B K ad D B, vt B E ad E D, & componendo D K ad D B, vt D B ad D E; proportionales igitur sunt

b Per elementa.

D E,

DE, DB, DK: igitur [a] contingens per I posita cum diametro conuenit in K: idem ergo punctum est K & L; vlterius, iungantur puncta CE, CI; quoniam igitur CI linea in superficie est coni, triangula sunt, CBI, CIK, & planum CIK continget conum in linea CI ponatur tandem in plano CIK linea IF; continget illa parabolam in I: cùm enim planum CIK conum contingat, linea autem FI in eodem plano sit, & simul in plano parabolæ, cùm puncta K & I, in eodem sint, patet FI contingentem esse parabolæ in I. [a 17. lib. de circulo.]

Vlterius cùm CM linea æquidistans & parallela sit semidiametro DB, æquidistat quoque & æqualis est AD: vnde AC, DM parallelæ: & quia FE æquidistat AC, æquidistabit EF ipsi DM: est autem MD diameter parallelogrammi DM, in N à diametro [b] CB bifariam diuisa, recta igitur FE in H, quoque ab eadem diametro bissecta est: æquales ergo sunt lineæ EH, HF. igitur parabolam contingens, &c. Quod erat demonstrandum. [b Per elementa.]

Quod si punctum assumptum ipsum centrum sit, patet demonstratio: eodem enim modo ostendetur OM esse contingentem parabolæ quæ per lineas ND, DO, &c. ducetur.

PROPOSITIO XVIII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, contingant in A & B, rectæ AE, BE conuenientes in E: & EB quidem AF, æquidistanti BD occurrat in F.

Dico FB in E bifariam esse diuisam.

Demonstratio.

PRoducta AE conueniat cum diametro in G, ponaturque ex A ordinatim linea AD. quoniam AD, EB æquidistant, vt GB ad GD, sic EB est ad AD, id est FB, sed GB dimidia [c] est GD, igitur & EB dimidia quoque est FB. Quod erat demonstrandum. [c 17. huius.]

Corollarium primum.

HInc patet, si iunctâ AB quotuis HI ponantur æquidistantes ipsi FB, illas bifariam à contingente AG diuidendas.

Corollarium secundum.

SEquitur secundò rectas FA, GB, item AE, GE çquales esse adeoq́ue & AFE, GEB triangula æqualia. patet, cùm FE, EB æquales sint ostensæ, & AFE, GEB triangula similia ob GB, FA æquidistantes.

PROPOSITIO XIX.

IN parabola diametri omnes æquidistant axi.

Demonstratio.

SIt ABC parabolæ axis AD, cui in E occurrat contingeos BE, positaq́ue AC parallela contingenti BE, demittatur ex B, linea BG æquidistans axi, pooãtur BF, CHD ordinatim ad axem AD, & BG producta occurrat contingeoti per A ductæ in K: Quooiam BE cõtingens est & BF ordinatim ad axem AD applicata, æqoales sunt lioeæ [a] EA, FA. & quia BF communis altitudo est, triangulum EBF, [b] parallelogrammo BA æquale est: rursum vt AF ad AD, sic [c] FB quadratum ad quadratum CD, & FK parallelogrã-mum ad parallelogrammum DK: vt quadratum igitur FB ad quadratum CD est, sic FK parallelogrammum [d] ad parallelogrammum DK, sed vt FB quadratum ad quadratum CD, sic EBA triangulum [e] ad triangulum CAD: igitur vt FK parallelogrammum ad parallelogrammum DK, sic EBF triangolum est ad triaogulum ACD: & permutando vt FK parallelogrammum ad triangulom BFE, sic DK parallelogrammum est ad triangulum ACD: æqualia autem ostensa suot, triangulum BFE & parallelogrammum FK; æqualia igitur sunt DK parallelogrammum & triangulum ACD: & ablato commuoi AGHD, æqualia remanent triangula AGK, CHG. vnde cum similia quoque siot ob AK, CH æquidistantes, æqualia sunt latera [f] KG, GH, & CG, GA: diuisa igitur bifariam est AC. eodem modo si IK ponatur æquidistans CA, & ex K diameter posita sit LK occurreos BE contingenti in L, ostendetur IK in M, bissecari à linea BG: diameter [g] igitur sectionis est BG: quare cùm EB contingens sit quæcunque, adeoq́ue & BH quęuis æquidistans axi, patet diametros omoes axi æquidistare. Quod erat demonstrandum.

a Ibid.
b Per elementa.
c 1. huius.
d 1. Sexti.
e 19. Sexti.
f Per elementa.
g 3. huius.

Ex quo sequitur diametros omnes in parabola esse parallelas.

PROPOSITIO XX.

OMnis contingens per extremitatem ordinatim positæ ducta, cum illius diametro conuenit.

Demonstratio.

POsita sit diameter BD, & ad illam ordinatim applicata AC: agaturq́; per A contingens, dico illam BD diametro occurrere: ducta enim diametro AF [h] æquidistabit illa BD, vnde cùm AE secet AF æquidistantium vnam, alteram quoque DB, [i] producta intersecabit. Quod erat demonstrandum.

h 19. huius.
i Per elementa.

Corol-

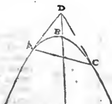
Corollarium.

Hinc patet, quascumque duas contingentes parabolam, conuenire in aliquo puncto extra sectionem: patet ex iam demonstratis.

PROPOSITIO XXI.

Contingentes actæ per extrema ordinatim applicatæ cum eiusdem diametro, in vno eodemque conueniunt puncto.

Demonstratio.

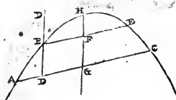


Sit ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata A C, dico contingentes per A & C ductas, diametro B D occurrere in vno eodemque puncto D. demonstratio patet, cùm pars diametri à sectione & contingente intercepta æqualis sit portioni à sectione & ordinatim applicata interceptæ. igitur contingentes, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Per datum punctum in perimetro parabolæ diametrum ducere.

Constructio & demonstratio.



Sit in ABC perimetro assignatum punctum B, ex quo oporteat diametrum ponere; ductâ quauis secante B E, exhibeatur illius diameter a H F, cui per B æquidistans ponatur B D: patet illam b sectionis esse diametrum: à dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

a 3. huius.
b 19. huius.

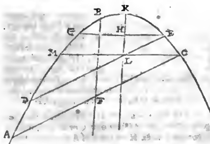
Corollarium.

Eadem omnino praxi vtemur, si ex dato, extra vel intra sectionem puncto D, diametrum oporteat ponere. constructio & demonstratio patet ex prima propositione.

PROPOSITIO XXIII.

Datæ parabolæ axem exhibere.

Constructio & demonstratio.



Sit A B C parabola cuius axem oporteat exhibere, ponantur duæ quæuis parallelę D E, A C quarũ c exhibeatur diameter B F: ad quam ex E & C normaliter ducantur E G, C M; alterâque illarum, puta E G bifariam diuisa

c 3. huius.

 in

in H ponatur per H æquidistans diametro B F. dico illam axem esse. quoniam enim diametro B F æquidistat, erit [a] illa quoq; diameter sectionis, & quia æquidistantium E G, C M vnam ad rectos bisecat angulos, bisecabit & [b] alteram, ad rectos: axis [c] igitur sectionis est K L: exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

a 19. huius. b 2. huius. c 1. Defini. huius.

PROPOSITIO XXIV.

Omnis linea in parabola axi æquidistans, sectioni in vno tantum puncto occurrit.

Demonstratio.

d 1. huius.

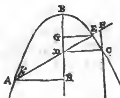


Ponatur A B C parabolę axis B D: & alia quæuis ei æquidistans A C dico [d] A C in vno tantum puncto sectioni occurrere: sin verò, occurrat iterum in C: & ponantur ordinatim ad axem rectę A E, C D: erit igitur vt B E linea ad lineam B D, sic E A quadratum ad quadratum D C, quod fieri non potest, cùm A E, C D quadrata æqualia sint inter se, (ob A D parallelogrammum) & B E linea minor rectâ B D. igitur A C diameter, parabolæ tantum semel occurrit: Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

Omnis linea in parabola, quæ non est diameter sectioni occurrit in duobus punctis.

Demonstratio.



Ponatur A B C parabolæ axis B D, & linea K D quæ non sit diameter, dico illam sectionibus occurrere: Quoniam K D non est diameter adeoque axi non æquidistat, producta necessario illi occurret in puncto quouis D (cùm in eodem plano existat) quod si D punctum fuerit intra parabolam, ponatur ex D ordinatim D C, & per C diameter EF; occurret illa sectioni in vno tantum puncto; & quia eadem axi æquidistat producta quoque occurret K D productæ in F puncto, quod extra sectionem est. vnde K D F prius necessario occurrit in puncto quouis E. ducta igitur ex E ordinatim E G fiant proportionales B G, B D, B H positaque ad H ordinatim linea, occurrat ipsi K D in puncto quouis A. quoniam B G, B D, B H ponuntur proportionales, erit H D ad D G, vt H B ad B D, & H D quadratum [e] ad quadratum D G, vt H B quadratum ad quadratum D B, id est vt H B linea, ad lineam B G: sed + vt H D quadratum ad quadratum D G, sic + H A quadratum ad quadratum G E: igitur vt H B linea ad lineam B G, sic H A quadratum ad quadratum G E, vnde punctum [f] A est ad parabolam, & D K, linea axi non parallela vtrimque sectioni occurrit.

CF

e 1 De progressionibus.

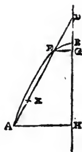
f Coroll. prima huius.

[illegible]

Si verò D K linea occurrat axi extra sectionem, patet antè parabolę occurrere in puncto quouis E: ex quo ducta ordinatim linea E G, fiant B G, B D, B H proportionales, & ex H ducatur H A parallela E G, occurrens K D lineæ in A. quo-

[illegible]

quoniam igitur est HB ad BD, vt BD ad BG, erit componendo permutando HD ad DG, vt DB ad BG, est autem vt HD ad DG, sic AH ad EG, ergo vt DB ad BG, id est per constructionem BH ad BD, sic AH ad EG. vnde & HA quadratum ad quadratum GE est vt HB, quadratum ad quadratum BD, id est (cùm HB, BD, BG, sint continuæ,) vt HB linea est ad lineam BG, ac proinde punctum A est ad parabolam, & AD linea sectioni bis occurrit. Quod fuit demonstrandum.



Corollarium.

Hinc pulchra educitur propositio: nimirum si BG, BD, BH ponantur continuæ & ex G ordinatim linea GE, agaturque per puncta E & D linea, occurrens rectæ ex H ductæ & ipsi GE parallelæ in A: quod punctum A sit ad parabolam, demonstratio habetur in priori propositione.

Sequitur secundò nullam lineam parabolæ in pluribus quam duobus punctis occurrere. Cùm enim parabola, sectio sit coni, & ipsi cono nulla linea, in pluribus quam duobus punctis occurrat, patet nec vlli sectioni conicæ, lineam in pluribus quam duobus punctis occurrere.

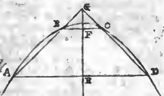
PROPOSITIO XXVI.

Parabolam ABC secent duæ quæuis parallelæ AD, BC quarum diameter ponatur EF.

Dico iunctas AB, DC diametrum in eodem puncto G decussare: & si BC, AD æquidistent iunctæque AB, CB conueniant in G. dico G punctum esse in diametro linearum BC, AD.

Demonstratio.

Quoniam EF diameter est rectarum BC, AD, igitur diuisæ sunt bifariam BC, AD in punctis F & E. vnde vt AE ad BF, sic est AG ad BG: hoc est EG ad FG. sed vt AE ad BF, ita ED ad FC; igitur vt ED ad FC, ita est EG ad FG; hoc est DG ad CG. igitur punctū G commune est tribus lineis AB, DC, EF. Quod fuit primum.



Idem quoque ostenditur si G punctum cadat intra parabolam, si iam ponantur AD, BC parallelæ, & iunctæ AB, CD conueniant in puncto quouis G, dico G punctum esse in diametro ad quam BC, AD ordinatim ponuntur.

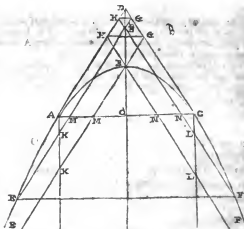
Diuisa enim BC bifariam in F demittatur ex G per F linea GE: quoniam igitur AD, BC æquidistant, erit AE ad ED, vt BF ad FC; sed BC in F bifariam ponitur diuisa, igitur & AD in E, [a] quoque diuisa est bifariam: vnde GE diameter est linearum BC, AD; &c. Quod erat demonstrandum. a 2. huius.

PROPOSITIO XXVII.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim applicata AC, aganturq; per A & C, contingentes AD, CD, conuenient illę cum diametro in D: tum punctum sumatur B, quodcunque in diametro BD: & ex B rectæ ponantur BE, BF, æquidistantes contingentibus, parabolę verò occurrentes in E & F.

Dico iunctam EF æquidistare AC, adeoq; ordinatim esse positam ad diametrum BD.

Demonstratio.



DEmittantur ex A & C, diametri AK, CL occurrentes rectis BE, BF in L & K: productæque EB, FB; contingentibus occurrant in H & G: erit igitur HD, GB parallelogrammum, & HG bissecta à diametro DB, æquidistant ergo HG, AC: & quia AD, BE quoque parallelæ sunt, æquantur HG, AM: similiter cùm æquentur HG, NC, rectæ AM, NC æquales sunt: est autem AC in O, bifariam diuisa, æquantur ergo & reliquæ MO, ON: quare vt AM ad MO, sic CN ad NO. sed vt AM ad MO sic AK ad BO; & vt CN ad NO, sic LC ad BO, igitur vt AK ad BO sic CL ad BO, æquales ergo sunt diametri AK, CL: quia verò EB, FB contingentibus æquidistant, portiones illarum parabolâ interce-
a 4. huius ptæ, in a K & L bifariam sunt diuisæ. Vlterius ponatur per E æquidistans AC, linea EP. occurrens parabolæ in E & F, rectæ BF in P. quia igitur AC bissecta est à diametro BD, erit & EF ab eadem in R bifariam diuisa: & ER, RF æquales inter se: quia verò AC æquidistat HG, æquidistabunt quoque EP, HG: & EP quoq; vt HG, à diametro BD bissecta est: æquantur igitur RP, RF: & puncta FP vnum idemq; sunt: estque F communis intersectio linearum EF, BF cum parabola: æquidistant igitur EF, AC, HG. Quod erat demonstrandum.

Corolla-

Corollarium.

EX his sequitur primò: posita E F ordinatim ad diametrum B D quam in D secent contingentes duæ A D, C D: lineas ex E & F ductas ipsis A D, C D æquidistantes diametrum quoque B D, in vno eodemque puncto decussare. patet demonstratio ex præcedenti, cuius conuersa est.

Sequitur secundò: posita A C ordinatim ad diametrum B D demissisque ex A & C æqualibus diametris A K, C L, quod rectæ per K & L, ordinatim positæ, D B diametro occurrant in vno eodemque puncto. patet ex ante dictis demonstratio, cùm tangentes per A & C actæ, ordinatim per K & L positis æquidistent, & B D diametro in vno eodemque occurrant puncto.

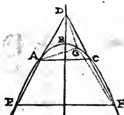
Sequitur tertiò: lineam (Q T) coniungentem puncta, in quibus rectæ (B E, B F) contingentibus æquidistantes, parabolę occurrunt, ęquidistare rectæ (E F) extrema linearum B E, B F coniungenti, adeoque lineas Q T, A C, E F esse parallelas. ex ante dictis demonstratio manifesta est.

PROPOSITIO XXVIII.

ESto A B C parabolæ diameter B D, in qua assumpto puncto quouis D, demittatur D E secans parabolam in duobus punctis A & E & ex E ordinatim ponatur E F, iunctaque F D occurrat parabolę in C.

Dico E F, A C lineas æquidistare.

Demonstratio.



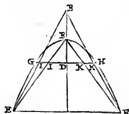
SI enim non sint parallelę, ponatur A G æquidistans E F, & ex F per G, ducatur F G, conueniet illa cum diametro B D a in D, est autem ex constructione D F linea recta occurrens sectioni in C; igitur recta F G D, eadem est cum F C D vnde & punctum G idem cum C puncto, igitur æquidistant E F & A C. Quod fuit demonstrandum. a 26. huius

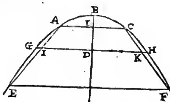
PROPOSITIO XXIX.

AEquidistent in parabola quęuis lineæ A C, E F, iunctisque A E, C F ponatur alia quæuis G H parallela A C, occurrens iunctis A E, C F in I & K.

Dico G I, K H lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.

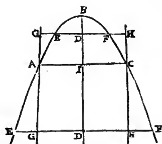




POnatur L D diameter rectarum A C, G H. Quoniam H G ęquidistat A C ordinatim positæ, erit H G in D b bifariam diuisa: est autem I D æqualis D K cùm b a. huius fit

a 16. huius. fit ID ad DK, vt AL ad LC (quia EA, a FC lineæ in idem punctum diametri conueniunt) igitur & reliquæ IG, HK quoque sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXX.



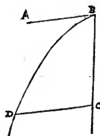
AEquidistét rursum in ABC parabola, rectæ AC, EF, ponanturque per A & C diametri AG, HC occurrentes EF lineæ in G & H.

Dico EG, FH lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.

POnatur ID diameter linearum AC, EF. Quoniam EF, AC lineæ ordinatim positæ sunt ad diametrum ID, erunt AC, EF in D & I bifariam diuisæ, sed & GH in D bifariam est diuisa, cùm GH æqualis sit rectæ AC, igitur reliquæ EG, HF, sunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXI.



DAto angulo ABC & puncto in illo D, oportet per B & D parabolam describere cuius diameter sit BC & AB eandem contingens.

Constructio & demonstratio.

DVcatur ex D linea DC parallela AB occurrens BC lineę in C: fiatque vt BC ad DC, sic DC ad AB, erit AB latus rectum parabolę quæsitę, ac proinde determinata est parabola quę petebatur.

P A-

PARABOLÆ
PARS SECVNDA

Linearum in parabola tam continuam, quàm discretam contemplatur proportionem.

PROPOSITIO XXXII.

SIt ABC parabolæ axis AD; in quo assumpto quouis puncto D, educantur ex D ad peripheriam lineæ DB, DC constituentes angulos ADB, CDF æquales; tum rectæ ponantur BE, CF ordinatim ad axem AF.

Dico AE, AD, AF, in continua esse analogia & contra.

Demonstratio.



QVoniam EB, CF ordinatim positæ sunt ad axem, anguli BED, CFD recti sunt: æquales autem ponuntur anguli BDE, CDF; similia igitur sunt triangula BED, CFD: & vt EB ad FC, sic ED ad FD: rationis autem EB ad CF, duplicata est[a] ratio AE ad AF, ergo & duplicata est rationis ED ad DF: vnde AE, AD, AF, continuę sunt proportionales. vt facile deducitur ex prima de progress. Geometricis.

a 1. huius.

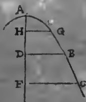
Sint iam proportionales AE, AD, AF, positisque ordinatim BE, CF: iungantur BD, CD: dico angulos BDE, CDF æquari. cùm proportionales sint AE, AD, AF, ratio AE ad AF duplicata est rationis AD ad AF id est ED ad DF, sed etiam ratio AE ad AF, duplicata est rationis BE ad CF, igitur vt ED ad DF, sic BE ad CF, & vt DE ad BE, sic DF ad FC: vnde cùm anguli proportionalibus lateribus contenti recti sint, similia sunt triangula BED, CFD, & anguli BDE, CDF æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

SIt ABC parabolę diameter AD diuisa in H, D, F, vt AH, AD, AF cõtinuę sint proportionales: ponantur autem ordinatim lineę HG, DB, FC.

Dico illas in continua esse analogia.

Demonstratio.



PAtet; cùm AH, AD, AF sint continuę proportionales & duplicatam rationem habeant linearum GH, BD, CF.

PROPOSITIO XXXIV.



Esto A B C parabolę axis A D æqualis lateri recto, ductaque ordinatim linea quacunque E B, iungantur A B.

Dico A E, A B, E D lineas esse proportionales.

Demonstratio.

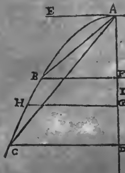
Qvadratum A B æquale est quadratis A E, E B: sed E B quadratum æquatur rectangulo E A D; igitur quadratum A B æquale est rectangulo E A D vnà cum quadrato A E, id est rectangulo A E D. quare A E, A B E D lineæ sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Parabolam A B C cuius diameter A D contingat in A linea A E, demissisq́; ex A lineis A B, A C quæ parabolæ occurrant in B & C vt anguli E A B, D A C æquales sint ductisque ordinatim B F, C D, inueniatur A G, media inter A F & A D.

Dico A G æquari lateri recto; & si anguli E A B, D A C æquales fuerint, & A G linea æqualis lateri recto, dico A F, A G, A D esse proportionales & si A F, A G, A D fuerint continuæ, & A G media æqualis lateri recto: dico angulos E A B, D A C esse inter se æquales.

Demonstratio.



Dvcatur ex G ordinatim linea G H. Quoniam angulus D A C ex hypothesi ęqualis est angulo E A B, addito vel dempto communi angulo B A C, angulus B A D æqualis est angulo E A C, id est angulo A C D; (ob A E, C D parallelas) æquales autem sunt & anguli B F A, C D A, triangula igitur A B F, A C D inter se similia sunt & vt B F ad F A, sic A D ad D C, vnde F A D rectangulo, æquale rectangulum B F, C D: est autem F A D rectangulo ex hypothesi ęquale quadratum A G, & quadratum H G æquale rectangulo B F, C D, cùm B F, H G, C D lineæ proportionales sint per pennultimam; igitur quadratum A G, æquale est quadrato H G. & A G linea ęqualis lineæ H G: adeoque [a] & lateri recto. Quod erit primum.

a 9. huius.

Sit iam A G linea æqualis lateri recto, & anguli E A B, D A C ęquales, dico A F, A G, A D in continua esse analogia. Si enim non sint proportionales, inueniatur inter A F & A D media A I: erit igitur per primam partem huius linea A I, æqualis lateri recto, [b] adeoque & A G lineæ. quare A F, A G, A D in continua sunt analogia, nec quæuis alia media inter A F & A D, præter A G. Quod erat secundum.

b ibid.

Rursum sit A G æqualis lateri recto, & A F, A G, A D proportionales, dico angulos E A B, D A C esse inter se æquales. quoniam enim A F, A G, A D continuæ sunt proportionales, F A D rectangulū æquale est quadrato A G id est quadrato H G: sed &

sed & HG quadrato æquale [a] est rectangulum BF, CD: igitur & rectangulo FAD æquatur rectangulum BFCD: vnde vt AF ad BF, sic CD ad AD; æquales autem sunt anguli AFB, ADC lateribus proportionalibus contenti, igitur triangula AFB, ADC inter se similia sunt, & angulus BAF æqualis angulo ACD, id est angulo EAC: dempto ergo communi angulo BAC, manet angulus EAB æqualis angulo CAD. Quod erat demonstrandum.

[a] Ex 33. huius.

Corollarium.

Iisdem positis sequitur triangula BAF, CAD esse inter se similia. patet per primam partem præcedentis propositionis.

PROPOSITIO XXXVI.

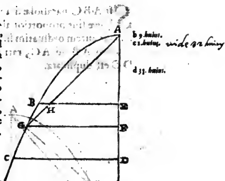
SIt ABC parabolæ diameter AD diuisa in E & F vt AE, AF, AD sint proportionales, & AF media æqualis lateri recto: positis autem ordinatim lineis EB, FG, DC, ex A ad G, ducatur recta AG occurrens EB lineæ in H.

Dico AD, DC, FG, EB, EH lineas continuè esse proportionales.

Demonstratio.

QVoniam AF æqualis est lateri recto, GF, FA lineæ æquales sunt: ratio igitur AF [b] ad AD, id est GF ad AD, duplicata est rationis GF ad CD [c]: proportionales igitur sunt AD, CD, GF: quia verò AD, AF, AE sunt continuæ, etiam [d] CD, GF, BF proportionales sunt; continuant igitur eandem rationem AD, CD, GF, BE, deinde eum ratio AF ad AE, id est GF ad HE, duplicata sit rationis GF ad BE, proportionales quoque sunt GF, BE, HE: continuæ igitur sunt in eadem ratione AD, CD, GF, BE, HE: quod erat demonstrandum.

[b] 9 huius.
[c] 1 huius. *vide in fine.*
[d] 33. huius.



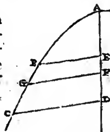
Corollarium.

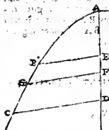
HInc sequitur AE, FB, FG, CD quoque in continua esse analogia: ratio enim AF ad AE, id est GF ad BE, duplicata est rationis GF ad BE, proportionales igitur sunt AE, BE, GF: sed vt BE ad GF, sic GF est ad CD, cum AE, AF, AD sint continuæ; proportionales igitur sunt AE, BE, GF, CD.

PROPOSITIO XXXVII.

ESto ABC parabolæ diameter AD diuisa in E & F, vt AE, AF, AD lineæ sint proportionales, & AD extrema æqualis lateri recto; ducantur autem ordinatim lineę EB, FG, DC.

Dico AE ad EB, duplicatam habere rationem eius, quam habet AF ad FG.





Demonstratio.

a 9 huius. b 17. Progressionum.

QVoniam AE, AF, AD lineæ ponuntur continuæ proportionales, eoque erunt EB, FG, DC: ponitur autem AD prima seriei AE, AF, AD æqualis lateri recto, adeoque a ipsi DC primæ seriei EB, FG, DC, igitur b AE linea ad lineam EB tertia ad tertiam duplicatam habet rationem eius quam habet AF ad FG, secunda ad secundam. Quod erat demonstrandum.

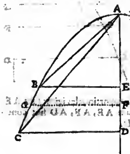
Corollarium.

HInc sequitur rectangulum EAF ad rectangulum EBFG rationem habere triplicatam eius quam habet AF linea ad lineam FG. est enim ratio rectanguli EAF ad rectangulum EBFG composita ex AE ad EB, & AF ad FG. sed ratio AE ad EB, duplicata est rationis AF ad FG, igitur rectangulum EAF ad rectangulum EBFG triplicatam habet rationem eius quam habet AF linea ad lineam FG.

PROPOSITIO XXXVIII.

SIt ABC parabolæ diameter AD diuisa in E & F, vt AE, AF, AD lineæ sint proportionales, & AF media æqualis lateri recto, ponantur autem ordinatim lineę EB, DC: iunganturque AB, AC.

Dico AB ad AC, rationem habere triplicatam eius, cuius EB ad DC est duplicata.



Demonstratio.

c Corell. 35. huius.

d Corell. 36. huius.

e 33. huius.

DVcatur ordinatim linea FG. Quoniam AE, AF, AD lineæ proportionales sunt, & AF media æqualis lateri recto, triangula AEB, ADC c similia sunt, adeoque vt AB ad AE, sic AC ad CD: & inuertendo permutando vt AE ad CD, sic AB ad AC; iam verò cùm AF æqualis facta sit lateri recto, adeoque & FG eidem æqualis AE, d EB, FG, DC erunt continuæ; ratio igitur AE ad CD, primæ ad quartam triplicata est rationis BE ad FG, secundæ ad tertiam, igitur & AB ad AC, triplicatam habet rationis EB ad FG, cuius EB ad DC, e habet duplicatam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

AXis parabolæ ABC diuisus sit in continuè proportionales; & AD quidem media existat inter AE, AF, AG, AH. ductisq́; ordinatim ad axem rectis EI, FK, DB, GI, HC, ponantur quoque DI, DK, DL, DC.

Dico rationem DI ad DC duplicatam eius esse quam habet KD ad DL.

Demon-

Demonstratio.

QVoniam eandem continuant rationem A E, A F, A D, A G, A H, proportionales quoque sunt [a] E I, F K, D B, G L, H C. quia verò ratio A E ad A H, duplicata est tam rationis E I ad C H, quàm rationis A D ad A H, id est [b] E D ad D H, cùm A E, A D, A H, proportionales sint, ratio E D ad D H, eadem est cum ratione E I ad C H: similia igitur sunt triangula I E D, C H D: quare I D ad D C, vt E D ad D H, id est A E ad A D, hoc est in duplicata rationis I E ad B D. similiter ostendentur triangula F K D, G L D similia, & K D esse ad L D, vt F D ad G D, id est vt A F ad A D, id est in duplicata rationis K F ad B D: sed ratio I E ad B D, duplicata est rationis K F ad B D, cùm I E, K F, B D proportionales sint, ratio igitur I D ad C D, duplicata est eius quam habet K D ad L D. Quod erat demonstrandum.

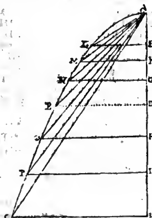
[a] 33. huius.

[b] 1. De progressionibus.

Corollarium.

SI iam A D fuerit media inter septem continuè proportionales quarum extremæ A E, A H, similiter ostendetur I D ad D C, nimirum duas extremas triplicatam habere rationem eius quam habent K D ad D L, duæ quoque extremæ: & sic de reliquis accrescit semper proportio.

PROPOSITIO XL.

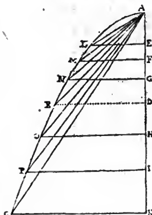


ESto A B C parabolæ axis A K diuisus vt A E, A F, A G, A D, A H, A I, A K sint continuæ proportionales, & A D media totius seriei æqualis lateri recto. ductisq; ordinatim lineis E L, F M, G N, D B, H O, I P, K C, iungantur A L, A M, A N, A B, A O, A P, A C.

Dico rationem A M ad A P duplicatam esse rationis A N ad A O & A L ad A C rationem triplicatam eius quam habet A N ad A O, atque ita deinceps in infinitum procedendo inuenietur augmentum vnius rationis.

 Demon-

Demonstratio.



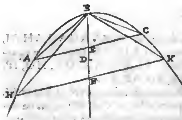
QVoniam A E, A F, A G, A D, &c. sunt continuæ proportionales & totius seriei media ponitur A D; erunt quoque A F, A D, A I continuæ proportionales, nimirum secunda, quarta, & sexta. vnde cùm A D media æqualis ponatur lateri recto, erit ratio AM ad A P, triplicata eius [a] cuius duplicatam habet MF ad P I: est autem ratio M F ad P I, duplicata rationis M F ad B D, cum M F, B D, P I sint proportionales; igitur ratio A M ad A P, triplicata est rationis M F ad B D, id est sextuplicata eius quam habet N G ad B D, quia M F, N G, B D sunt continuæ. eodem modo cum A G, A D, A H sint proportionales, ostenditur rationem A N ad A O, triplicatam esse eius cuius duplicatam habet N G ad O H, id est triplicatam eius quam habet N G ad B D. vnde cùm A M ad A P, ostensa sit rationem habere sextuplicatam ipsius N G ad B D, patet rationem A M ad A P, duplicatam esse rationis A N ad A O. eadem prorsus methodo ostenditur, rationem A L ad A C, triplicatam esse rationis A N ad A O. & sic de cęteris. Quod fuit demonstrandum.

a 38. huius.

PROPOSITIO XLI.

SIt. A B C parabolæ diameter B D, diuisa in E & F, vt B E, B D, B F sint proportionales, & B D media æqualis lateri recto, ponanturque per E & F ordinatim lineæ A C. H K:

Dico iunctas A B, H B ipsis C B, K B esse proportionales.



Demonstratio.

QVoniam B E, B D, B F continuæ sunt proportionales, & B D media æqualis lateri recto, ratio [b] A B ad H B triplicata est eius, cuius duplicatam habet A E ad H F: sed eadem de causa quoque ratio B C ad B K, triplicata est eius cuius duplicatam habet E C ad F K, id est A E, ad H F; igitur vt A B ad H B, sic C B ad K B: quod erat demonstrandum.

b Ibid.

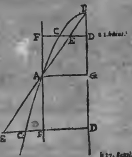
PRO.

PROPOSITIO XLII.

Secent A B C parabolam diametri duæ quæuis A F, B D, iunctisq; A, B diametrorum terminis, ponatur ad diametrum B D ordinatim linea C D, occurrens A B, A F lineis in E & F.

Dico F D, C D, E D in continua esse analogia.

Demonstratio.



Ponatur ex A ordinatim A G; vt B D ad B G, sic D E est ad A G, id est ad D F: sed B D ad B G, duplicatam habet [a] rationem eius quam habet D C ad A G, id est D F, ratio igitur D E ad D F, quoque duplicata est rationis D C ad D F: quare D E, D C, D F lineæ sunt in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

a 1. huius.

Corollarium.

Iisdem positis: sequitur rectangulum F C D æquale esse rectangulo F D, C E, cùm enim F D, C D, E D proportionales sint, vt F D ad C D, sic F C est ad C E: rectangulum igitur F D C E [b] æquale est rectangulo F C D. Quod erat propositum.

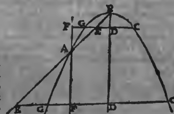
b 17. sexti.

PROPOSITIO XLIII.

Iisdem positis quæ suprà:

Dico C F G rectangulum æquari rectangulo D F E.

Demonstratio.



Primo cadat F punctum extra parabolam. Quoniam igitur recta G C in D bisecta est & ei in directum adiecta quædam G F; rectangulum G F C vnà cum quadrato G D, æquale est [c] quadrato F D: sed F D quadrato æquale est rectangulum E F D, vnà cum [d] rectágulo E D F, id est vnà cum quadrato G D per præcedentē propos. igitur & rectangulo G F C vnà cū quadrato G D, æquale est rectangulum E F D vnà cum quadrato G D: dempto igitur communi quadrato G D, manet G F C rectangulo, æquale rectangulum E F D.

c 6. Secundi.

d 4. Secundi.

Secundò cadat F punctum intra parabolam. Quoniam G C linea in D secta est bifariam & non bifariam in F, rectangulum G F C vnà cum [e] quadrato F D, æquale est quadrato G D: sed G D quadrato æquale quoque est rectangulum F D E, id est rectangulum E F D vnà cum quadrato F D; rectangulum igitur G F C vnà cum quadrato F D æquale est rectangulo E F D, vnà cum quadrato F D: quare dempto communi quadrato F D, manet G F C rectangulum æquale rectangulo E F D. Quod erat demonstrandum.

e 5. Secundi.

PROPOSITIO XLIV.

SInt iterum in parabola A B C diametri duæ quæuis A F, B D : & ad B D quidem ordinatim ponantur lineæ G C, K I occurrentes diametro F A in F & H.

Dico esse vt A H ad A F, sic I H K rectangulum ad rectangulũ C F G.

Demonstratio.

DVcta A B linea secet F C, H I rectas in E & L, erit igitur L H M rectangulum æquale a rectangulo K H I, & E F D rectangulum æquale rectangulo G F C. vnde K H I rectangulum est ad rectangulum G F C, vt L H M rectangulum ad rectangulum E F D : sed L H M rectangulum est ad rectangulum E F D, vt L H b linea ad lineam E F, id est vt A H ad A F, igitur & K H I rectangulum ad rectangulum G F C est vt A H linea ad lineam A F. Quod erat demonstrandum.

a 43. huius.

b 1. Sexti

Corollarium.

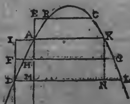
HInc sequitur, quoque esse vt A H ad A H; sic I H K rectangulum ad rectangulum I H K, est enim vt A H ad A H, sic H L ad H L, id est L H M rectangulum ad rectangulũ L H M. sed rectangulis L H M æqualia ostensa sunt rectangula I H K : igitur vt A H ad A H, sic I H K rectangulum est ad rectangulum I H K.

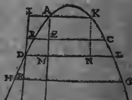
PROPOSITIO XLV.

PArabolam A B C secent in A & D, diametri duæ æquales A E, D F: & ex E & F quæuis ponantur parallelę E C, F G occurrentes parabolæ in B, C, H, G punctis.

Dico rectangula B E C, H F G esse inter se æqualia.

Demonstratio.





POnantur ex D & A lineæ D L, A K parallelæ F G; & A K quidem occurrat D F diametro in I, & D L demissæ ex K diametro in N: recta verò A E producta secet D L in M, vt D F ad D I, sic H F G c rectangulum est ad rectangulum A I K, & vt A E ad A M, sic B E C est ad rectangulum D M L: igitur cùm E A, D F, &

c Coroll. 44.

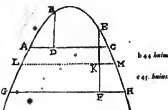
DF, & D I, M A lineæ æquales sint, rectangulum HFG ad IAK, rectangulum est vt BEC rectangulum ad rectangulum DML; & permutando HFG rectangulum ad rectangulum BEC, vt DML rectangulum est ad rectangulum IAK. sed DML rectangulum, id est MDN, ob DM, NL a æquales lineas, æquatur a 30. huius. rectangulo IAK; rectangulum igitur HFG, rectangulo BEC æquale est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Parabolam ABC secent duæ quæuis diametri BD, EF, quas in D & F secent quæcunque parallelæ AC, GH.

Dico esse vt BD ad EF, sic ADC rectangulum ad rectangulũ GFH.

Demonstratio.



Secetur EF linea vel producatur in K, vt EK sit æqualis BD, & per K ponatur LM parallela GH, erit igitur b vt EK ad EF, sic LKM rectangulum ad rectangulum GFH. quia verò EK æquatur ipsi BD, erit LKM c rectangulum æquale rectangulo ADC, igitur vt BD ad EF, sic ADC rectangulum ad rectangulum GFH. Quod erat demonstrandum.

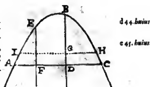
b 44 huius. c 45. huius.

PROPOSITIO XLVII.

Sint iterum in ABC parabola duæ quæuis diametri BD, EF, quas in F & D secet recta quæuis AC.

Dico ADC rectangulum esse ad rectangulum AFC, vt BD ad EF.

Demonstratio.



Fiat EF æqualis BG; & per G ponatur IH æquidistans AC, erit igitur vt d BG ad BD, sic IGH rectangulum ad rectangulum ADC: sed IGH rectangulum æquale est e rectangulo AFC, cum BG, EF lineæ sint æquales, igitur vt EF ad BD, sic AFC rectangulum ad rectangulum ADC. Quod erat demonstrandum.

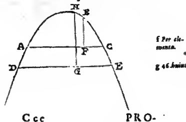
d 44. huius. e 45. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

Parabolam ABC subtendant duæ quęuis parallelę AC, DE, quibus proportionaliter in F & G, diuisis ponantur diametri BF, HG.

Dico BF ad HG duplicatam habere rationem eius quam habet AC ad DE.

Demonstratio.



Quoniam AC, DE lineæ in F, & G proportionaliter sunt diuisę, erit AFC, f rectangulum ad DGE rectangulum in duplicata ratione AF ad DG, id est AC ad DE, sed BF est ad HG g vt AFC rectangulum ad rectangulum DGE; igitur BF ad HG, duplicatam habet rationẽ eius quam habet AC ad DE. Quod erat demonstrandum.

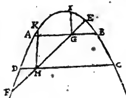
f Per elementa. g 46 huius.

PROPOSITIO XLIX.

Secent ABC parabolam duæ quævis parallelæ AB,CD, quas vtcunque in G & H, diuidat linea EF.

Dico esse vt AGB rectangulum ad rectangulum DHC sic FGE rectangulum ad rectangulum FHE.

Demonstratio.



a 46. huius. b 47. huius.

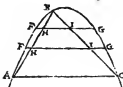
Erigantur ex H & G diametri HK, GI. erit igitur vt GI ad HK, [a] sic AGB rectangulum ad rectangulum DHC: sed vt GI ad HK, sic FGE rectangulum quoque ad [b] rectangulum FHE; igitur vt AGB rectangulum, ad rectangulum DHC. sic FGE rectangulum est ad rectangulum FHE. Quod erat demonstrandum.

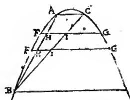
PROPOSITIO L.

Esto ABC parabolæ inscriptum triangulum ABC cuius duo latera AB,CB, duæ quæuis secent FG æquidistantes AC in H & I.

Dico esse vt FHG rectangulum ad rectangulum FHG sic FIG rectangulum ad rectangulum FIG.

Demonstratio.





c 49. huius.

Rectangulum FHG est ad [c] rectangulum FHG, vt AHB rectangulum est ad rectangulum AHB: & FIG rectangulum est ad rectangulum FIG, vt CIB rectangulum est ad rectangulum CIB: est autem vt AHB rectangulum ad rectangulum AHB, sic CIB reetangulum ad reetangulum CIB quia ex iisdem rationem habeant compositam, igitur vt FHG reetangulum ad reetangulum FHG, sic FIG reetangulum est ad reetangulum FIG. Quod erat demonstrandum.

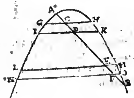
PRO-

PROPOSITIO LI.

SEcet AB parabolam recta quæuis AB in A & B, quâ diuisâ vtcunque in C & D, diuidatur in E & F, vt AC, AD lineis sint æquales BF, BE singulæ singulis; dein per CD, EF puncta parallelę ducantur GH, IK, LM, NO.

Dico esse vt GCH ad IDK, rectangulum sic OFN ad MEL rectangulum.

Demonstratio.



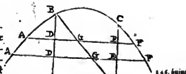
ESt enim per quadragesimam nonam huius rectangulum GCH ad IDK, vt ACB ad ADB. hoc est BFA ad BEA, quia AC, AD æquantur FB, EB, sed vt BFA ad BEA, sic est NFO ad LEM: igitur GCN ad IDK, rectangulum, eandem obtinet rationem quã NFO rectangulum ad LEM: quod fuit demonstrandum. nec mirum, cùm GCH rectangulum ipsi NFO, & rectangulo IDK æquetur LEM rectangulum.

PROPOSITIO LII.

SEcent ABC parabolam duæ quæuis diametri BD, CE, quas in D & E, diuidant vtcunque parallelæ duæ AF; dein ex B, linea ducatur quæuis BG secans AF lineas in GG.

Dico esse GDE rectangulum ad rectangulum GDE, vt ADF rectangulum est ad rectangulum ADF.

Demonstratio.

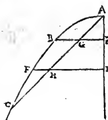


QVoniam DE lineæ per hypothesim æquidistant, & BD, CE sunt diametri, rectæ DE inter se æquales sunt ob ED parallelogrammum. quare GDE rectangulum ad rectangulum GDE est vt GD ad GD, id est BD ad BD. sed vt BD ad BD, sic ADF rectangulum est ad rectangulum ADF: igitur & GDE rectangulum, est ad rectangulum GDE, vt ADF rectangulum est ad rectangulum ADF. Quod erat demonstrandum. 146. huius.

PROPOSITIO LIII.

ESto ABC parabolæ diameter AD, quam in E & D, secent ordinatim lineę BE, FD, ducaturque ex A linea AC, secans BE, FD ordinatim positas vtcunque in G & H.

Dico BEG rectangulum ad rectangulum FDH triplicatam habere rationem eius, quam habet BE ad FD.



Demonstratio.

a Per elementa.

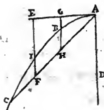
Rectangulum B E G ad rectangulum F D H a rationem habet compositam ex B E ad F D, & G E ad H D, id est A E ad A D: sed ratio A E ad A D duplicata est rationis B E ad F D: rectangulum igitur B E G ad rectangulum F D H triplicatam habet rationem eius quam habet B E ad F D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIV.

Parabolam A B C cuius diameter A D contingat in A linea A E; ductaque quauis A C quę parabolę iterum occurrat in C, sumantur in A C linea puncta quęcunque F, H. ex quibus erigantur diametri F E, H G, occurrentes A E, contingenti in E & G, parabolę verò in B, & I.

Dico B G H rectangulum ad rectangulum I E F rationem habere triplicatam eius quam habet G H ad E F.

Demonstratio.



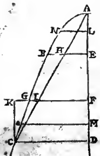
b Educitur ex prima huius.

Rectangulum B G H ad rectangulum I E F, rationem habet compositam ex B G ad I E, & ex G H ad E F, id est A G ad A E: sed ratio B G b ad I E duplicata est rationis A G ad A E, igitur rectangulum B G H ad rectangulum I E F rationem habet triplicatam eius quam habet G H ad E F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LV.

Esto A B C parabolæ diameter A D, quam in D secet ordinatim linea C D: diuisaq; A D in E & F, vt A E, D F sint æquales, ponantur ordinatim E B, F G.

Dico E B, F G quadrata simul sumpta, æquari quadrato C D.



Demonstratio.

c Per elementa.

d 42. huius.

e 1. secundi.

Ducta A C occurrat E B lineæ in H, & F G in I, erigaturque ex C diameter C K, secans F G in K. Quoniam A E per hypothesim æqualis est F D, id est C K, angulus A H E æqualis angulo A I F id est angulo K I C (ob H E, G F æquidistantes) & angulus A E H angulo æqualis C K I, erit A H E c triangulum æquale triangulo C K I; & H E lineæ æqualis K I. Rursum cùm tam C D, G F, d I F; quàm C D, B E, H E lineę proportionales sint, quadrata F G, B E mediarum, æqualia sunt rectangulis C D I F, C D H E; hoc est rectangulis I F K, I K F, quia H E, K I lineæ æquales sunt, sed F K quadratum æquale est e rectangulis I F K, I K F, igitur & quadrata F G, B E simul sumpta æqualia sunt quadrato F K, id est quadrato C D. Quod erat demonstrandum.

Corolla-

Corollarium.

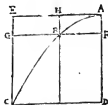
Hinc sequitur: si rursum AD diuidatur in L & M, vt AL, DM lineæ æquales sint & ordinatim ponantur LN, MO, quadrata LN, MO simul sumpta æquari quadratis EB, FG simul sumptis: patet ex demonstratis, quia tam EB, FG quadrata, quàm LN, MO simul sumpta æqualia sunt quadrato CD.

PROPOSITIO LVI.

Parabolam ABC cuius diameter AD & ordinatim ad illam posita CD, contingat in A linea AE, quam in E secet diameter CE: assumptoque in sectione puncto quouis B, ponatur per B ordinatim linea FG, occurrens AD lineæ in F, & EC in G: dein per B ducatur diameter HI secans ACD ordinatim positam in I.

Dico parallelogramma AB, AG, AI, AC in continua esse analogia.

Demonstratio.



Quoniam AE, FG lineæ æquidistant, parallelogrammum AB ad parallelogrammum AG, est vt FB linea, ad lineam FG, id est CD: est autem parallelogrammum AB ad parallelogrammum AI, vt AF linea ad lineam AD, hoc est in duplicata [b] ratione FB ad DC: igitur parallelogrammum AB, ad parallelogrammum AI, duplicatam habet rationem eius, quam habet AB parallelogrammum ad parallelogrammum AG: parallelogramma igitur AB, AG, AI in continua sunt analogia: Rursum parallelogrammum AI est ad parallelogrammum AC, vt DI linea ad lineam DC, hoc est vt AB parallelogrammum ad parallelogrammum AG. Parallelogramma igitur AB, AG, AI, AC sunt in continua proportione. Quod erat demonstrandum.

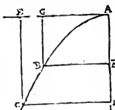
a 1. Sexti.
b 1. huius.

PROPOSITIO LVII.

Parabolam ABC, cuius diameter AD, contingat in A linea AE, ductisque ordinatim FB, DC, erigantur ex C & B, diametri EC, BG occurrentes contingenti in G & E.

Dico AGB parallelogrammum ad parallelogrammum AEC triplicatam habere rationem eius quam habet AG linea ad lineam AE.

Demonstratio.



Ratio parallelogrammi AGB ad AEC parallelogrammum [c] composita est, ex ratione AG ad AE, & GB ad EC; sed ratio GB ad EC, id est AF ad AD, duplicata est rationis AG ad AE; id est FB ad DC, parallelogrammum igitur AGB ad parallelogrammũ AEC triplicatam habet rationem eius quam habet AG linea ad lineam AE. Quod erat demonstrandum.

c Per elementa.

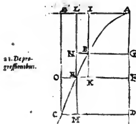
 PRO-

PROPOSITIO LVIII.

Parabolam A B C cuius diameter A D, & ordinatim ad [illegible]m posita C D, contingat in A linea A E, quam in E secet diameter C E, factisq; A D, A F, A G continuè proportionalibus, ducatur ordinatim lineæ F H, G B: & per B & H, diametri agantur I K, L H occurrentes F H, D C lineis in K & M: secet autem G B linea diametrum L H in N, & F H linea diametrum E C in O.

Dico H D parallelogrammum esse ad parallelogrammum F B, vt H E parallelogrammum est ad parallelogrammum B L.

Demonstratio.



a 1. De progressionibus.

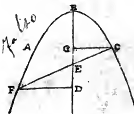
Ratio parallelogrammi H D ad parallelogrammum F B, composita est ex ratione F H ad G B, & F D ad F G: est autem vt F H ad G B, sic D C ad F H id est E A ad L A, id est E L ad L I (cùm A G, A F, A D, adeoque G B, F H, D C, id est E A, L A, I A sint continuę proportionales) & vt F D ad F G, sic [a] D A ad F A, id est F A ad G A: id est H L ad B I: ratio igitur parallelogrammi H D ad parallelogrammum F B, composita est ex ratione E L ad L I, & ex ratione L H ad I B; sed ex ijsdem quoque composita est ratio parallelogrammi H E, ad parallelogrammum B L: igitur vt H D parallelogrammum, ad parallelogrammum F B, sic H E parallelogrammum est ad parallelogrammum L B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

Esto A B C parabolæ diameter B D, quam in E secet vtcunque recta F C occurrens vtrimque parabolæ in C & F, ducantur autem ex C & F, ordinatim lineæ E G, F D.

Dico B G, B E, B D lineas esse proportionales.

Demonstratio.



Quoniam C G, F D ordinatim positæ sunt ad diametrum B D, ratio B G ad B D, duplicata est eius quam habet G C ad F D, id est G E ad E D; igitur B G, B E, B D lineæ sunt proportionales, positâ enim media B E inter B G, B D erit vt B G ad B E, ita G E ad E D, & ratio B G ad B D, duplicata rationis G E ad E D. igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

Hinc sequitur esse vt C E ad E F, sic B E ad B D. nam vt C E ad E F, sic G E est ad E D, id est B E ad B D.

PRO-

PROPOSITIO LX.

ESto ABC parabolæ diameter BF, in qua ſumpto quouis puncto H, ponantur continuæ proportionales BH, BG, BF: ductaque ordinatim HE, agatur per F linea ipſi HE æquidiſtans, occurrens GE lineæ in A & parabolæ in C: ducaturque EC occurrens diametro in D.

Dico DB, BG lineas eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

QVoniam BH, BG, BF ponuntur continuæ proportionales, & CF ordinatim ad diametrum GB applicata erit A punctū ad parabolam ABC per Corr. 25. huius ſunt autem per præcedentem proportionales quoque BH, BD, BF; media igitur DH æqualis eſt [a] mediæ DF.

[a] Per elementa.

PROPOSITIO LXI.

IIſdem poſitis ducatur ex C alia quæuis CI occurrens diametro BD in K; parabolæ verò in I; tum ex A per I ducta linea conueniat cum diametro in L, ponaturque ex I ordinatim linea IM.

Dico eſſe GB ad LB, vt EH ad IM.

Demonſtratio.

SI inter BM & BF, media fiat BL oſtendetur vt priùs LB æqualē eſſe ipſi BK, & iunctam LI occurrere parabolę & AC rectę in A puncto, vnde cùm tam BF, BD, BH lineæ, quàm BF, BK, BM habentes communem primam BF continuæ ſint proportionales, ratio BH ad BM, tertię ad [b] tertiam duplicata eſt rationis BD ad BK, id eſt BG [c] ad BL ſecundæ ad ſecundam: ſed & ratio BH ad BM, quoque duplicata eſt rationis EH ad IM: igitur vt EH ad IM, ſic GB ad LB. Quod erat demonſtrandum.

[b] 17. De progreſſ.
[c] 60. huius.

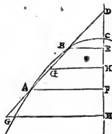
PROPOSITIO LXII.

SIt ABC parabolæ diameter CD, ponatur autem AB linea occurrens parabolæ in duobus punctis AB, diametro verò extra ſectionem, in D, ponanturque ordinatim BE, AF.

Dico CE, CD, CF lineas continuè eſſe proportionales.

Demon-

Demonstratio.



a Coroll. 25. huius.
b Ibid.

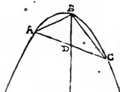
Si verò: ponantur continuę proportionales C E, C D, C H & ex H ordinatim ducatur H G, occurrens A B lineæ in G: erit igitur punctum G ad parabolam A B C: adeoque linea A B [a] parabolæ in tribus punctis occurrit. Quod fieri [b] non potest; vnde C E, C D, C F continuæ sunt proportionales.

PROPOSITIO LXIII.

Esto parabolæ A B C diameter quæcumque B D æqualis lateri recto, actâque per D ordinatim A C, quę parabolæ occurrat in A & C, iungantur A B, B C.

Dico angulum A B C esse rectum.

Demonstratio.



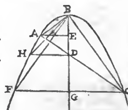
c 9. huius.

Quoniam B D diameter lateri recto æqualis est, & A C ordinatim posita lineæ D B, [c] D A, D C, æquales sunt. adeoque & puncta A B C, ad circulum cuius A C diameter est: angulus igitur A B C rectus est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIV.

Esto A B C parabolæ axis B D æqualis lateri recto, actâque per D quæuis A C, quæ parabolæ occurrat in A & C, iungantur A B, B C: Dico angulum A B C esse rectum.

Demonstratio.



d 59 huius.
e Coroll. 35. huius.

Ponantur ex A & C ordinatim lineæ A E, C G F. erunt igitur B E, [d] B D, B G lineæ proportionales; quia verò B D media æqualis lateri recto est, erunt A B E, [e] F B G triangula similia; & angulus B A E æqualis angulo F B G, id est C B G: sed angulus B A E vnà cum angulo A B E, recto est æqualis, quia angulus A E B ad axem rectus est: igitur & angulus C B D vnà cum angulo A B E, vni recto fuat æquales. rectus igitur angulus A B C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXV.

Iisdem positis:

Dico A B ad B C, triplicatam habere rationem eius, cuius A D ad D C duplicata est.

Demonstratio.

Quoniam in triangulis G B F, C B G anguli ad G recti sunt, lineæque F G, G C æquales ex hypothesi, triangula F B G, C B G inter se æqualia sunt, & F B, C B lineæ quoque æquales: vnde cùm ratio [f] A B ad F B, triplicata sit eius, cuius dupli-

f 38. huius.

eatam habet AE ad FG, erit & AB ad BC, ratio triplicata rationis AE ad FG, id est AE ad CG, id est AD ad DC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Iisdem positis ducatur ex D ordinarim linea DH, iungaturq; HB: Dico angulum ABF, lineâ HB diuisum esse bifariam.

Demonstratio.

Quoniam anguli AEB, HDB, recti sunt, reliqui duo anguli ABE, BAE reliquis HBD, DHB æquales sunt. Sed BAE angulo æquatur [a] angulus FBG, duo igitur anguli FBG, ABE æquales sunt duobus HBD, BHD: id est angulo HBD bis sumpto, ob HD, DB [b] lineas æquales: dempto igitur communi angulo FBG, manent anguli duo HBD, HBF æquales angulo ABE: à quibus rursum si communem demas angulum HBD; reliqui ABH, HBF æquales manent. Quod erat demonstrandum.

a Coroll. 35. huius.

b 9. huius.

PROPOSITIO LXVII.

Parabolam ABC, cuius diameter BD, contingat in B linea BE, ex quouis autem puncto A in perimetro assumpto ductâ ordinatim AD iunctisq; AB punctis sumatur in contingente punctum quodcumque F, ex quo linea demittatur FG, parallela diametro BD, occurrens parabolæ in C, AB iunctæ in H, & ordinatim positæ in G.

Dico FC, FH, FG lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

Recta ex A diameter AE occurrat contingenti in E, & per C ordinatim ponatur IK secans AB, AE lineas in L & I, & BD diametrum in K, vt KL ad KC, sic BL est ad BH, id est FC ad FH: & vt CK ad IK, id est FB ad EB, sic FH est ad EA, id est ad FG: sed LK, CK, IK, lineæ sunt continuæ [c] proportionales; igitur & FC, FH, FG lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

c 42. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

Iisdem datis sumatur in contingente quoduis punctum F ex quo ducatur FH parallela BD, occurrens lineæ AB in H.

Dico HC esse ad CF vt AH ad HB.

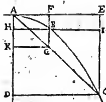
Demonstratio.

QVoniam GF, HF, CF proportionales sunt, HF est ad CF, vt GF ad HF, hoc est vt AE ad HF, hoc est vt AB ad HB: igitur diuidendo HC est ad CF, vt AH ad HB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIX.

PArabolam ABC cuius diameter AD, & ordinatim ad illam posita CD, contingat in A linea AE, quam in E secet diameter CE. iunctisq; punctis AC, ducatur diameter quæcumque FG, occurrens parabolæ in B. deinde actâ per B ordinatim lineâ HI, quæ EC rectæ occurrat in I, & AD diametro in H, ducatur ex G linea GK parallela DC.

Dico parallelogrammum EB æquari parallelogrammo KB.



Demonstratio.

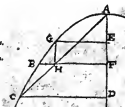
a 68. huius.
b Per elementa.

VT AG ad GC, sic AF ad FE, id est HB ad BI: sed vt [a] AG ad GC, sic FB ad BG: igitur vt HB ad BI, sic FB ad BG; sunt autem anguli ad B oppositi æquales. igitur parallelogrammum EB æquale [b] est parallelogrammo KB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXX.

SIt ABC, parabolæ diameter AD diuisa in E & F; vt AE, AF, AD sint proportionales, positisque ordinatim EG, FB, DC, iuncta AC occurrat FB in H.

Dico HG æquidistare diametro AD, & contra si HG æquidistet diametro AD, & per H ordinatim ponatur FB, dico AE, AF, AD esse proportionales.



Demonstratio.

c 33. huius.
d 41. huius.
e Per elementa.

CVm AE, AF, AD proportionales sint, rectæ quoque [c] CD, BF, GE in continua sunt analogia. sed & DC, FB, FH [d] quoque sunt proportionales; æquales igitur sunt HF, GE lineæ. quare HG æquidistat [e] diametro AD, quod fuit primum.

Sit iam HG parallela AD, & per H ordinatim applicetur BF: dico AE, AF, AD quoq; in continua esse analogia, cùm enim CD, BF, HF, lineæ [f] proportionales sint, & GE æquetur HF, erunt & CD, BF, GE continuæ proportionales. vnde AD, AF, AE [g] in continua quoque sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

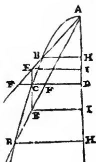
f 41. huius.
g Per conuersam 33. huius.

PROPOSITIO LXXI.

ESto ABC parabolę diameter AD, quam in D secet ordinatim linea DC, actâque per C diametro CE, ducatur ex A linea AF secans parabo-

parabolam in B, & E C diametrum in E, occurrens verò D C lineæ in F.

Dico A B, A E, A F lineas esse in continua analogia.



Demonstratio.

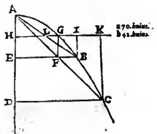
POnantur ex B & E ordinatim lineæ B H, E I. Ratio A H ad A D, duplicata est rationis H B ad D C; id est H B ad I E: sed vt H B ad I E, sic A H est ad A I: igitur ratio A H ad A D, duplicata est rationis A H ad A I: quare A H, A I, A D lineæ, id est A B, A E, A F sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXII.

ESto A B C parabolæ diameter A D: ductisque ex A lineis quibusuis A B, A C, quæ parabolæ occurrant in B & C, ponantur ordinatim lineæ C D, B E; & B E quidem A C lineæ occurrat in F; erectâq; F G parallelâ diametro A D, ponatur per G ordinatim H G, occurrens diametris I B, K C in I & K, rectæ autem A B in L:

Dico H L, H G, H I, H K lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.



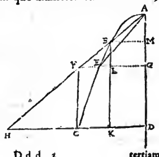
QVoniam H G, E B, D C, ordinatim positę sunt, & F G parallela diametro A D, rectæ H G, H I, H K [a] in continua sunt analogia. sed & H L, H G, H I [b] proportionales sunt. igitur H L, H G, H I, H K in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

a 70. huius.
b 42. huius.

PROPOSITIO LXXIII.

ESto A B C parabolæ diameter A D, & ordinatim ad illam posita C D. ducatur autem ex A linea A E, sectioni occurrens in E: actâque per E ordinatim F G, erigatur ex C diameter C F, occurrens F G in F; iunganturque A F, quæ C D lineæ occurrat in H, sectioni verò in B puncto ex quo diameter demittatur B K, secans F G lineam in L, & C D in K.

Dico H C ad C K duplicatam habere rationem eius quã habet F E ad E L.



Demonstratio.

POnatur ex B ordinatim linea B M. Quoniam F C diameter est & H C D ordinatim posita ad diametrum A D, rectæ A B, A F [c] A H proportionales sunt; igitur & A M, A G, A D, item B M, E G, [d] C D lineæ, id est K D, C D, H D, in continua sunt analogia. Quare cùm vtriusque seriei primæ B M, K D æquales sint, ratio H D ad C D, tertiæ ad

c 71. huius.
d 33. huius.

 tertiam

tertiam, a duplicata est rationis C D ad E G, id est F G, ad E G: est autem vt b H D ad C D, sic H C ad C K, & vt F G ad E H, sic F E ad E L, ratio igitur H C ad C K, duplicata est rationis F E ad E L. Quod erat demonstrandum.

a 17. De progressionibus.
b 1. De progressionibus.

PROPOSITIO LXXIV.

Sit ad A B C parabolæ diametrum A D, ordinatim posita D C: erectaq; ex C diametro C F, iungatur C A, ponaturque ordinatim quæuis F E occurrens parabolæ in B, & A C iunctæ in G. tum ex B demissâ diametro, quæ A C lineæ occurrat in H, ponatur per H ordinatim linea I L occurrens diametro F C in L, & sectioni in K:

Dico lineam G B ad B F, duplicatam habere rationem eius quam habet H K ad K L.

Demonstratio.

Quoniam tam F E, B E, c G E lineæ, quàm L I, K I, H I sunt proportionales habentes æquales primos terminos F E, L I, ratio G E, ad H I, tertię ad tertiam, id est ratio G E ad B E, id est d G B ad B F, duplicata est e rationis E B ad I K, secundæ ad secundam, id est rationis I H ad I K, id est H K f ad K L. Quod erat demonstrandum.

c 41. huius.
d 1. De progressionibus.
e 17. De progressionibus.
f 1 De progressionibus.

PROPOSITIO LXXV.

Eadem figurâ manente:

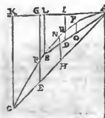
Dico rectangulum E G B ad rectangulum E F B, triplicatam habere rationem eius quam habet linea G B ad lineam B F.

Demonstratio.

Rectangulum E G B ad rectangulum E F B, rationem habet compositam ex ratione g E G ad E F, id est ex duplicata ratione E G ad E B, id est G B ad B F, (quia E G, h E B, E F sunt proportionales) & ex G B ad B F: igitur rectangulum E G B ad rectangulum E F B triplicatam habet rationem eius quam habet linea G B ad B F. Quod erat demonstrandum.

g Per elementa.
h 41. huius.

PROPOSITIO LXXVI.



Esto A B C parabola, assumptoque in peripheria puncto quouis A, ducantur rectæ A B, A C occurrentes iterum parabolæ: diuisis autem A B, A C lineis proportionaliter in D & E, erigantur diametri E G, D I, occurrentes parabolę in F & H, & actæ per A contingenti in G & I.

Dico G E, D I lineas in F & H, proportionaliter esse diuisas.

Demon-

Demonstratio.

ERigantur ex C & B, diametri CK, BL. Quoniam AC, AB proportionaliter in E & D ponuntur diuisæ, vt BA ad DA, id est BL ad DI; sic CA est ad EA, id est KC ad GE; sed vt BL ad DI, sic DI est ad a HI, & vt KC ad GE, sic GE est ad GF; igitur vt DI ad HI, sic GE ad GF. Quod fuit demonstrandum. a Per pen. ultimam demonstrata.

PROPOSITIO LXXVII.

IIsdem positis, diuidantur rursum proportionaliter lineę AB, AC in M & O, erigantur(q); diametri MN, OP.

Dico FE esse ad MN, vt DH est ad OP.

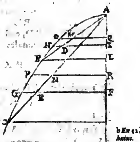
Demonstratio.

ESt enim vt CEA rectangulū, ad rectangulum CMA sic FE ad NM. & vt BDA rectangulum ad rectangulum BOA, sic DH ad PO. sed BDA ad BOA, rectangulum est vt CEA ad CMA, rectangulum, quia CA, BA proportionaliter ponuntur diuisæ; igitur vt FE ad NM, sic DH ad PO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVIII.

IIsdem positis agantur per D & E ordinatim ad diametrum ex A demissam lineæ HDI, FEG.

Dico HI, FG lineas in D & E proportionaliter esse diuisas.



Demonstratio.

POnantur ordinatim lineæ BL, CK. Quoniam igitur AB, AC lineæ in D & E proportionaliter sunt diuisæ, vt CK ad EG, sic BL est ad DI. sed CK ad EG, duplicatam b habet rationem FG ad EG, & BL ad DI, duplicatam habet rationem HI ad DI, igitur vt FG ad EG, sic HI ad DI, & diuidendo vt FE ad EG, sic HD ad DI. Quod fuit demonstrandum. b Ex 45. huius.

PROPOSITIO LXXIX.

IIsdem positis, diuidantur rursum AB, CA lineę proportionaliter in M & N, & rectæ ducantur MOQ, NPR æquidistātes ipsis HI, FG. Dico vt HD ad OM, sic FE esse ad PN.

Demonstratio.

CVm enim lineæ AB, AC proportionaliter in M, D, N, E punctis sint diuisæ, erit MQ ad DI, vt NR ad EG, & permutando MQ ad NR, vt DI ad EG; sed per præcedentem est vt MQ ad NR, sic OM ad PN; & vt DI ad EG, sic HD ad FE; igitur vt OM ad PN, sic HD ad FE, & permutando vt OM ad HD, sic PN ad FE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXX.

SIt ad A B C parabolæ diametrum A D ordinatim posita linea C B: factaq; A E æquali ipsi A D ponatur per E linea E F parallela rectę B C; dein ex C ducatur linea C F, occurrens parabolę in G puncto, per quod ex B agatur linea occurrens axi A D in H, & E F lineæ in I.

Dico F E, B D, E I lineas in continua esse analogia.



140. huius.

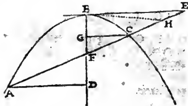
Demonstratio.

LInea CF occurrat diametro in K. Quoniam A E linea æqualis ponitur lineę A D, & H A, A K lineæ quoque inter se æquantur, erit E H reliqua æqualis reliquę K D. Rursum triangulum F K E ad triangulum D K C duplicatam habet rationem E K lineæ ad lineam K D, id est H D ad E H. est autem & triangulum B H D, ad triangulum E H I in duplicata ratione H D ad H E: igitur vt triangulum F K E, ad triangulum D K C, sic B H D triangulum, ad triangulum E H I adeoq; rationes ex ijsdem habent cōpositas, sed ratio trianguli F K E ad triangulum D K C, est composita ex ratione F E ad D C, id est B D; & ex E K ad K D, id est D H ad H E: & ratio trianguli B H D, ad triangulum E H I est composita ex H D ad H E, & ex B D ad E I, ablata igitur communi ratione H D ad H E, manet ratio F E ad B D, eadem cum ratione B D ad E I. quare F E, B D, E I lineæ sunt continuæ proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXI.

PArabolam A B C cuius diameter B D contingat in B linea B E; demissaq; ex E linea E A occurrat parabolæ in C & A, diametro vero B D in F.

Dico E C, E F, E A lineas in continua esse analogia, & contra si E C, E F, E A fuerint proportionales, dico E B, sectionem contingere.



Demonstratio.

POnantur ex A & C ordinatim lineæ A D, C G ad B D, diametrum: quoniam igitur B E, G C lineæ ęquidistant, erit vt G B ad F B, sic C E ad F E; & vt F B ad D B, sic F E ad A E. sed B G, B F, B D lineę sunt proportionales; igitur & E C, E F, E A lineę in continua sunt analogia. Quod erat primum.

Sint iam E C, E F, E A proportionales, iunganturque E B, dico E B lineam, sectionem in B contingere. Sin verò, agatur per B tangens, quæ A E lineæ occurrat in H. erunt igitur H C, H F, H A continuæ proportionales, & C F ad F A, vt H C ad H F: sed & C F est ad F A, vt E C ad E F (cùm E C, E F, E A sint proportionales) igitur vt H C ad H F, sic E C ad E F: & diuidendo vt H C ad C F, sic E C ad C F, quod absurdum, cùm H C ex hypothesi, maior sit vel minor rectâ E C. quare H B non est tangens, nec quæuis alia præter E B. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII.

Eadem manente figura propositum sit à dato puncto extra sectionem contingentem ducere.

Constructio & demonstratio.

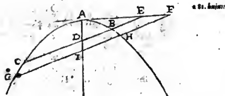
Sit datum punctum E, ex quo ducatur quæuis secans parabolam in C & A: erit EC prima trium continuarum & AC excessus reliquarum: inueniantur igitur inter CE, EA media EF per F, diameter agatur BD iunganturque EB. patet per præcedentem, lineam EB sectionem contingere in B. à dato igitur extra parabolam puncto tangentem duximus, &c. Quod erat quæsitum.

PROPOSITIO LXXXIII.

Parabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE, in qua sumptis duobus punctis E,F, ducantur ex E & F, duæ parallelæ EC, FG occurrentes parabolę in B,C,H,G, & AD diametro in D & I.

Dico BEC rectangulum ad rectangulum HFG duplicatam habere rationem lineę eius quam habet EA linea ad lineam FA.

Demonstratio.



a 81. huius

Quoniam tam EB, ED, EC lineæ, quam FH, FI, FG sunt proportionales, erit BEC rectangulum æquale quadrato ED, & HFG rectangulum æquale quadrato FI. igitur vt quadratum ED ad quadratum FI, sic BEC rectangulum est ad rectāgulum HFG. sed ED quadratum est ad quadratum FI, vt AE quadratum est ad quadratum AF; igitur & BEC rectangulum est ad rectangulum HFG vt AE quadratum ad quadratum AF. hoc est duplicatam habent rationem, EA ad FA. Quod erat demonstrandum.

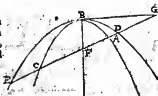
PROPOSITIO LXXXIV.

Parabolas duas ABC, DBE habentes communem diametrum BF contingat in eodem puncto, linea BG, & ex G quęuis ducatur linea, occurrens parabolis in D, A, C, E; diametro verò BF in F.

Dico DGE rectangulum æquari rectangulo AGC.

Demonstratio.

Est enim per octuagef. primam huius tam DGE rectangulum, quàm rectangulum AGC æquale quadrato FG: igitur & AGC, DGE rectangula inter se ęqualia sunt, Quod fuit demonstrandum.

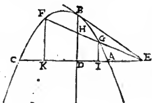


PRO-

PROPOSITIO LXXXV.

Parabolam ABC cuius diametet BD contingat in B linea EB: ex puncto E duæ quæuis ducantur lineæ EF, EC, secantes parabolam in F, G, A, C punctis & BD diametrum in D & H, demissæque ex F & G diametri FK, GI, occurrant AC lineæ in K & I.

Dico GI ad FK, duplicatam habere rationem eius quam habet GH ad HF.



a Ex 82. huius.
b 1. De progressionibus.

Demonstratio.

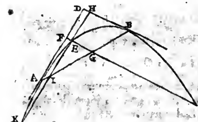
Vt GI ad FK, sic EG est ad EF; sed EG ad EF, duplicatam habet rationē [a]EG ad EH, id est [b] GH ad HF; igitur & GI ad FK, duplicatam habet rationem eius quam habet GH linea ad lineam HF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXVI.

Parabolam ABC contingant in A & B lineæ AD, BD conuenientes in D, assumptoque puncto E in sectionis peripheria, agatur per E linea FC, parallela rectæ BD occurrens AD lineæ in F.

Dico vt quadratum BD ad quadratum AD, sic EFC rectangulum esse ad quadratum AF.

Est hæc ab Apollonio lib.3. prop.16. eodem planè modo proposita: nos autem hanc supponendo vlterius inferimus, si A, B puncta contactuum coniungantur, rectas FE, FG, FC in continua esse analogia. vti & HE, HI, HK lineas.



Demonstratio.

Est enim ex supposito vt AD quadratū ad quadratū DB, sic AF quadratum ad rectangulum EFC: & permutando vt AD quadratum ad quadratum AF, sic DB quadratum ad rectangulum EFC. sed est quoque vt AD quadratum ad quadratum AF, sic DB quadratū ad quadratum FG; igitur vt DB quadratum ad rectangulum EFC, sic idem quadratum DB ad quadratum FG. vnde FG quadratum æquale est rectangulo EFC; & FE, FG, FC lineæ sunt in continuata proportione.

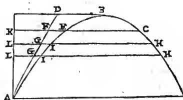
PROPOSITIO LXXXVII.

Iisdem positis ducatur & altera GH parallela FC, secans parabolam in I & H.

Dico rectangulum EFC ad rectangulum IGH, esse vt quadratum FA ad GA, quadratum.

Demon-

Demonstratio.



CVm enim tam rectangulum EFC ad quadratum FA, quã rectangulum IGH ad quadratum GA habeant rationem quadrati DB ad quadratum DA, constat ita esse EFC rectangulum ad IGH vt quadratum FA ad GA. Quod demonstrandum fuit.

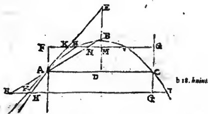
Corollarium.

SI ex A ducatur diameter AK, occurrens ordinatim applicatis in K & L, rectangulum CFE ad HGI, duplicatam habebit rationem eius quam CKE habet ad rectangulum HLI. ratio enim rectanguli CKE ad HLI, est ratio lineæ KA [a] ad LA, hoc est FA ad GA. sed ratio rectanguli CFE ad HGI, est ratio quadrati FA ad GA: igitur ratio rectanguli CFE ad HGI, duplicata est eius quam habet CKE ad HLI, rectangulum. a 44. huius.

PROPOSITIO LXXXVIII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, & ordinatim ad illam posita ADC, contingat in A linea AE, conueniens cum diametro in E, erectisque ex A & C diametris AF, CG ducatur quæcunque HI, parallela AC, occurrens AE contingenti in K, lineæ AF in F, diametro BD in M, iunctæ AB in N, & rectæ CG in G.

Dico KFG rectangulum æquari rectangulo HFI.



Demonstratio.

QVoniam tam FN [b] in K, quàm FG in M bifariam diuisa est, erit FK ad FN, vt FM ad FG. vnde rectangulo FKFG, æquatur FNFM rectangulum: sed rectangulo NFM ostensum [c] est æquari rectangulum HFI. igitur etiam rectangulo HFI æquale est KFG rectangulum. Quod erat demonstrandum. b 18. huius. c 43. huius.

PROPOSITIO LXXXIX.

IIsdem positis:

Dico HK, HF, FG lineas esse continuè proportionales.

Demonstratio.

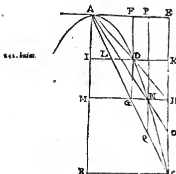
QVoniam rectangulum KFG [d] æquale est rectangulo HFI, vt FH, ad FK, sic FG est ad FI: & conuertendo vt FH ad [e] HK, sic FG est ad GI, id est ad FH; quadratum igitur FH æquale est rectangulo HKFG; & HK, HF, FG proportionales sunt. Quod fuit demonstrandum. d 88. huius. e Per elementa.

PROPOSITIO XC.

SIt A B diameter parabolæ A D C & ordinatim posita B C & contingens A E. diametro insuper A B æquidistet E C ductaque A H quacunque occurrente parabolæ in D ponatur A C, & F D G æquidistans A B, occurrensq; A C in G.

Dico F G æqualem esse rectæ E H.

141. huius.



Demonstratio.

POnantur per D & G puncta rectæ I K, M R parallelæ B E; erunt itaque tres in continua analogia I L, I D, I K & M G, M N, N R. Igitur quadratum I D ad M N, quadratum eam habet rationem quam I L ad M G. hoc est I A ad M A, hoc est D A ad H A; hoc est D F ad H E, est autem F G æqualis M A. igitur H E eidem F G, æqualis est. Quod fuit demonstrandum.

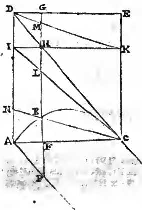
PROPOSITIO XCI.

IIsdem positis, per N ducatur A N O. Dico I D ad M N eandem habere rationem quam habet E H ad E O.

Demonstratio.

POnatur P N Q æquidistans A B, erit hæc P Q, æqualis E O per præcedentem. Similiter per eandem erit F G æqualis E H: est autem F G ad P Q, vt A F ad A P, hoc est I D ad M N, igitur E H ad E O, eandem obtinet rationem quam I D ad M N. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCII.



PArabolam A B C sustendat linea A C, actaque per C contingente, quæ diametro per A positæ occurrat in D, perficiatur parallelogrammum A D E C: dein sumpto in sectione puncto quouis B, agatur per B diameter F G secans A C lineam in F, tangentem C D in H puncto, per quod ducta I K parallela A C, ponatur I C quæ F G lineæ occurrat in L.

Dico G F, H F, L F lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

VT G F ad H F, sic D A est ad I A: sed vt D A ad I A, sic H F est ad L F; igitur vt G F ad H F sic H F ad L F, proportionales igitur sunt G F, H F, L F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCIII.

Iisdem positis ducatur linea D K occurrens G F in M.
Dico G M, G H, G F lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

Quoniam E C æquidistat A D (ob D C, parallelogrammum) & I K D, I C D triangula eandem habent basim I D, lineæ M H, [a] H L æquales sunt. sunt autem continuę proportionales G F, H F, L F; igitur & G M, [b] G H, G F lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

a Educitur ex elementis.
b 11. De progressionibus.

PROPOSITIO XCIV.

Iisdem positis:
Dico esse vt C F ad F A, sic H B ad B F.

Demonstratio.

Ducatur ex C per B linea C N occurrens A D lineæ in N: & ex A recta A O parallela D C, secans E C productam in O, & F B lineam in P. Quoniam D C est contingens & A O eidem parallela, rectæ H B, H F, H P [c] proportionales sunt. Sunt autem etiam [d] continuę L F, H F, G F, & G F linea æqualis lineæ H P (ob A E, A C parallelogramma super eadem basi A D, & inter easdem parallelas constituta.) igitur & H B, æqualis est rectæ L F: vnde dempta communi L B, manet H L rectæ B F, & N A ipsi I D æqualis; adeoque & N C parallela D K. Quare vt D N est ad N A, id est C K ad D I, sic H B est ad B F. sed vt C K ad D I, sic C H est ad H D, id est C F ad F A: igitur vt C F ad F A, sic H B est ad B F. Quod erat demonstrandum.

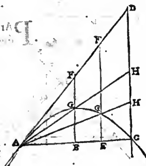
c 67. huius.
d 92. huius.

Est hęc Archimedis aliter demonstrata.

PROPOSITIO XCIV.

Parabolam A B C subtendat linea A C, actaq; per A contingente A D quę diametro C D ductę per C, occurrat in D, ponantur quotuis diametri F E, secantes parabolam in G, & per G ex A, ductæ lineæ A H, occurrant diametro C D in H.

Dico A C, C D lineas proportionaliter in E & H esse diuisas.



Demonstratio.

Demonstratio manifesta est per pręcedentem. nam semper est vt A E ad E C, sic F G ad G E id est D H ad H C.

PROPOSITIO XCVI.

PArabolam A B C contingat in A linea A D, in qua sumptis quibusuis punctis D & E, demittantur diametri D B, E C : & ex A per B recta ducatur A F occurrens E C diametro in F.

Dico esse E C ad C F, vt A F ad F B.

Demonstratio.

a 94. huius.

DVcatur recta A C occurrens D B lineæ in G erit igitur A G ad G C, a vt D B ad B G, id est E F ad F C. sed est vt A G ad G C, sic A B ad B F; igitur vt A B ad B F, sic E F ad F C: & componendo vt A F ad F B, sic E C ad C F. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCVII.

PArabolam A B C subtendat recta A C, erectaque ex C diametro C E, ponatur quæcunque A G occurrens C E lineæ in G, parabolæ in B puncto, per quod diameter ponatur B D.

Dico iunctam D G æquidistare contingenti per A ductæ.

Demonstratio.

b Ibid.
c Educitur ex elementis.

DVcta enim per A contingens occurrat B D, C E diametris in F & E, erit igitur b F B ad B D, vt A D ad D C, id est A B ad B G: quare c A E, D G lineæ sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCVIII.

PArabolam A B C subtendat linea A C, actisque per A & C, contingentibus quæ conueniant in D, ducatur diameter quæcunque F E, secans A D lineam in E, D C in G, & parabolam in H.

Dico G H, H F, H E, lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

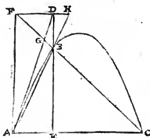
d 94. huius.
e Ex eadem.

ESt enim vt A F ad F C, sic d E H ad H F, sed etiam vt A F ad F C, e sic F H ad H G, igitur vt E H ad H F, sic H F est ad H G : proportionales igitur sunt G H, H F, H E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCIX.

PArabolam ABC cuius subtensa AC, contingat in A linea AD, in qua sumpto quouis puncto D demittatur diameter DE occurrens parabolæ in B. per B autem ex C recta ponatur CF, occurrens erectæ ex A diametro in F.

Dico FA, DE lineas esse inter se æquales.



Demonstratio.

VT AE ad EC, [a] sic DB est ad BE, & componendo vt AC ad CE, sic DE ad BE, sed vt AC ad EC, sic FA est ad BE, igitur vt DE ad BE, sic FA ad BE: igitur FA, DE lineæ sunt [b] inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

a 94. huius.

b Per elementa.

PROPOSITIO C.

IIsdem positis:

Dico esse BG ad GF, vt FB ad FC.

Demonstratio.

QVoniam FA, DE lineę per præcedentem æquales sunt, DE est ad BE, vt FA ad BE, id est vt AC ad EC; & inuertendo AE ad AC, id est FB ad FC, vt DB ad DE, id est ad FA. sed vt BD ad FA, sic BG ad GF, igitur BG ad GF, vt FB est ad FC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CI.

IIsdem positis ducatur AB occurrens FD iunctę in H.

Dico DH, DF, EC lineas in continua esse analogia.

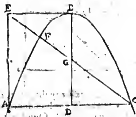
Demonstratio.

ESt enim DH ad AE, id est ad FD, vt DB ad BE, sed vt DB ad BE, sic FD est ad EC, igitur DH est ad FD vt FD ad EC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, contingat in B linea BE, demissaque diametro EA ducatur ad BD, ordinatim ADC, ponaturque EC occurrens parabolæ in F & BD diametro in G.

Dico EF lineam æquari lineæ FG.



Demonstratio.

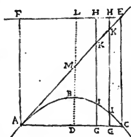
QVoniam EB linea sectionem contingit, erit EF ad EG, vt EG ad EC: & diuidendo EF ad FG, vt EG ad GC, sed EG est æqualis GC, quia AD, DC lineæ æquales sunt, igitur & EF, FG rectæ inter se æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CIII.

PArabolam A B C cuius diameter B D, & ordinatim ad illam posita A C; contingat in A linea A E, erectaque ex C diametro C E quæ contingenti A E occurrat in E, perficiatur parallelogrammum A C E, ducaturq; diameter quæuis H G occurrens parabolæ in I, & A E rectæ in K.

Dico H G I rectangulum æquari rectangulo H K G.

Demonstratio.



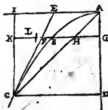
PRoducta diameter B D, secet E F, A E lineas in L & M. Quoniam A C linea æquidistat E F, eidemque est æqualis, erit A D, dimidia rectæ A C, æqualis L E, dimidiæ ipsius E F; quare & L M æqualis est M D, adeoque L D in M bifariam diuisa: vnde cum & L D in B, diuisa sit non bifariam, rectangulum L M D, id est quadratum M D æquale est rectangulo L B D, vna cum quadrato M B, id est [a] quadrato B D, id est æquale erit rectangulo L D B. Rursum cùm vt B D ad I G, sic L D B rectangulum sit ad rectangulum H G I, item A D C [b] rectangulum ad rectangulum A G C, id est rectangulum [c] A M E ad rectangulum A K E, igitur vt L D B rectangulũ ad rectangulũ H G I, sic A M E rectangulum est ad rectangulum A K E; est autẽ vt A M E rectangulum ad rectangulũ A K E, sic L M D rectangulum ad rectangulum H K G (quia ex ijsdem rationem habent compositam) igitur vt L D B rectangulum ad rectangulum H G I, sic L M D rectangulum est ad rectangulum H K G. & permutando vt L D B rectangulum est ad rectangulum L M D, sic H G I rectangulum ad rectangulum H K G. sed L D B, L M D rectangula ostensa sunt æqualia, igitur & rectangulum H G I æquale est rectangulo H K G. Quod erat demonstrandum.

a Ex 17. huius.
b 47 huius.
c Ex elementis.

PROPOSITIO CIV.

PArabolam A B C cuius diameter A D & ordinatim ad illam posita C D contingant in A & C lineæ A E, C E conuenientes in E. ductâque A C, ponatur ordinatim B G quę E G, A C lineis occurrat in F, & H. Dico H B quadrati dimidio æquale esse rectangulum F B, H G.

Demonstratio.



ERigatur ex C diameter C I, occurrens B G lineę in K, fiatque H B æqualis K L. Quoniam igitur K G, B G, [d] H G proportionales sunt, & B H differentię ponitur ęqualis L K, [e] erit G H, H B, B L quoq; proportionales sunt, adeoque B H quadrato æquale rectangulum L B, H G. Rursum [f] cùm A I in E ac propterea H K in F diuisa sit bifariam, & H B lineæ æqualis ponatur K L, erit & L B reliqua in F diuisa bifariam; quare F B, H G rectangulum dimidium est rectanguli L B, H G, adeoque & æquale dimidio quadrati H B. Quod erat demonstrandum.

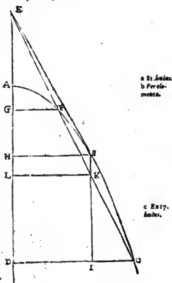
d 42. huius.
e 9. De progressionibus.
f 18. huius.

PRO-

PROPOSITIO CV.

Parabolam ABC cuius diameter AD contingat in B linea BE, conueniens cum diametro in E, demissaque ex E linea EC, quę parabolam secet in F & C, ducantur ordinatim lineæ FG, BH, CD.

Dico FG, BH, CD lineas in continua esse analogia.



Demonstratio.

Demittatur ex B diameter BI secans EC lineam in K: ponaturque KL parallela HB. Quoniam BE linea sectionem contingit, erunt EF, EK, ᵃ EC lineę, adeoque & FG, ᵇ KL, CD continuæ proportionales: sed HB linea æqualis est KL, igitur FG, BH, CD lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

a 81. huius.
b Per elementa.

Corollarium.

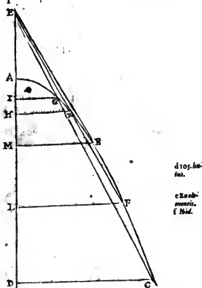
Eadem manente figura sumatur in AD diametro quodcunque punctum E, extra parabolam, ex quo in parabolam secans demittatur EFC, ductisque ordinatim FG, CD, fiat AE lineæ æqualis AH, & ex H, ordinatim ponatur HB: dico FG, BH, CD lineas esse proportionales, iuncta enim BE ᶜ erit contingens. vnde per precedentem constat veritas assertionis.

c Ex 17. huius.

PROPOSITIO CVI.

Esto ABC diameter AD, in qua assumpto extra sectionem puncto quouis E, demittantur ex E duæ quęuis EC, EF secantes parabolam in G, K, C, F: ponanturque ordinatim GI, KH, FL, CD.

Dico esse vt GI ad KH, sic FL ad CD.



Demonstratio.

Demittatur ex E cōtingens EB, & ex B ordinatim ducatur linea BM erunt igitur tam GI, BM, CD lineæ, ᵈ quàm HK, BM, FL proportionales. quare cùm BM linea sit vtriusque seriei communis & media proportionalis inter easdem lineas, GICD ᵉ rectangulum æquale est rectangulo HKFL. igitur vt ᶠ GI ad KH, sic FL ad CD. Quod erat demonstrandum.

d 105. huius.
e Ex elementis.
f Ibid.

PRO-

PROPOSITIO CVII.

ESto A B C parabolę diameter A D, in qua assumpto extra sectionem puncto quouis E, demittatur ex E secans E F C, positisque ordinatim F G, C D, fiat A E lineæ æqualis A H, & ex H ordinatim ponatur H B occurrens A C, F C, lineis in I & K.

Dico E C lineam, extrema & media ratione proportionali in F & K esse diuisam id est C E esse ad E F vt C K ad K F.

Demonstratio.

IVngantur F I: Quoniam A H linea æqualis ponitur A E, rectæ F G, B H, [a] C D proportionales sunt, & F G, I H [b] lineæ æquales, adeoque & F I parallela A E. quare vt E C ad E F, sic A C ad A I, id est A D ad A H, id est A H ad A G, (cùm A D, A H, A G proportionales sint.) id est D H ad [c] H G. id est C K ad K F. Quod erat demonstrandum.

a Coroll. 105. huius.
b Ex 70. huius.
c 1. De progressionibus.

PROPOSITIO CVIII.

PArabolam A B C cuius diameter A D, contingat in B linea B E, conueniens cum diametro in E, ex quo recta ducatur E C, occurrens parabolę in F & C, positaq; ordinatim B D, ducatur A C occurrens B D lineæ in G, & recta F D secans A C in H.

Dico rectam A C diuisam esse in H, & G, extrema & media ratione proportionali: id est A C, C G: & A H, H G esse proportionales.

Demonstratio.

IVngantur F G: Quoniam ostensum est in præcedenti propositione F G lineam æquidistare A E, vt A C ad C G, sic A E est ad F G: sed A E est æqualis [d] A D, igitur vt A C ad C G, sic A D est ad F G, id est A H ad H G. Quod erat demonstrandum.

d 17. huius.

PROPOSITIO CIX.

SIt ad A B C parabolæ diametrũ B D, ordinatim posita A C: iunctisque A B, C B ducatur quæuis diameter E F.

Dico esse vt A D ad D H, sic H E ad E G.

Demonstratio.

DIameter E F, primò A B lineæ occurrat in E extra sectionem. ponatur per B contingens I B: vt A D ad A H, sic D B id est I H

ad

ad HE; quia verò, I G, I F (id est I E) & I H proportionales sunt, vt H I ad I E [a] siue I F, prima ad secundam, sic H I cum I F vel I E, id est H E, prima cum secunda, ad I E vnà cum I G id est E G, secundam cum tertia, igitur vt A D ad D H, sic H E ad E G. Quod erat demonstrandum.

[a] 42. huius.

Occurrat iam diameter H G rectæ A B in E intra parabolā, erit igitur vt A H ad A D, sic H E ad B D, id est ad H I, & vt A D ad H D, sic H I ad I E, sed vt H I ad I E prima ad secundam (quia H I, I E, I G [b] proportionales sunt) sic H E [c] est ad E G, igitur vt A D ad D H, sic H E est ad E G.

[b] Ibid.
[c] 1. De progressionibus.

Est hæc Archimedis prop. 4. de quadratura Parabolæ aliter demonstrata.

Corollarium.

Hinc sequitur lineam H I ad I G, rationem habere duplicatam eius quam habet H F ad F G: cùm enim sint continuæ proportionales [d] H I, F I, G I, erit ratio H I ad I G, duplicata rationis H I ad F I, id est [e] H F ad F G.

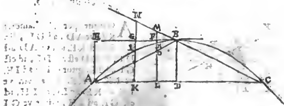
[d] Ex 98. huius.
[e] 1. De progressionibus.

PROPOSITIO CX.

Parabolam A B C cuius diameter B D, contingat in B linea B E, qua diuisa in F & G, vt B F, B G, B E sint proportionales, demittantur diametri F H, G I, E A ductaq; ex A ad B D ordinatim linea A C, quæ F H, G I rectas secet in K & L, agatur per B ex C, linea C M, occurrens F H, G I diametris in M & N.

Dico rationem L M ad M H duplicatam esse rationis K N ad N I.

Demonstratio.



Quoniam B F, B G, B E lineæ continuæ proportionales sunt, diametri quoque F H, G I, E A in continua sunt [f] analogia. Quare ratio A E ad F H, id est L F ad F H, duplicata est rationis A E ad G I, id est K G ad G I; sed L F ad F H, duplicatam habet rationem ; L O ad O H, (cùm L F, F O, F H [g] proportionales sint) id est per præcedentem L M ad M H, similiter & K G ad G I, duplicatam habet eius quam habet K N ad N I, igitur & ratio L M ad M H ; duplicata est rationis K N ad N I. Quod erat demonstrandum.

[f] Ex 33. huius.
[g] 42. huius.

PROPOSITIO CXI.

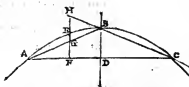
Iisdem positis ducatur linea A B secans F L lineam in O.

Dico M H L F rectangulum esse æquale rectangulo M L F O.

Demonstratio.

Quoniam ratio L F ad F H tam duplicata est rationis L M ad M H, quàm F L ad F O, erit vt L M ad M H, sic F L ad F O: quare rectangulum M H L F æquale est rectangulo M L F O. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXII.



SIt ad A B C parabolæ diametrum B D ordinatim posita linea A C, iunctísque punctis A B, C B, ducatur diameter quæcunque E F occurrens A B, C B lineis in G & H.

Dico esse vt H F ad F G, sic H E ad E G.

Demonstratio.

a 109. huius. b Ibid.

VT A D ad D F, id est D C ad D F, sic F H, a est ad H E. sed etiam vt A D ad D F, sic b F G est ad G E, igitur vt F H ad H E, sic F G est ad G E, & permutando vt H F ad F G, sic H E ad E G. Quod erat demonstrandum.

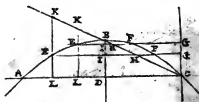
PROPOSITIO CXIII.

SIt ad A B C parabolæ diametrum B D ordinatim posita A C, iunctísque punctis B C ducantur ordinatim lineæ E F occurrentes C G, B D diametris in G & I, & C B rectæ in H.

Dico rectangulum G I E H æquari rectangulo G E I F.

Demonstratio.

c 109. huius.



AGantur per E diametri K L, vt A D c ad D L, sic L K est ad K E, sed vt A D ad D L, sic C D est ad D L, id est G I ad I E, igitur G I est ad I E, vt L K ad K E. est autem vt L K ad K E, sic L C ad E H, id est G E ad E H, igitur vt G I ad I E, sic G E ad E H. vnde G I, E H rectangulum æquale est rectangulo G E, I E id est G E, I F. Quod erat demonstrandum.

PA.

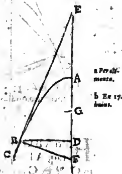
PARABOLÆ
PARS TERTIA

Sectionis focum & mutuas parabolarum intersectiones Geometrice designat.

PROPOSITIO CXIV.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat in B quæuis B E, occurrens axi in E: positaque ordinatim B D, ponatur B F normalis ad B E, occurrens axi in F.

Dico D F lineam æquari dimidio lateris recti quod axi inseruit.



Demonstratio.

SVmatur A G æqualis lateri recto: quoniam B D ordinatim ponitur ad axem, quadratum B D æquale est rectangulo D A G: quia verò angulus E B F rectus est, erit & quadrato B D æquale a rectangulum E D F, igitur E D F, D A G rectangula sunt inter se æqualia, & vt E D ad A D, sic A G est ad D F: est autem E D dupla b ipsius A D, cùm E B, sit contingens; igitur & A G dupla est rectæ D F: adeoque D F æqualis dimidio lateris recti. Quod erat demonstrandum.

a Per elementa.

b Ex 17 huius.

PROPOSITIO CXV.

EAdem manente figura: sit A G latus rectum & illius dimidio æquetur D F: ponatur autem ordinatim D B, & B E contingens, iunganturque B F.

Dico angulum E B F rectum esse.

Demonstratio.

CVm E B sit contingens, & B D ordinatim posita, erit c E D dupla rectę A D: & quia A G dupla ponitur D F, erit D A G rectangulũ d æquale rectangulo E D F: sed D A G rectangulo ęquale est quadratum B D, igitur & quadratum D B æquale est rectangulo E D F, vnde cùm D B normalis ponatur ipsi E F, patet e angulũ E B F esse rectum. Quod erat demonstrandum.

c Ibid.

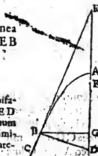
d 16. Sexti.

e Ex elementis.

PROPOSITIO CXVI.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat linea B E, conueniens cum axe in E: positaq; B D ad E B rectam normaliter, diuidatur E D bifariam in F.

Dico F A quartam partem esse lateris recti.



Demonstratio.

POnatur B G ordinatim ad axem; cùm igitur E D in F bifariam sit diuisa, & E G in A (ob E B contingentem) vt E D ad E F, sic E G est ad E A, vnde & residuum A F ad residuum G D, vt totum E D est ad dimidium sui E F: A F igitur dimidium est G D: hoc est quarta pars lateris recti: cùm G D lateris recti dimidium sit. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXVII.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat recta quæuis B E, & angulo B E A æqualis fiat angulus E B F.

Dico F A lineam æqualem esse quartæ parti lateris recti; & si F A sit quarta pars lateris recti, dico lineas F B, F E, & consequenter angulos B E F, E B F esse inter se æquales.

Demonstratio.

POnatur ordinatim linea B G: & B D normalis ad contingentem E B. Quoniam anguli E B F, B E F ex hypothesi æquales sunt, erunt & F B, F E lineæ quoque æquales, vnde cùm & angulus E B D rectus sit, si centro F, interuallo F E circulus describatur, transibit [a] is per B & D. Quare & E F, F D lineæ æquales, adeoque F A æqualis [b] quartæ parti lateris recti: Quod erat primum.

Rursum cùm angulus E B D ponatur rectus, & B G ordinatim applicata ad axem A D, erit D G [c] æqualis dimidio lateris recti, adeoque dupla A F: quare E A ad E G, vt A F ad G D, & componendo vt E F ad E D, sic A F ad G D: quare E D dupla est ipsius B F, & circulus centro F interuallo F E descriptus, transibit per B & D: eruntq; lineæ F B, F E & anguli F B E, F E B inter se æquales: Quod erat demonstrandum.

[a] Per elementa.

[b] 116. huius.

[c] 114. huius.

PROPOSITIO CXVIII.

ESto A B C parabolæ axis A D æqualis quartæ parti lateris recti: factaq; A E æquali A D, ducatur ex D linea D C occurrens parabolæ in C, & ex C erigatur diameter C F, occurrens E F (quæ normalis sit ad axem A D) in F.

Dico D C, F C lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.

AGatur per C contingens C G, conueniens cum axe in G; ad quem ordinatim ponatur C H. Quoniam C G est contingens, rectæ A G, A H [d] æquales sunt; additis igitur æqualibus A D, A E totæ G D, E H æquales sunt; sed D C recta est [e] æqualis G D, igitur & D C æquatur lineæ H E, id est C F. Quod erat demonstrandum.

[d] 17. huius.

[e] 117. huius.

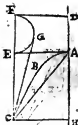
PROPOSITIO CXIX.

PArabolam A B C cuius axis A D productus extra sectionem, sit æqualis lateri recto, contingat in A linea A E, demissaq; ex A secante A C, erigatur ex C diameter C F, occurrens A E contingenti in E, & D F quæ parallela sit A E in F, factoque super E F vt diametro, semicirculo F G E, ducatur ex C, linea C G quæ semicirculum contingat in G.

Dico A C, C G lineas esse inter se æquales.

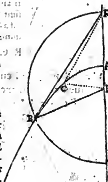
Demon-

Demonstratio.



POnatur ex C ordinatim CH. quadratum AC æquale est quadratis AH, HC: sed HC quadratum æquale est rectangulo HAD (quia AD per hypothesim est æqualis lateri recto) quadratum igitur AC æquale est quadrato AH vnà cum rectangulo HAD; id est rectangulo AHD, id est rectangulo ECF; est autem & ECF rectangulo æquale quadratum CG, quadrata igitur AC, CG adeoque & lineæ inter se æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXX.



ESto ABC parabolæ axis AD: & AE linea æqualis quartæ parti lateris recti: centro E, interuallo quouis EF circulus describatur occurrens axi in F & D, parabolæ verò in B: iunganturque FB.

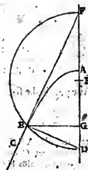
Dico FB rectam contingere parabolam in puncto B.

Demonstratio.

SI enim non contingat, ponatur ex F contingens FC: cadet illa inter B & A, vel vltra B. Cadat primò inter B & A, iunganturque BE, CE. Quoniam FC linea est contingens, & AE quarta pars lateris recti, linea CE æqualis est rectæ a FE, hoc est EB. Quod absurdum. igitur FC contingens non cadet inter B & A. similiter ostenditur FC non cadere vltra B. Quare FB sola parabolam contingit. Quod erat demonstrandum.

a 117. huius.

PROPOSITIO CXXI.



ESto ABC parabolæ axis AD, & AE linea quarta pars lateris recti: centro E interuallo quouis EF circulus describatur, occurrens axi in F & D, parabolæ autem in B: & ex B recta ducatur BG ordinatim ad axem.

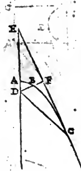
Dico DG lineam, dimidium esse lateris recti.

Demonstratio.

IVngantur puncta FB, BD. erit igitur angulus FBD in semicirculo rectus: est autem per præcedentem FB contingens, DG igitur dimidium b est lateris recti. Quod erat demonstrandum.

b 114. huius.

PROPOSITIO CXXII.



PArabolam A B C cuius axis A D contingat in C linea quæuis C E, conueniens cum axe in E. diuisaque bifariam C E in F, ducatur F D normalis ad E C contingentem occurrens axi in D.

Dico A D lineam, quartã esse partem lateris recti.

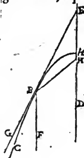
Demonstratio.

IVngantur puncta C D. Quoniam F D normalis est ad tangentem E C, anguli E F D, C F D æquales sunt; sunt autem & rectę E F, F C ex hypothesi æquales, & F D communis, triangula igitur E D F, C D F, & E D, C D latera æqualia sunt: quare & anguli C E D, E C D æquantur; & A D [a] linea est æqualis quartę parti lateris recti. Quod erat demonstrandum.

a 117. huius.

PROPOSITIO CXXIII.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat in B recta quæuis B E conueniens cum axe in E, demissaque ex B linea B F parallela axi, fiat angulo F B G, æqualis angulus E B H.



Dico A H lineam æqualem esse quartæ parti lateris recti: & si A H fuerit quarta pars lateris recti, & B F, parallela axi, dico angulos E B H, F B G esse æquales.

Demonstratio.

QVoniam F B æquidistat E D, angulus A E B æqualis, est angulo F B G hoc est angulo H B E: vnde A H linea [b] æqualis est quartæ parti lateris recti. Quod erat primum.

Rursum cùm A H linea sit quarta pars lateris recti, angulus H B E æqualis est angulo [c] A E B, hoc est F B G, cum F B, E D æquidistent. vocetur autem punctum H focus parabolæ.

b ibid.

c ibid.

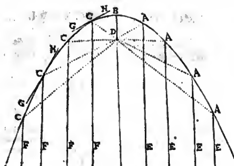
PROPOSITIO CXXIV.

DAtæ parabolæ focum exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt datæ parabolæ A B C, axis B D, cui quotuis ponantur æquidistantes, A E, C B agatur autem per C contingens G H; ductaque ex C recta C D, fiat angulo F C G, æqualis angulus H C D: constat per præcedentem propositionem punctum D, esse focum parabolæ, adeoque B D quartam esse partem lateris recti, & quoniam C F linea est quæcunque parallela axi, si in reliquis quoque angulo incidentiæ æqualis fiat angulus reflexionis, radij reflexi omnes conuenient in D puncto quod quartam lateris recti partem designat. datæ igitur parabolæ focum exhibuimus.

Porro focum indigitamus punctum D, *quod in illo fiat combustio, & radij reflexi precisè* *in*



in illo coeuntes, intensissimum producant calorem. quia verò punctum D *(quod quartam lateris recti partem determinat à vertice initio sumpto) latitudinem nullam admittit; fit vt forma parabolica, omnium sit aptissima radijs solis recipiendis & reflectendis; multoq́ vehementiores, quàm reliquæ figuræ, causet effectus.*

Quod autem in propositione radios C F, A E *omnes parallelos axi assumamus, id eadem de causa fecimus qua idem Optici, Gnomonici, & Statici in põderibus deorsum tendentibus, assumere coguntur, & hactenus vt fundamentum ac principium ab omnibus (si Neothericos paucos excipias) habitum est, non quod à parte rei solares radij paralleli sint, sed quod ob immensum nos inter & solem spatium, radij in speculum incidant ac si verè paralleli essent, sic vt nulla ad inuicem inflexio perceptibilis sit: & si è plano speculi duas lineas versus solem eductas, quantumuis minimo angulo ad inuicem inclines, conuenient illæ multo ante, quàm ad solarem discum peruenire possint: & si vicissim ex solis centro angulo physico, quantumuis minimo, duos educas radios, non cadent illi in superficiem speculi, sed immenso vtrimque interuallo à speculo decident. ratio vtriusque est, immensa solis à terra distantia: radij igitur solares in speculum incidentes vt verè paralleli assumuntur. quo posito demonstrari facile posset, focum in circulo & omni sectione coni (præterquam in parabola) latitudinem admittere, adeoq́ figuram parabolicam ad comburendum omnium esse præstantissimam: sed de his alio tempore & loco, si Deus vitam dederit.*

PROPOSITIO CXXV.

PArabolam A B C cuius axis A D contingat in B recta quæuis B E conueniens cum axe in E: ductâque ex B linea B D normali ad contingentem, quæ axi occurrat in D: si A D linea fuerit maior dimidio lateris recti.

Dico rectam B D minorem esse A D.



Demonstratio.

DVcatur ex A per B, linea A B F; & ex D recta D G normalis ad A F. quoniam angulus E B D rectus ponitur, angulus A B D recto minor est, adeoque F B D angulus obtusus; quare D G cadet inter A & B. fiat ergo B G æqualis G H, iunganturque H D: tum A H lineâ diuisâ bifariam in I, ponatur D I. cùm igitur H G, G D lineæ æquales sint rectis B G, G D, & anguli illis contenti recti; linea D H æqualis est B D, & angulus G H D recto minor. Rursum cùm A I, I D lineæ æquen-

tur

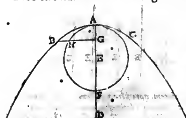
tur lineis HI, ID triangula AID, HID æqualia sunt, quare AD, subtendens angulum obtusum AID, maior est recta HD hoc est BD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXVI.

Esto ABC parabolæ axis AD: sumptâq; AE quæ non sit maior dimidio lateris recti, centro E interuallo AE circulus describatur AHF.

Dico circulum AHF contingere intus parabolam in A.

Demonstratio.



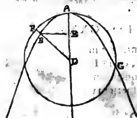
Flat AD linea æqualis lateri recto, & ordinatim ducatur quæuis GB occurrens circulo in H. Quoniam AE supponitur non maior dimidio lateris recti, cadet F punctum supra, vel in ipsum D, adeoque AGF rectangulum minus est rectangulo GAD; igitur & HG quadratum, minus est quadrato BG. punctum igitur H cadet intra parabolam, eodem modo demonstrantur reliqua omnia circuli puncta, præter A cadere intra parabolam: circulus igitur AHF, parabolam ABC interius in A contingit. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXVII.

Esto ABC parabolæ axis AD maior dimidio lateris recti: centroque D, interuallo AD circulus describatur AFG.

Dico circulum illum interfecare parabolam.

Demonstratio.



Flat AE linea æqualis dimidio lateris recti & per E recta ponatur ordinatim EB: ducaturque ex D per B, linea DBF occurrēs circulo in F & parabolę in B. Quoniam AD maior est dimidio lateris recti, a recta DB minor est AD hoc est DF. punctum igitur F cadet extra parabolam. quare circulus AFG parabolam secat. Quod erat demonstrandum.

a 125. huius.

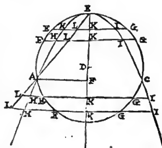
PROPOSITIO CXXVIII.

Esto ABC parabolæ axis BD maior dimidio lateris recti, centroq; D interuallo DB circulus describatur AEB occurrens parabolæ in A; ductaque ex A ordinatim linea AF, ducantur quotuis EG parallelæ AF, occurrentes circulo in E & G, parabolæ in H & I, axi in K.

Dico EHG rectangulum esse ad rectangulum EHG, vt FKB rectangulum, est ad rectangulum FKB.

Demon-

Demonstratio.



IUncta A B occurrat E G lineis in L. Quoniam E G linea in circulo A E B, ad angulos rectos in K secat diametrum B D, recta E G in K, diuisa est bifariam. sed & H I in parabola A B C, quoque in K diuisa est bifariam; rectæ igitur E H, I G inter se æquales sunt. Rursum vt A L B rectangulum ad [a] rectangulum A I. B, sic E L G rectangulum ad rectangulū E I. G, item H L I rectangulum ad [b] rectangulum H L I: sed E L G rectangulum æquale est rectangulis H L I, E H G, igitur & E H G rectangulum est ad rectangulum E H G, vt A L B rectangulum ad rectangulum A L B; id est F K B rectangulum, ad rectangulum F K B. Quod erat demonstrandum.

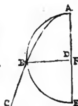
a 49. huius.

b Per elementa.

PROPOSITIO CXXIX.

ESto A B C parabolæ axis A D maior dimidio lateris recti: centroque D interuallo A D, circulus describatur A B E: occurrat is parabolæ in B & axi in E. ducaturque ex B, linea B F ordinatim ad axem.

Dico lineam F E æqualem esse lateri recto.

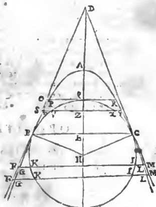


Demonstratio.

QVoniam B F ordinatim ducta est ad axem, quadratum F B æquale est rectangulo super F A & latere recto: sed & F B quadratum quoque æquale est rectangulo A F E: rectangulum igitur A F E æquale est ei quod fit super A F & latere recto. quare F E linea lateri recto est æqualis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXX.

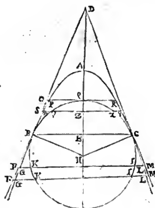
PArabolam A B C cuius axis A E contingat in B linea B D, occurrens axi in D, ponatur autem ex B linea B H normalis ad contingentem, occurrens axi in H: centroque & interuallo H B circulus describatur B Q C: ponaturque ad axem normales quotcunque I K, occurrentes parabolæ in G L, contingenti B D in F F: & circulo intra parabolam intercepto in I & K.



Dico G K I rectangulum esse ad rectangulum G K I, vt quadratum F B ad quadratum F B.

Demonstratio.

POnatur B C æquidistans F I, occurrens parabolę in C; iunctaque



a Ex 17. huius.

b Ex elementis.

c Ibid.

d 87. huius.

DC occurrat FL rectis in M. Quoniam BC ordinatim ponitur ad axem DE: recta BC in E bifecta est, & BE, EC lineæ æquales sunt. vnde DC a parabolam in C contingit. quia verò B punctum in perimetro circuli est, punctum quoque C b in circuli est perimetro; & quia DBH angulus rectus est, angulus quoque DCH rectus est c & DC linea circulum contingit. igitur vt FB quadratum ad quadratum FB, sic FKM rectangulum ad rectangulum FKM: sed cū FB, CM lineæ parabolam quoque contingant, vt FB quadratum ad quadratum d FB sic GFL rectāgulum est ad rectangulum GFL, residuum igitur rectangulum GKI ad GKI rectangulum, est vt quadratum FB ad quadratum FB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXI.

EAdem manente figura si AH linea maior sit dimidio lateris recti. Dico circulum BQC parabolam intus in duobus punctis contingere.

Demonstratio.

e 115. huius.

f 87 huius.

g 6. secundi.

h Ibid.

POnatur per Q linea OPR æquidistans BC, & altera quæuis STVXY eidem parallela. quia AH maior est dimidio lateris recti, e AH linea maior est BH: & circulus BQC cadit infra A. deinde vt OB quadratum ad quadratum SB, sic f POR rectangulum ad rectangulum TSX: sed est quoq; vt quadratum OB ad quadratum SB, sic quadratum OQ ad rectangulum VSX, igitur POR rectangulum ad rectangulum TSY, vt quadratum OQ ad rectangulum VSX, & permutando conuertendo vt quadratum OQ ad rectangulum POR, sic VSX rectangulum ad rectangulum TSY: sed OQ g quadratum maius est rectangulo POR, igitur & VSX rectangulum maius est rectangulo TSY. vlterius, rectangulum TSY vnà cum h quadrato TZ æquale est quadrato SZ, est autem & quadrato SZ æquale rectangulum VSZ vnà cum quadrato VZ, quadratum igitur VZ vnà cum rectangulo VSX æquale est quadrato TZ, vnà cum rectangulo TSY: ostensum autem est VSX rectangulum maius esse rectangulo TSY, quadratum igitur VZ minus est quadrato TZ: quia punctum V cadit intra parabolam: similiter ostendentur reliqua omnia puncta perimetri circularis BQC cadere intra parabolam, præter B, & C: circulus igitur BQC parabolam intus in duobus contingit punctis.

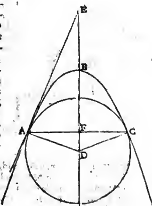
PROPOSITIO CXXXII.

ADato in axe puncto circulum describere qui parabolam intus in duobus punctis contingat.

Constru-

Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabolæ axis BD, & in eo punctum datum D, oportet centro D circulum describere, qui parabolam interius contingat in duobus punctis: oportet autem BD lineam maiorem esse dimidio lateris recti. fiat DF æqualis dimidio lateris recti: & per F recta agatur FAC, ordinatim ad axem: iunganturque puncta D, A: tum centro D interuallo DA circulus describatur. dico illum contingere interius parabolam in duobus punctis. agatur enim per A contingens AE conueniens cum axe in E. Quoniam linea AE parabolam contingit in A, & FD æqualis est dimidio lateris recti, angulus [a] EAD rectus est; est autem ex hypothesi BD maior dimidio lateris recti; ergo per præcedentem circulus centro D, interuallo DA descriptus parabolam continget interius in duobus punctis: à dato igitur in axe puncto D circulum descripsimus, &c. Quod erat faciendum.



a 113. huius.

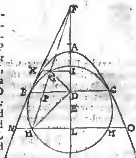
PROPOSITIO CXXXIII.

PArabolam ABC cuius axis AD contingat interius in duobus punctis B & C circulus HBG, actaq; per B contingente parabolam in B, quæ axi occurrat in F, ducatur ex F, linea FH, secans circulum in G & H, dein per G & H, normales ducantur KGI, NHL occurrentes parabolæ in K & N, axi verò in I & L.

Dico esse vt HL ad GI, sic NL ad KI.

Demonstratio.

QVoniam circulus BGC parabolam intus contingit in B & C, & FB linea per B ducta parabolam in B contingit, eadem BF circulum quoque contingit in B: igitur vt HF ad FG, sic [b] HP est ad PG: & vt LF ad FI, sic LD ad DI; sed vt LF ad FI, sic LH ad IG; igitur LD est ad DI, vt LH ad IG. quia verò LF in D & I, extrema & media ratione proportionali diuisa est, & FD [c] bissecta in A, proportionales sunt [d] AI, AD, AL: vnde LA ad AI, duplicatã habet rationem LA ad DA, id est [e] LD ad DI: sed ratio quoque LA ad AI, duplicata est rationis [f] LN ad KI, igitur NL est ad KI, vt LD ad DI, id est LH ad GI. Quod erat demonstrandum.



b 30. De circulis.

c Ex 17. huius.

d 4. De linearum potentiis.

e 1. De progressionibus.

f 1. Huius.

PROPOSITIO CXXXIV.

IIsdem positis:

Dico rectas KI, GD; item NL, HD esse inter se æquales.

Demonstratio.

Ostensum est rectas AL, AD, AI in continua esse analogia, vnde quoque proportionales erũt IK, BD, LN: sed etiam sunt cõtinuę GD, BD, HD; igitur GD, KI lineæ, & NL, DH sunt inter se æquales. nam rectangulũ GDH, rectangulo KINL est æquale, & ostensum insuper est GD ad DH, eandem habere rationem quam ID ad DL, hoc est KI ad NL.

PROPOSITIO CXXXV.

Iisdem positis:

Dico quadratum DL æquari rectangulo NHO.

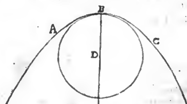
Demonstratio.

Quadratum HD est æquale quadratis HL, LD: est autem quadrato æquale quadratum NL, igitur NL quadratum est æquale quadratis HL, LD. sed etiam quadratum NL æquale est quadrato HL & rectangulo NHO, dempto ergo communi quadrato HL, erit NHO rectangulum æquale quadrato DL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXVI.

In datæ parabolæ axe punctum assignare quo centro circulus describatur maximus illorum, qui parabolam intus in vno tantùm contingunt puncto.

Constructio & demonstratio.



Esto ABC parabolæ axis BD, oportet in illo punctum assignare D, quo centro circulus describatur maximus eorum qui parabolam in vno tantum puncto contingunt. fiat DB linea æqualis dimidio lateris recti: centroque D, interuallo BD circulus describatur, dico illum satisfacere proportioni. quoniam DB æqualis ponitur dimidio lateris recti, circulus radio DB descriptus, intus, a parabolam in B contingit, quod verò contingentium circulorum maximus sit, ex illo patet quod circuli omnes qui centrum habent vltra D, parabolam b intersecent; quorum verò centrum inter D & B, cadit, semidiametrum semper minorem habeant semidiametro DB, ac proinde illi circuli minores sunt: circulus igitur radio DB descriptus, contingentium circulorum maximus est, exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

a 115. huius.
b 117. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

Ex dato in axe parabolæ puncto, lineam ad peripheriam ducere, breuissimam illarum quæ ex eodem puncto duci possunt.

Constructio & demonstratio.

Esto ABC parabolæ axis BD, & in eo punctum datum D: oportet ex D puncto lineam ducere breuissimam illarum, quę ex eodem puncto ad parabolæ perimetrum educi possunt.

Primò

Primò recta B D non sit maior dimidio lateris recti, dico B D lineam esse quæsitam: describatur enim centro D interuallo D B circulus, continget is per præcedentem parabolam interius in puncto solo B: igitur reliquæ omnes lineæ ex D ad peripheriam ductæ maiores sunt linea B D.

Secundò B D maior sit dimidio lateris recti: centro D circulus describatur contingens A B C, parabolam, in duobus punctis A, C, ducaturque recta D C: erit illa minima (vt patet) illarum quæ ex D duci poterunt ad peripheriam parabolæ: ex dato igitur puncto D, lineam duximus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CXXXVIII.

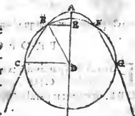
SIt A B C parabolæ axis A D maior latere recto, ductaque ex D ordinatim linea D B, centro D, interuallo D B circulus describatur B H C. Dico illum intersecare parabolam in quatuor punctis.

Demonstratio.

SVmatur E D æqualis dimidio lateris recti; positâque ordinatim E F, agatur per F contingens F G, conueniens cum axe in G. Quoniam F G est contingens, & E D æqualis dimidio lateris recti, angulus b D F G rectus est. quia verò A D linea maior est dimidio lateris recti, F D minima est earum quæ ex D ad peripheriam duci possunt: adeoque & minor B D ordinatim posita: circulus igitur centro D interuallo D B, descriptus cadet vltra F, & secundùm aliquam sui partem extra parabolam. Rursum cùm D B, minor c sit recta A D, (cū D A maior sit latere recto,) cadet circulus B H C infra punctum A: & secundùm aliquam sui partem intra parabolam: Quare & in alio puncto quàm A parabolam intersecabit. Similiter ostenditur circulū B H C, versus partem A C occurrere parabolæ in alio puncto quàm in C; circulus igitur centro D, interuallo D B descriptus, parabolam secat in quatuor punctis; Quod erat demonstrandum.

b 135. huius.
c 137. huius.
d 10. huius.

PROPOSITIO CXXXIX.



SIt A B C parabolæ axis A D maior latere recto; positâq; ad illum ordinatim D C, centro D interuallo D C circulus describatur C B F; occurret ille parabolæ in quatuor punctis C, B, F, G, & ex B puncto intersectionis ducatur B E ordinatim ad axem.

Dico E D lineam æqualē esse lateri recto.

Demonstratio.

a Ex conuersa 14. huius.

IVngantur BD. Quoniam BD est æqualis DC, & EB, CD, ordinatim ponuntur ad axem, ED linea æqualis lateri recto est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXL.

SI parabolam ABC cuius axis BD, secuerint quotcunque semicirculi AEC, FGH quorum singuli occurrunt parabolæ in quatuor punctis; demissæ autem ex E & G, intersectionum punctis rectæ fuerint EI, GK normales ad lineas AC, FH quæ ordinatim positæ sunt ad axem.

Dico EI, GK lineas esse æquales.

Demonstratio.

DVcatur enim ordinatim EM, GN: erit per præcedentem tam MD quàm NL æqualis lateri recto; atque igitur & æquales inter se. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXLI.

ESto ABC parabolæ axis AD maior dimidio lateris recti: centroque D interuallo DA, circulus describatur ABC, occurrens axi in E: oportet exhibere puncta intersectionum B & C.

Constructio & demonstratio.

SVmatur EF linea æqualis lateri recto, & per F recta agatur FBC ordinatim ad axem; dico circulum ABC occurrere parabolæ in B & C. cùm FC ordinatim posita sit ad axem; quadratum illius æquatur AFE rectangulo, quia FE lateri recto assumitur æqualis; sed rectangulo AFE in circulo ABE, æquale quoque est quadratum FB: igitur B punctum pertinet & ad parabolam ABC, & ad circulum ABE, idem discursus aptetur puncto C. præstitimus ergo quod imperatum fuit.

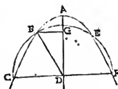
PROPOSITIO CXLII.

ESto ABC parabolæ axis AD maior latere recto: actaque per D ordinatim linea CDF, centro D interuallo CD, circulus describatur CBE, occurret is parabolæ in quatuor punctis: oportet illa exhibere.

Constru-

Constructio & demonstratio.

SVmatur D G æqualis lateri recto, ponaturque ordinatim G B: dico B punctum vnum esse intersectionis. iungatur B D. Quoniam B G, C D ordinatim ponuntur ad axem, & G D æqualis lateri recto est, linea C D, æqualis est B D: circulus igitur centro D, interuallo D C descriptus, transibit per B. eodem modo ostenditur, eundem circulum transire per E: quod verò per C & F, transeat, manifestum est: exhibuimus igitur puncta quatuor intersectionis. Quod erat faciendum. a 10. huius.

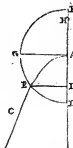


PROPOSITIO CXLIII.

ESto A B C parabolæ apex A, centroque A, interuallo quouis A E circulus describatur E G B: oportet exhibere B punctum intersectionis cum parabola.

Constructio & demonstratio.

POsito axe A D sumatur A H æqualis lateri recto, positaque per A contingente A G quæ circulo occurrat in G, quadrato A G fiat æquale rectangulum H I A; & per I ordinatim ducatur I B: dico punctum B, esse id quod quæritur. iungatur A B. Quoniam I B ordinatim applicata est ad axem, & A H linea æqualis lateri recto, quadrato A B, b æquale est rectangulum H I A, sed H I A rectangulum quoque æquale est quadrato A G per constructionem; igitur A G, A B quadrata æqualia sunt. igitur circulus centro A interuallo A G descriptus, transit per B. exhibuimus igitur punctum intersectionis B. Quod erat postulatum. b 34. huius.

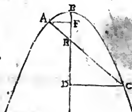


PROPOSITIO CXLIV.

ESto A B C parabolæ diameter B D quam secet vtcunque recta quæuis A E, occurrens parabolæ in A: oportet exhibere C, punctum aliud intersectionis.

Constructio & demonstratio.

DVcatur ex A linea A F ordinatim ad diametrum; fiantque proportionales B F, B E, B D: & per D, ordinatim ducatur D C, occurrens A E lineæ in C puncto. quoniam igitur B F, B E, B D proportionales sunt, & A F, D C ordinatim positæ, punctum c C est ad parabolam: est autem & C punctum in recta A E: igitur C communis intersectio est A E lineę cum parabola. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum. c Coroll. 151 huius.



PRO-

PROPOSITIO CXLV.

Esto ABC parabolæ diameter AD: & ordinatim ad illam posita BC, ducatur autem ex A quæuis AF, secans BC lineam in F: quæ producta occurret parabolæ in puncto quouis G. oportet illud exhibere.

Constructio & demonstratio.

Factum sit: positaque ordinatim GD, erigatur GH parallela diametro AD, occurrens BC in H. sit autem AI latus rectum. Quoniam GH æquidistat AD diametro, FEH rectangulum, hoc est rectangulum FEGD, æquale est quadrato [a] CE, hoc est BE. sed & quadrato BE æquale [b] est rectangulum IAE: rectangula igitur EAI, FEGD æqualia sunt. quare vt FE ad AE, sic AI est ad GD: & GD quidem fiat æqualis recta K. erit igitur K linea data. Rursum cùm GD ordinatim posita sit ad diametrum AD, vt AI ad GD, hoc est [c] ad K, sic K est ad AD: igitur & AD linea positione data est. quare componendo fiat vt FE ad AE, sic AI ad K, & vt AI ad K, sic K ad AD, ducaturque ex D ordinatim linea DG, constat factum esse quod petebatur.

[a] 41. huius.
[b] Ex 8. huius.
[c] Ibid.

PROPOSITIO CXLVI.

Habeant ABC, DEF parabolæ ad eundem axem AG constitutæ apices diuersos A, D; & ABC quidem superior, habeat AH latus rectum maius latere recto ID parabolæ DEF.

Dico sectiones illas in infinitum productas nusquam conuenire.

Demonstratio.

Ponatur ordinatim ad axem AG, quæcunque linea CG, occurrens ABC parabolæ in C, & DEF in F. erit igitur FG quadratum æquale rectangulo IDG, & CG quadratum æquale rectangulo HAG: sed IDG rectangulum minus est rectangulo HAG, (quia ID latus rectum minus ponitur ipso HA & DG minor ipsa AG) igitur & quadratum FG minus est quadrato CG: & F punctum cadit inter C & G. & quia idem de quouis puncto parabolæ DEF ostenditur, patet sectiones illas in infinitum productas nusquam conuenire. Quod erat demonstrandum.

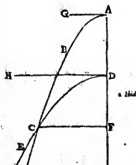
PRO-

PROPOSITIO CXLVII.

Sint duæ parabolæ A B C, D C E ad eundem axem constitutæ, & A B C parabolæ latus rectum, minus sit latere recto parabolæ D C E, nec vertex A communis sit.

Dico parabolas illas concurrere. oportet autem punctum concursus assignare.

Constructio & demonstratio.



Sit A G latus rectum parabolæ A B C, & D H latus rectum parabolę D C E, lineæ A D adijciatur quędam D F, vt A F sit ad F D, sicut H D est ad A G. & ex F ordinatim ponatur F C occurrens parabolæ D C E in C: dico illud esse punctum intersectionis. Quoniam est vt H D ad A G, sic A F ad F D, erit H D F rectangulo, æquale rectangulum G A F. sed H D F rectangulo æquale est a quadratum F C; igitur & G A F rectangulo æquale quoque est quadratum F C. vnde punctum C est ad parabolas A B C, D C E: exhibuimus ergo punctum concursus.

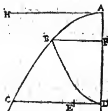
a *ibid.*

PROPOSITIO CXLVIII.

Habeant parabolæ A B C, D B F communem axem A D, & vertices oppositos A, D.

Oporteat autem earum intersectionum puncta exhibere.

Constructio & demonstratio.

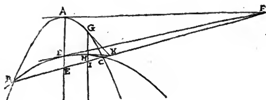


Sit A B C parabolę latus rectum A H, & D B parabolæ latus rectum E D; seceturque A D in F, vt H A F rectangulo æquale sit rectangulum F D E: & per F ordinatim ponatur F B, occurrens parabolæ A B C in B. dico B punctum esse intersectionis. cùm enim F B in A B C parabola ordinatim ducta sit ad axem A D, F A H rectangulum æquale est quadrato F B. sed F A H rectangulum æquale ponitur rectangulo F D E; quadratum igitur F B æquale quoque est rectangulo F D E, quare F B ordinatim applicata est ad F D axem, in parabola D B: adeoque punctum B vtrique parabolę est commune. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CXLIX.

Sint duæ parabolæ A B C, B D C inæquales, habentes communem rectam A E, quæ quidem axis sit parabolæ A B C, diameter verò parabolæ B D C; secentque se in B & C punctis, oportet illa exhibere.

Constructio & demonstratio.



FActum sit quod petitur: actâ per A contingente AF, ducatur linea per B & C conueniet illa cum AF in puncto quouis F: si enim non conueniat, æquidistet AF: erit igitur CB, ordinatim posita ad axem AE in parabola ABC, & quia in E bissecta est, in BDC parabola quoq; ordinatim erit ducta, ipsiqueDE diametro ad angulos rectos. igitur DE axis est parabolę BDC: quod est contra hypothesim: concurret ergo CB, cum AF in puncto quouis F. ponatur ergo ex F linea FD, contingens parabolam BDC in puncto quouis D. Quoniam AF est contingens, in parabola ABC, lineæ FB, FE, FC [a] proportionales sunt, sed & in parabola BDC eædem sunt proportionales: punctum igitur D contingentis DF, [b] in diametro est DE. Rursum ducatur diameter quæuis alia GH occurrens parabolis in G & H, & BC lineę in I, actaque per G contingente GK, quæ cum BF conueniat in K, ducatur ex K linea KH, contingens parabolam BDC in puncto quouis H. Quoniam igitur GK linea contingit parabolã ABC, rectæ KB, KI, KC [c] continuæ proportionales sunt: sed & eædem quoque sunt proportionales in parabola BDC, igitur H punctum contingentis HK, in [d] diametro est HI. igitur componendo cùm A, D puncta data sint, agantur per A & D, contingentes, quæ conuenient in puncto quodam F. ductaque diametro quauis GH; agantur per G & H, contingentes quę etiam conuenient in K: igitur data sunt puncta F, K, E, I: quare & data erunt puncta B, C: quæ in FK linea esse per resolutionem ostendimus. igitur exhibuimus duarum parabolarum CBC, BDC intersectiones. Quod erat præstandum.

a 81 huius. b Ex eadem. c Ibid. d Ibid.

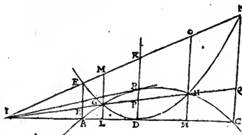
PROPOSITIO CL.

INtersecent sese parabolæ duæ ABC, EDF inuersè positæ, habentes axes parallelos: oportet G & H, puncta intersectionum exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt EDF parabolę axis DB, & factum sit quod petitur: actaque per D linea AC quę EDF parabolam contingat in D, ponatur per G & H, puncta intersectionum recta GH, quæ conueniet cum AC in puncto quouis I. si enim non conueniat, æquidistet AC. recta igitur GH in parabola EDF, ordinatim posita est ad axem DB, adeoque & diametrum BD in parabola [e] ABC ad angulos fecat rectos; & quia GH à BD, linea bissecta est, recta BD axis est parabolæ ABC. quod est contra hypothesim. igitur HG non æquidistat AC, sed producta cum illa conuenit in puncto quouis I. ducatur ergo ex I recta IB, contingens parabolam ABC in puncto quodam B. quoniam ID recta est contingens, lineæ IG, [f] IP, IH continuæ sunt proportionales in parabola EDF: sed & eædem quoque sunt proportionales in parabola ABC, punctum igitur contactus B lineæ

e Defin. 1. huius. f 81. huius.



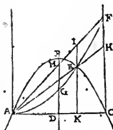
neæ IB eſt in diametro a BD. Rurſum erigatur ex A diameter AE occurrens a *Ex eadem.* EDF parabolæ in E: & IG rectæ in R. ducaturque per E ex I, linea IF, occurrens parabolæ EDF in F, & iungantur puncta CF. Quoniam AE,KD, rectæ parallelæ ſunt, vt AI ad DI, ſic EI eſt ad KI t ſed vt AI ad DI, ſic b AD eſt ad b *1. De proportionibus.* DC (quia IA,ID,IC proportionales ſunt) & vt EI ad KI, ſic EK eſt ad KF, quia EI,KI,FI proportionales ſunt; igitur vt AD eſt ad DC, ſic EK eſt ad KF, adeoque FC linea æquidiſtat KD: vlterius per G & H, poſitis diametris LM, NO, producatur GH linea donec FC occurrat in Q. erit igitur vt ADC rectangulum ad rectangulum ANC, c ſic BD linea ad lineam HN: ſed vt ADC c *47. huius.* rectangulum ad rectangulum ANC, (hoc eſt vt EKF rectangulum ad rectangulum EOF,) ſic KD linea quoque eſt ad lineam HO; igitur vt BD ad HN, ſic KD eſt ad OH: & permutando inuertendo vt KD ad BD, ſic OH eſt ad HN, hoc eſt FQ ad QC, hoc eſt MG ad GL, hoc eſt ER ad RA.

Componendo igitur, inuento axe DB parabolæ EDF, cùm data ſint puncta D & B, acta per B contingente BI, agatur per D quoque contingens parabolam EDF in puncto D, ſecans ABC, in A & C: conueniet illa cum BI (vt oſtendi) in puncto quonis I: data igitur ſunt puncta I, A, C. erigantur ergo ex A & C, diametri AE, CF occurrentes parabolæ EDF, in punctis E & F: ductaque ex I per E linea occurret illa rectę CF in F, (vt oſtenſum eſt) & BD lineæ in K. vnde & K punctum quoque datum eſt. fiat igitur vt KD ad BD, ſic ER ad RA, vel FQ ad QC, ducaturque recta IR vel IQ. patet per reſolutionem, in illā eſſe puncta interſectionum B & C. igitur exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLI.

ESto ABC parabolæ axis BD, & ordinatim ad illum poſita AC, per A verò deſcribatur parabola AEF cuius vertex ſit A, & AC linea contingens; occurrat quoque AEF parabola, parabolæ ABC in E, oportet E punctum interſectionis exhibere.

Constructio & demonstratio.



FActum ſit quod petitur: erectaque ex C diameter CH occurrat parabolæ AEF in F; ducaturque FA, occurrens BD lineæ in M: dein per E rectæ ponantur AEH, IEK; & AE quidem occurrat FC in H, IK verò æquidiſtet axi BD. erit igitur vt ADC rectangulum ad rectangulum AKC, ſic BD linea ad lineam EK: ſed vt ADC rectangulum ad rectangulum AKC, hoc eſt vt AMF rectangulum ad rectangulum AIF, ſic MG linea ad lineam IE: igitur vt BD ad EK, ſic MG eſt ad IE; & permutando vt BD ad MG, ſic EK eſt ad IE, hoc eſt CH eſt ad FH.

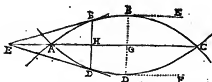
Igitur per compoſitionem cùm AC, BD lineæ & puncta.

puncta B D, C G data sint, erigatur ex C diameter C F, occurrens A E F parabolæ in F, erit F quoque punctum datum: ducatur dein recta F A occurrens B G lineæ in M, erit & M punctum datum. ac proinde si fiat vt B D, ad M G, sic C H ad H F, ducaturque recta A H, patet per resolutionem, E punctum esse in linea A H. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLII.

Interſecent ſe duæ parabolæ A B C, A D C inuersè positæ, habentes communes diametros B D, in punctis A & C: datumq; sit vnum punctorum C: oportet alterum exhibere.

Constructio & demonstratio.



Agantur per B & D puncta contingentes B E, D F. quæ primò æquidistent, ducaturque ipsi B E parallela C A, occurrens A B C parabolæ in A, & B D rectæ in G: erit igitur A C linea in parabola A B C, ordinatim posita ad diametrum B D, adeoque in G diuisa bifariam. sed etiam A C æquidistat D F contingenti: igitur & A C in parabola A D C ad B D, ordinatim ducta est, & in G diuisa bifariam: igitur A punctum vtrique parabolæ est commune.

Secundò concurrant in E contingentes per B & D actæ: ducaturque recta E C, occurrens B D diametro in H, & A B C parabolæ in A. erunt [a] igitur proportionales B A, E H, E C: sed eædem quoque lineæ sunt proportionales in parabola A D C, & H, G, C puncta data sunt: igitur & A punctum datum est, estque illud A D C parabolæ commune. exhibuimus ergo alterum punctum occursus A. quod fieri postulabatur.

a 81. huius.

PA-

PARABOLÆ
PARS QVARTA

Proprietates contemplatur parabolarum sese inuicem vel circulos intersecantium.

PROPOSITIO CLIII.

HAbeant A B C, A D E parabolæ communem axem A F, & verticem A: ex quo demissâ linea A G quæ parabolis occurrat in B & G, ponantur per B & G ordinatim ad axem lineæ D H, G I: & G I quidem parabolæ A B C occurrat in K puncto, per quod ex A secans ponatur A L & ex L ordinatim recta L M, occurrens A B C parabolæ in N: dein per N ponatur A E, & ex E ordinatim linea E C F.

Dico D H, K I lineas, item L M, C F inter se æquales esse.

Demonstratio.

RAtio A H ad A I, hoc est H B ad I G, duplicata est rationis H B ad I K, hoc est H D ad I G. igitur H B, I K, I G proportionales sunt, & vt I K ad I G, sic H B ad I K, sed H B est ad H D, vt est I K ad I G; igitur H B est ad H D, vt H B ad I K. æquales igitur sunt H D & I K. eadem ratione ostendetur lineas L M, C F æquales esse.

PROPOSITIO CLIV.

IIsdem positis, rectæ A L, A E secent D H lineam in O & P.

Dico rectas E F, L M, G I, D H, B H, O H, P H in continua esse proportione.

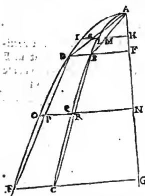
Demonstratio.

QVoniam N M æqualis est ostensa G I, & E F, [a] L M, N M proportionales sunt, erunt & E F, L M, G I lineæ in continua analogia: & quia L M, G I, K I proportionales sunt, & K I lineæ æqualis linea D H, continuabũt quoq; L M, G I, D H, rationem cum E F, L M, G I: est autem prætereà vt G I ad D H, sic D H ad B H, proportionales igitur sunt E F, L M, G I, D H, B H. vlterius cùm sit vt G I ad K I, sic B H ad O H, sit autem vt G I ad K I, sic G I ad D H, & D H ad B H, rectę G I, D H, B H, O H continuæ proportionales sunt. iterum cùm O H sit ad P H, vt L M ad N M, id est ex demonstratis L M ad G I, id est G I ad D H, hoc est D H ad B H, hoc est B H ad O H; erunt G I, D H, B H, O H, P H lineæ, adeoque omnes E F, L M, G I, D H, B H, O H, P H in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

[a] 42. huius.

PROPOSITIO CLV.

Habeant ABC, ADE parabolæ communem axem AF, positisque ad illum ordinatim lineis FBD, GCE, iungantur AB, AD, BC, DE ducanturq; HI, NO parallelę FD, & HI quidem secet parabolas in I & L, lineas AD, AB in K & M, recta verò NO, occurrat DE, BC, lineis in P & R, parabolis in Q & O.



Dico esse vt LM ad RQ, sic IK ad OP.

Demonstratio.

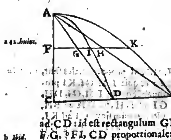
Vt IH ad LH, sic DF ad BF; sed vt DF ad BF, sic KH ad MH, igitur vt IH ad LH, sic KH ad MH, & IK ad LM, vt IH ad LH; id est vt DF ad BF. sed vt DF ad BF, sic ON quoque est ad QN, & PN ad RN. igitur vt ON ad QN, sic PN ad RN; & OP ad QR, vt ON ad QN, id est DF ad BF, id est ex demõstratis IK ad LM, & permutando vt IK ad OP, sic LM ad RQ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLVI.

Parabolæ duæ ad eundem axem AC constitutę communem habeant apicem A: positaq; ad axem ordinatim CDE, iungantur AD, AE, & recta ducatur FK parallela CE, secans parabolas in I & K, rectas verò AD, AE, in G & H.

Dico GFH rectangulum ad rectangulum IFK eam habere rationem, quam habet FG linea ad lineam CD.

Demonstratio.



Ratio rectanguli GFH ad IFK, rectangulum composita est ex ratione FG ad FI, & ex HF ad FK: est autem vt FG ad FI, sic [a] FI ad CD; & vt FH ad FK, sic FK ad CE; ratio igitur rectanguli GFH ad rectangulum IFK, composita est ex ratione FI ad CD, & ex FK ad CE: sed FK est ad CE, vt FI est ad CD; rectangulum igitur GFH ad IFK rectangulum duplicatam habet rationem eius quam habet linea FI ad CD: id est rectangulum GFH ad IFK rectangulum, est vt FG ad CD, quia FG, [b] FI, CD proportionales sunt. Quod fuit demonstrandum.

a 41. huius.

b ibid.

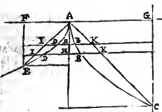
PRO-

PROPOSITIO CLVII.

Contingant se exterius in vertice, parabolæ duæ ABC, ADE, positísque ex A secantibus AE, AC, & contingente AH, ducantur quotcunque IK parallelæ axi communi FAG.

Dico IHD rectangulum, esse ad rectangulum IHD, vt KHB rectangulum ad rectangulum KHB.

Demonstratio.



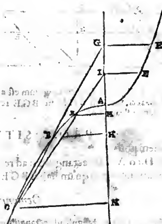
Rectangulum IHD ad rectangulum IHD, triplicatam habet rationem eius [a] quam habet IH ad IH, id est AH ad AH. sed & BHK rectangulum ad rectangulum BHK, triplicatam habet rationem eius quam habet HK ad HK, id est AH ad AH: igitur vt BHK rectangulum est ad rectangulum BHK, sic IHD rectangulum est ad rectangulum IHD. Quod erat demonstrandum. a 54. huius.

PROPOSITIO CLVIII.

Contingant se rursum exterius in vertice parabolæ duæ ABC, AEF, ad eundem axem GH constitutæ, sumptoque in ABC perimetro puncto quouis C ducantur ex C lineæ CG, CI secantes ABC parabolam in B & K, & axem GH in G & I: dein ordinatim ponantur BH, KM, IE, GF.

Dico HB lineam ad lineam MK, duplicatam habere rationem eius quam habet GF linea ad lineam IE.

Demonstratio.



Ducatur ex C ordinatim linea CN. Quoniam tam NA, AI, AM lineæ quàm NA, AG, AH [b] continuæ proportionales sunt & NA prima vtrique seriei communis, ratio AH ad AM, tertiæ ad [c] tertiam, duplicata est eius quam habet AG ad AI, secunda ad secundam: sed AH ad AM, duplicatã quoque rationem habet BH ad KM; igitur BH est ad KM, vt AG est ad AI: & HB ad MK duplicatam habet rationem eius quam habet GF ad IE. Quod erat demonstrandum. b 52. huius. c 17. De progressionibus.

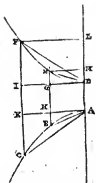
PROPOSITIO CLIX.

Esto ABC parabolæ axis AD æqualis lateri recto; & per D parabola descripta DEF æqualis parabolæ

parabolæ ABC apicem habeat D, obuersum apici parabolę ABC & axem communem; dein quæuis ducantur diametri EB, FC occurrentes parabolis in B,C,E,F punctis, actæ verò per A & D, contingentes, diametros EB, FC secent in G, H, I, K.

Dico EGB rectangulum esse ad rectangulum FIC, vt est quadratum ED ad quadratum FD.

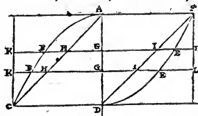
Demonstratio.



POnantur ordinatim lineæ FL, EM. Quoniam AD linea, æqualis ponitur lateri recto, & EM, FL ordinatim applicatæ sunt, quadratum ED (hoc est quadrata EM, MD) æquale est rectangulo DMA: & quadratum FD (hoc est quadrata FL, LD) æquale rectangulo DLA; igitur vt ED quadratum ad quadratū FD, sic DMA rectangulum ad rectangulū DLA: sed DMA id est GEH, rectangulo æquale est rectangulum EGB; & DLA æquatur FIC; rectangulum igitur EGB ad FIC, rectangulum est vt quadratum ED ad quadratum FD.

PROPOSITIO CLX.

SInt ABC, DEF parabolæ, ad eundem axem AD inuersè positæ; ductisque ex A & D, ordinatim lineis AF, DC, iungantur puncta AC, FD; ducantur præterea quotuis BE parallelæ AF occurrentes parabolis in B & E, rectis AC, FD in H & I, & axi AD in G.



Dico quadratum BG, rectangulum BGE & quadratum GE in continua esse analogia.

Demonstratio.

VT BG linea ad lineam GE, sic quadratum BG est ad rectangulum BGE: sed etiam vt BG ad GE, sic BGE rectangulum est ad quadratum GE; igitur vt quadratum BG ad rectangulum BGE, sic BGE rectangulum est ad quadratum GE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXI.

IIsdem positis:

Dico AGD rectangulum ad rectangulum AGD, duplicatam habere rationem eius quam habet BGE rectangulum ad rectangulū BGE.

Demonstratio.

RAtio AGD rectanguli ad rectangulum AGD composita est ex ratione AG ad AG, & ex GD ad GD: ratio verò rectanguli BGE, ad BGE rectangulum, composita est ex ratione BG ad BG, & ex GE ad GE: sed ratio AG ad AG, dupli-

duplicata est rationis BG ad BG, & ratio GD ad GD, duplicata est rationis GE ad GE, ratio igitur rectanguli AGD ad rectangulum AGD, duplicata est eius quam habet BGE rectangulum ad rectangulum BGE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

Iisdem positis: erigantur ex C & F diametri CK, FL occurrentes lineis BE in K & L.

Dico rectangula KGL, BGE, HGI in continua esse analogia.

Demonstratio.

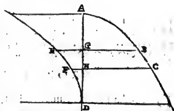
Rectangulum KGL ad rectangulum BGE, rationem habet compositam ex KG ad BG, & ex GL ad GE: & BGE rectangulum ad rectangulum HGI, rationem habet compositam ex BG ad HG, id est KG ad BG, & ex GE ad GI: id est GL ad GE: rectangulum igitur KGL est ad rectangulum BGE, vt BGE rectangulum ad rectangulum HGI. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIII.

Sint rursum parabolæ duæ ABC, DEF: & ABC parabolæ quidem apex sit A, parabolæ verò DEF sit apex D, in quo contingat axem AD in D: factisque AG, DH lineis æqualibus, agantur per G & H, normales ad AD, lineæ EB, FC occurrentes parabolis in E, B, F, C.

Dico EGB rectangulum ad rectangulum FHC quintuplicatam habere rationem eius quam habet GB linea ad lineam HC.

Demonstratio.



Ratio EGB rectanguli ad rectangulum FHC, composita est ex ratione EG ad FH, hoc est duplicata GD a ad HD; id est AH ad AG, (cùm AG, HD lineæ æquales sint) hoc est ex quadruplicata ratione GB ad HC, & ex ratione GB, ad HC: rectangulum igitur EGB ad FHC rectangulum quintuplicatam habet rationem GB ad HC. Quod fuit demonstrandum.

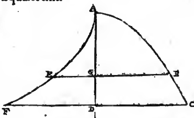
a Ex 33. huius.

PROPOSITIO CLXIV.

Sit ABC parabolæ axis AD, & AEF parabolæ vertex A, in quo illam contingat linea AD, positaque EGB ordinarim ad AD ducatur & altera FDC, vt GB, FD rectæ æquales sint.

Dico rationem EG ad DC quintuplicatam esse eius quam habet GB ad DC.

Demonstratio.



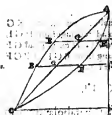
Ratio EG ad DC componitur ex ratione EG ad FD, hoc est duplicata AG ad AD. hoc est quadruplicata rationis GB, ad DC,

& ex ratione GB. hoc est FD, ad DC. igitur ex quintuplicata ratione GB ad DC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLXV.

Sit ad ABC parabolæ diametrum AD ordinatim posita CD, describatur autem per A & C parabola AEC habens verticem in A, & AD, contingentem, iunctisq; AC ponantur ad AD, ordinatim lineæ BG, EF.

Dico GFE rectangulum esse ad rectangulum GFE in sextuplicata ratione FB ad FB.



Demonstratio.

a 54. huius.

Rectangulum GFE ad GFE a rectangulum triplicatam habet rationem GF ad GF, id est AF ad AF; sed AF ad AF, rationem habet duplicatam eius quam habet BF ad BF; rectangulum igitur GFE ad GFE, rectangulum sextuplicatam habet rationem FB ad FB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVI.

Iisdem positis:

Dico EFB rectangulum ad rectangulum EFB quintuplicatam habere rationem eius quam habet FB ad FB.

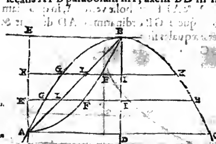
Demonstratio.

Rectangulum EFB ad EFB, rectangulum rationem habet compositam ex EF ad EF, id est ex duplicata rationis AF ad AF, id est ex quadruplicata rationis FB ad FB, & ex ratione FB ad FB; ratio igitur EFB rectanguli ad rectangulum EFB quintuplicata est rationis FB ad FB.

PROPOSITIO CLXVII.

Parabolam ABC cuius axis BD, contingat in B linea BE, in qua assumpto quouis puncto E demittatur EA, occurrens ABC parabolæ in A. tum per A & B parabola describatur AFB habens verticem in A, occurrens ABC parabolę in B. sitque eius axis AE: ducatur autem KH secans AFB parabolam in F, axem BD in I.

Dico GK, FK, HK lineas esse proportionales.



Demonstratio.

b 41. huius.

c 43. huius.

Iuncta AB. secet HG lineam in L. Quoniam BD æquidistat diametro AE, & IK ordinatim ad illam applicatur, rectangulo LKI b æquale est quadratum FK. sed & LKI rectangulo æquale est c rectangulum GKH, quadratum igitur FK æquale quoque

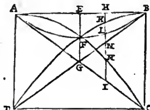
quoque est rectangulo G K H. & G K, F K, H K lineæ in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

Esto A B C D parallelogrammum, descriptâq; per A & C, parabolâ cuius diameter sit A D, & contingens A B, describatur & altera per B & D, cuius diameter sit B C & contingens A B. occurrat autem parabolæ A E C in E. deinde per A, E, C puncta tertia describatur parabola communes habens cum alijs diametros.

Dico iunctas A C, B D, parabolam A E C contingere in A & C.

Demonstratio.



Agatur per E diameter E F secans D B lineam in G. vt F E ad A D, sic F B quadratum ad [a] quadratum A B, & vt F E linea, ad lineam B C, sic A F, quadratum ad quadratum A B: sunt autem A D, B C lineæ per hypothesim æquales, igitur & F B quadratum est ad quadratum A B, vt A F quadratũ ad quadratũ A B: quadrata igitur A F, F B æqualia sunt, & linea A B dupla A E, vti A D dupla F G: quare F E etiam A C lineæ occurrit in G puncto, quo bifariam à D B, alterâ parallelogrammi diametro secatur. Rursum quia A B quadratum quadruplum est quadrati F B, erit & B C linea, quadrupla lineæ F E, est autem A D id est B C, ostensa dupla F G, igitur F G dupla est F E, & F E, E G lineæ æquales. vnde B D linea [a] est contingens; similiter ostenditur A C lineam, parabolam A E B contingere. Quod erat demonstrandum.

[a] Ex 17. huius.

Corollarium.

Hinc patet A G, B D lineas, in illo puncto se intersecare, vbi E G est æqualis rectæ F E: quod singulatim & explicitè annotare verbo placuit.

PROPOSITIO CLXIX.

Iisdem positis: oportet E punctum intersectionis exhibere.

Constructio & demonstratio.

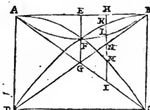
Diuisâ A B bifariam in F, demittatur ex F diameter F E, æqualis quartæ parti lineæ B C: dico E, terminum lineæ F E, designare punctum intersectionis. sit enim E punctum intersectionis inuentum & per E diameter agatur E F. erit E F, vt in præcedenti propositione ostendimus, æqualis quartæ parti lineæ B C; igitur per compositionem cùm F E diameter detur æqualis quartæ parti lineæ B C, patet E punctum esse intersectionis, &c. Quod erat exhibendum.

PROPOSITIO CLXX.

Iisdem positis ducatur quæuis diameter H I secans parabolas in K, L, M. Dico H K, H L, H M lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.







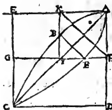
Recta HI secet BD lineam in N, & AC in I. vt BHA rectangulum ad rectangulum BFA a sic HL linea est ad lineam FE, id est EG: & vt BND rectangulum ad rectangulum c BGD, sic KN ad EG: est autē BHA rectangulum ad rectangulum BFA, vt BND rectangulum ad rectangulum BGD; igitur vt HL ad EG, sic KN ad EG: adeoque HL, KN æquales sunt lineæ; & dempta communi KL, manet HK æqualis LN. similiter ostēditur IM linea æqualis lineæ HL: quare vt HM ad MI, sic HM est ad HL: sed vt HM ad MI, sic d AI est ad IC, id est AH ad HB: igitur vt HM ad HL, sic AH ad HB, id e est HL ad LN, id est HL ad HK. proportionales igitur sunt HK, HL, HM. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXI.

Parabolam ABC cuius diameter AD contingat in A linea AE, demissaq; ex E, diametro EC, describatur per A & C parabola AFC cuius diameter sit AE & contingens AD: dein linea ducatur GH parallela AE, secans AFC parabolam in F, & AC lineam in I puncto; per quod diameter ponatur IBK, iunganturque BF, HK.

Dico BF, HK lineas æquidistare.

Demonstratio.

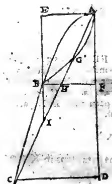






Ponatur ex C ordinatim ad diametrum AD linea CD: ratio KB ad EC, duplicata f est rationis KI ad EC: similiter ratio HF ad CD, duplicata est rationis HI ad CD, id est AK ad AE, id est KI ad EC; igitur vt KB ad EC, sic HF ad CD, & vt KB ad KI, sic HF ad HI. æquidistant igitur g FB, HK lineæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXII.



Parabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE, demissaq; diametro EB, quæ ABC parabolæ occurrat in B, ponatur ex B ordinatim linea BF: descriptaque per A & B parabolā AGB cuius diameter AE, & contingens AD, ducatur ex A linea AC occurrens AGB parabolæ, & lineis BF, EB in G, H, & I.

Dico AG, AH, AI, AC lineas esse continuè proportionales.

Demonstratio.



Qvoniam EB æquidistat contingenti AD, & FB, diametro AE, rectæ AG, h AH, AI continuæ sunt propor-

proportionales, sunt autem & A H, A I, [a] A C lineæ etiam in continuata ratione; igitur A G, A H, A I, A C eandem continuant analogiam. Quod erat demonstrandum. [a] Ex 67. huius.

PROPOSITIO CLXXIII.

Iisdem positis ponatur ordinatim C D.

Dico A G ad A C triplicatam habere rationem eius quam habet BF ad CD.

Demonstratio.

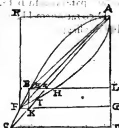
QVoniam A G, A H, A I, A C lineę per præcedentem continuæ proportionales sunt, ratio A G ad A C [b] triplicata est eius cuius A H ad A C est duplicata: sed A H ad A C, id est A F ad A D, rationem habet duplicatam B F ad C D: igitur A G ad A C rationem habet triplicatam eius quam habet B F linea ad lineam C D. Quod erat demonstrandum. [b] Ex 17. de progressio. bus.

PROPOSITIO CLXXIV.

PArabolam A B C cuius diameter A D contingat in A linea A E; positisq; ordinatim C D, F G, per F & A parabola describatur A H F cuius tangens A D, diameter A E: ductaque A F, ponatur A C, secans A H F parabolam in I, rectam F G in K puncto, ex quo erectâ diametro K B, ducatur ordinatim linea B L, occurrens A F lineæ in M, rectæ A C in N, & parabolæ A H F in H.

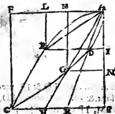
Dico C D, F G, B L, M L, N L, H L lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.



ERigatur ex F diameter F E. Quoniam B K æquidistat diametro A D, rectæ C D, F G, B L proportionales sunt: sed & F G, B L, M L quoque sunt proportionales; eandem igitur continuant rationem C D, F G, B L, M L. Rursum cùm ratio N L ad K G, id est ad B L, id est ratio A L ad A G, duplicata sit rationis B L ad F G, id est L M ad L B, rectæ quoque B L, M L N L proportionales sunt. postremò quia F G linea ad lineam H L duplicatam habet rationem A L ad A G, id est quadruplicatam L B ad G F, id est L B ad L M, lineæ L H, L N, L M, L B, L F proportionales sunt; igitur continuant eandem rationem lineæ C D, F G, B L, M L, N L, H L. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXV.



PArabolas æquales A B C, A D C, & communem habentes verticem, contingant in A lineæ A E, A F æquales lateribus rectis, secent autem sese parabolæ in C, & ex C ordinatim ducantur C E, C F, demissisque ex A lineis æqualibus A B, A G, quarum altera A B, quidem secet A B C parabolam in B,

 A G ve-

A G verò parabolam A D C in C & producta, C E lineam in H. ducatur ex B ordinatim linea B I secans A D C parabolam in D, & per D ex A linea ducatur A K occurrens E C in K.

Dico A D ad A K, duplicatam habere rationem eius quam habet A G ad A H.

Demonstratio.

DVcantur ex B & G punctis, diametri B L, G M, G N: ac B L, & G M quidem occurrant A F lineæ in L & M; G N verò, rectæ A E in N. Quoniam tam A B C, A D C parabolæ, quàm A B, A G lineæ æquales sunt, erit L B linea quoque æqualis G N, & I B æqualis M G. Rursum ratio L B ad F C, id est A I ad A E; id est A D ad A K duplicata est rationis I B ad E C, id est M G ad E C; sed vt M G ad E C, sic A N ad A E (nam A L id est I B æqualis est rectę A N, & E C ipsi
a 9 huius. A E, [a] est æqualis) hoc est A G ad A H; igitur ratio A D ad A K, duplicata est eius quam habet A G ad A H. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVI.

PArabolas æquales A B C, A D C communem habentes verticem contingant in A lineæ A E, A F, secentque sese inuicem parabolæ in C; ex quo ductis ordinatim lineis C E, C F, describatur per A parabola A H G habens verticem in A, & contingentem A E, occurrens autem A D C parabolæ in G. iunctisque punctis A C, A G, erigatur ex G diameter G M secans A C lineam in M, puncto per quod ordinatim ducatur linea I K secans parabolas in B, H, D, lineam A G in L.

Dico rationem I H ad I B triplicatam esse eius, cuius I L ad I M, habet duplicatam.

Demonstratio.

b 41. huius. INueniatur inter I D & I L media I N; quoniam igitur I D, I L, [b] I M, proportiona-
c 74. huius. les sunt, & I N media inter I D, I L, erunt tam I D, I N, [c] I L, I H lineæ, quàm I D,
d ibid. [d] I L, I M, I B continuæ proportionales: quare ratio I H ad I B, quartę ad quartam,

tripli-

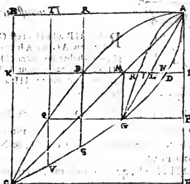
triplicata a est rationis IN ad IL, secundæ ad secundam, cuius IL ad IM, tertia ad tertiam, rationem b habet duplicatam. Quod erat demonstrandum. a 17. De progressionibus. b Ibid.

PROPOSITIO CLXXVII.

Iisdem positis: agatur per G ordinatim QP.

Dico ID ad IH, rationem habere triplicatam eius quam habet IH ad GP. & rationem ID ad IB, triplicatam esse rationis IB ad CF.

Demonstratio.



Cum enim IN media sit inter ID & IL, rectæ ID, IN, IL, c IH, GP proportionales sunt, quare ID ad IH, prima ad quartam, triplicatam habet rationem IH ad d GP, quartæ ad quintam. Quod erat primum. Rursum cùm IL media sit e inter ID, IM, rectæ f ID, IL, IM, IB, IK id est CF continuæ proportionales sunt, quare ID ad IB, prima ad quartam, triplicatam habet rationem eius quam habet IB ad CF, quarta ad quintam. Quod erat demonstrandum. c 174. huius. d 17. De progressionibus. e Ex 42. huius. f 174. huius

PROPOSITIO CLXXVIII.

Iisdem positis agantur per Q & B diametri TV, RS occurrentes ADC parabolæ in V & S, & AE lineæ in T & R.

Dico rationem ID ad GP, octuplicatam esse rationis RS ad TV.

Demonstratio.

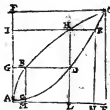
Est enim ratio ID ad GP, duplicata rationis g AI ad AP, id est RB ad TQ: id est quadruplicata eius quam habet RA ad TA. sed ratio RA ad TA, duplicata est rationis RS ad TV, cùm ordinatim sint positę ad AE; igitur ratio ID ad GP, octuplicata est rationis RS ad TV. Quod erat ostendendum. g Ex 1. huius.

PRO.

PROPOSITIO CLXXIX.

Parabolas A B C, A D C communem habentes verticem, contingat in A lineæ A E, A F, secent autem sese parabolæ in C puncto, ex qu ordinatim ponantur lineæ C E, C F: assumptoque in A F puncto quoui G, ducatur ex G ordinatim linea G D, secans A B C, A D C parabolas i B & D, atque per D diametro D H, quæ A B C parabolæ occurrat in H ducatur per H ordinatim linea I K, secans A F lineam in I.

Dico G B ad G D quadruplicatam habere rationem eius quam habe I H ad I K.



Demonstratio.

Ratio G B ad I H, id est G D duplicata est rationis A G ad A I: sed A G ad A I, duplicatam habet rationem G D ad I K, id est I H ad I K, ratio igitur G B ad G D, quadruplicata est rationis I H ad I K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXX.

Productâ H D donec A E lineæ occurrat in L, demittantur ex B & K diametri B M, K N occurrentes A E lineæ in M, & N, & B M quidem A D C parabolæ in O.

Dico rationem O M ad D L, quadruplicatam esse rationis D L ad K N.

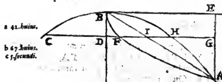
Demonstratio.

Est enim ratio O M ad D L duplicata rationis A M ad A L, id est G B ad I H: id est quadruplicata rationis A G ad A I, id est L D ad N K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXXI.

Parabolã A B C cuius axis B D contingat in B linea B E, in qua assumpto quouis puncto E, demittatur ex E diameter E A: descriptâ deinde per A & B parabola B F A cuius axis B E, & contingens B D, ducatur ad B D quæuis ordinatim linea H C, occurrens parabolis in C, F, H; & B D, B A, E A lineis in D, I, G.

Dico H I C rectangulum, æquari rectangulo G D I F.



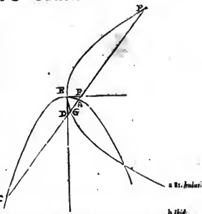
Demonstratio.

a 42. huius.
b 67 huius.
c 5. secundi.

Rectangulum G D I, æquale est a quadrato H D: sed H D quadratum æquale est quadrato I D, id est b rectangulo F D B, vnà cum c rectangulo H I C, rectangulum igitur G D I, æquale est rectangulis F D G, H I C. est autem idem G D I rectangulum, æquale quoque rectangulis F D G, G D I F: rectangula igitur F D G, H I C, æqualia sunt rectangulis F D G, G D I F. dempto igitur communi rectangulo F D G, manet H I C rectangulum æquale rectangulo G D I F. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXII.



Parabolam ABC cuius diameter BD contingat in B, linea BE, descriptaq; per B parabolâ FBG, cuius diameter BE, & contingens BD, ducatur linea quæcunq; FC, occurrens parabolis in A, & G, F, C, diametris verò in E & D.

Dico AEC rectangulum, æquari rectangulo GDF.

Demonstratio.

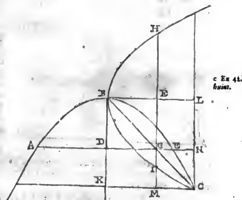
Quoniam EB linea contingens est, rectæ AE, DE, a CE proportionales sũt, adeoque AEC rectangulum æquale quadrato ED: sed ED quadrato æquale est b rectangulum GDF, rectangulum igitur AEC æquale est rectangulo GDF. Quod erat demonstrandum. a 81. huius. b ibid.

PROPOSITIO CLXXXIII.

Iisdem positis: occurrant sibi parabolæ duæ ABC, CBH in C. iunctâque BC, ponatur in ABC parabola ordinatim ad BD, linea ADF, occurrens rectæ BC in G: & per G recta agatur HI parallela BD, occurrens diametro BL in E.

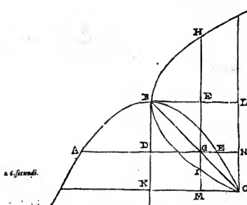
Dico IGH rectangulum esse ad rectangulum FGA, vt quadratum IE ad quadratum FD.

Demonstratio.



Ponantur ex C ordinatim ad diametros BD, BE, lineę CK, CL. quoniam BC, BG parallelogramma communem habent diametralem BGC, vt CL ad GE, sic KC est ad GD; sed vt CL ad GE, sic IE quadratum est ad c quadratum GE, & vt CK linea ad lineam GD, sic FD quadratum est ad quadratum GD; igitur vt IE quadratum ad quadratum GE, sic FD quadratum est ad quadratum GD, & permutando vt IE quadratum ad quadratum FD, sic quadratum GE ad quadratum GD. est autem quadratum IE æquale quadrato GE, vnà cum rectangulo IGH; & FD quadratum æquale quadrato GD, vnà cum rectangulo FGA; igitur & IGH rectangulum est ad rectangulum FGA vt IE quadratum ad quadratum FD. Quod erat demonstrandum. c Ex 41. huius.

PROPOSITIO CLXXXIV.



Iisdem positis, producta linea G H, occurrat C K lineæ in M, & A F producta lineæ L C in N.

Dico I M H rectangulũ esse ad rectangulum F N A, vt I G H rectangulum est ad rectangulum F G A.

Demonstratio.

Ostensũ est præcedenti propositione, quadratum K C ad C L, eandem habere rationem quam D G quadratum ad quadratum G E, ac proinde, quã quadratũ D F ad E I, quadratum: sed quadratum K C hoc est D N æquatur D F quadrato, vnà cum [a] rectangulo F N A; similiter quadratum C L hoc est E M, æquale est quadrato E I, vnà cum rectangulo I M H: cùm igitur sit quadratum E M ad D N, sicut quadratum E I ad D F, rectangulum quoque I M H est ad rectangulum F N A, vt quadratum E I ad D F quadratum, hoc est per præcedentem vt rectangulum I G H ad F G A rectangulum. quod oportuit demonstrare.

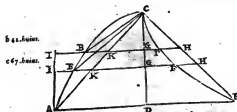
a 6. secundi.

PROPOSITIO CLXXXV.

Esto A B C parabolæ axis C D, æqualis lateri recto, actaque per D ordinatim linea D A, producatur in E, vt A D, D E lineæ æquales sint iunganturque A C, E C: dein per C & E parabola describatur C F E, habens verticem in C & contingentem C D; ducanturq; B G parallelę A D, occurrentes parabolis in B & F, & iungantur B C.

Dico esse vt quadratum B C, ad quadratum B C, sic K F lineam ad lineam K F.

Demonstratio.



Erigatur ex A diameter A I occurrens B G lineis in I. quadratum C B æquale est quadratis B G, C G: est autem [b] quadratum B G æquale rectangulo K G I, & quadrato C G [c] siue G H, (cùm C D, D E adeoque & C G, G H lineæ æquentur) æquale est rectãgulum F G I; quadratum igitur B C æquale est rectangulis F G I, K G I; hoc est rectangulo I G K F: sed I G K F rectangulum est ad rectangulum I G K F, vt F K linea ad lineam K F: quadratum igitur C B est ad quadratum C B, vt K F linea est ad lineam K F. Quod erat demonstrandum.

b 41. huius.

c 67. huius.

PROPOSITIO CLXXXVI.

Iisdem positis:

Dico F G ad G B, triplicatam habere rationem eius quam habet G B ad A D.

Demon-

Demonstratio.

QVoniam tam AD, a BG, KG, quàm DE, b GH, GF proportionales sunt, & AD prima, æqualis primæ DE, ratio KG ad GF, c duplicata est rationis BG ad GH, id est BG ad KG; cùm enim AD, DC d lineæ æquales sint, æquantur etiam KG, GC. est autem ratio FG ad GB, composita ex ratione FG ad GK, id est ex duplicata ratione KG ad GB, hoc est BG ad AD, (cùm AD, BG, KG, proportionales sint) & ex ratione KG ad GB id est iterum BG ad AD, igitur FG ad GB, triplicatam habet eius quam habet GB linea ad lineam AD. Quod fuit demonstrandum.

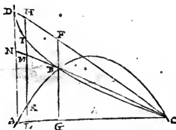
a 42 huius. b 67 huius. c 26. De progressionibus. d 9 huius.

PROPOSITIO CLXXXVII.

INtersecent iterum sese parabolæ duæ ABC, CBD in punctis B, C, habentes communes diametros FG, HKL, DA quas in M & N, secet recta CB.

Dico IM ad MK eandem habere rationem quam habet DN ad NA.

Demonstratio.



VT DHC rectangulum est ad rectangulum DFC, sic ALC ad AGC, rectangulum. sed vt DHC ad DFC, sic HI e ad FB, & vt ALC ad AGC, sic LK linea est ad GB lineam; igitur vt HI ad FB, sic KL ad BG: & permutando conuertendo vt FB ad BG, sic HI ad KL. est autem vt FB ad BG, sic HM ad ML; igitur vt HI ad KL, sic HM ad ML: vnde & IM f est ad MK, vt HM ad ML, id est DN ad NA. Quod fuit demonstrandum.

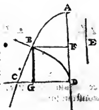
e 47 huius. f 19. quinti.

PROPOSITIO CLXXXVIII.

ESto ABC parabolæ diameter AD quam in D secet ordinatim linea DC: dein per D parabola describatur DB, habens AD contingentem & diametrum DC & commune cum altera sectione latus rectum E. occurrat autem DB parabola, parabolæ ABC in B, & ordinatim ducatur linea BF.

Dico AF lineam ad lineam FB, rationem habere duplicatam eius quam habet FB ad FD.

Demonstratio.



POnatur BG æquidistans AD. Quoniam igitur E latus rectum vtrique sectioni commune est, & FB, BG ordinatim positæ, erunt tam E, FB, AF lineæ, quàm E, BG, id est FD, & DG proportionales. vnde cùm E prima sit communis, ratio g AF ad DG, id est ad FB, duplicata est rationis FB ad BG id est ad FD. Quod fuit demonstrandum.

g 27. De progressionibus.

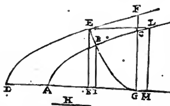
Corollarium.

Hinc sequitur AF ad FD, rationem triplicatam eius esse rationis, quæ est inter AF & FD. est enim ratio AF ad FD, composita ex ratione AF ad FB hoc est duplicata BF ad FD, & ex ratione BF ad FD: hoc est triplicata AF ad FD.

PROPOSITIO CLXXXIX.

Habeant ABC, DEF parabolæ ad eundem axem constitutæ, commune latus rectum H. assumptoq; in axe puncto quouis G, ex eo ordinatim ducatur linea GCF, describaturq; per G parabola, habens axem GC, occurrens parabolis ABC, DEF in B & E punctis; ex quibus ordinatim demittantur lineæ BI, EK.

Dico rationem IA ad KD, quadruplicatam esse rationis GI ad GK.



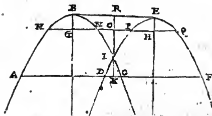
Demonstratio.

Ducta enim ex E linea EL parallelâ GD, occurrente ABC parabolæ in L, demittatur ex L ad diametrum GD, ordinatim linea LM erit igitur quadratum LM æquale quadrato EK, vnde & rectangulum sub H & MA, æquale est rectangulo sub H & KD, adeoque & MA linea æqualis KD. est igitur ratio IA ad KD, siue ad MA, duplicata rationis IB ad LM, siue ad EK. est autem ratio IB ad EK, duplicata rationis GI ad GK; ratio igitur IA ad KD, quadruplicata est rationis eius, quam habet GI ad GK. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CXC.

Intersecent sese inuicem in I parabolæ duæ ABC, DEF parallelos habentes axes BG, EH. actaque per I diametro, ducantur ordinatim rectæ MQ, AF.

Dico NOM rectangulum esse ad rectangulum POQ, vt CKA rectangulum ad rectangulum DKF.



Demonstratio.

a Ex 14. huius.

Vt IO est ad IK, sic NOM rectāgulum[a] est ad rectangulum CKA; sed vt IO ad IK sic QOP rectangulum est ad rectangulum DKF. igitur vt NOM rectangulum ad rectangulum CKA, sic QOP rectangulum est ad rectangulū DKF & permutando, NOM est ad rectangulum QOP vt rectangulum CKA ad rectangulum DKF. Quod fuit demonstrandum.

PRO

PROPOSITIO CXCI.

Iisdem positis: si ABC, DEF parabolæ eandem habuerint altitudinem & communem contingentem BE.

Dico NOM rectangulum esse ad rectangulum POQ, vt BR quadratum ad quadratum RE.

Demonstratio.

VT linea RI ad lineam OI, sic BR quadratum ad rectangulum NOM; & vt RI ad OI, sic RE quadratum ad rectangulum QOP; igitur vt BR quadratum ad NOM rectangulum sic quadratum RE ad rectangulum POQ, & permutando vt quadratum BR ad quadratum RE, sic NOM rectangulum ad rectangulum QOP. Quod fuit demonstrandum.

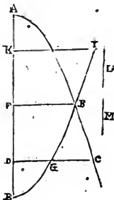
Corollarium.

HInc patet etiam rectangulum AKC esse ad rectangulum DKF, vt BR quadratum ad quadratum RE.

PROPOSITIO CXCII.

ESto ABC parabolæ axis AD ductaque ordinatim CD, sumatur in axe quæuis recta DE & per E describatur parabola cuius axis sit EA, secans parabolam ABC in B, & CD lineam in G, factaque AK æquali DE, ducantur KI ordinatim ad AE in parabola EGB, & BF ordinatim ad ABC.

Dico CD quadratum esse ad quadratum IK, vt EF linea ad FA.



Demonstratio.

SIt ABC parabolæ latus rectum L, & parabolæ EGB latus rectum M. quadratum CD æquale est rectangulo DAL; & quadratum IK æquale rectangulo KEM, est autem AD linea æqualis KE, quia AK, ED æquales ponuntur; quadratum igitur CD est ad IK quadratum, vt L ad M. Rursum quia quadrato BF tam est æquale rectangulum FAL quàm FEM; rectangula quoque FAL, FEM æqualia sunt. igitur vt AF ad FE, sic M ad L. sed vt M ad L, sic IK quadratum est ad CD quadratum, igitur vt AF ad FE, sic IK quadratum est ad quadratum CD.

PROPOSITIO CXCIII.

SIt ABC parabolæ axis AD æqualis lateri recto centroque A interuallo quouis, circulus describatur occurrens parabolæ in B, C; axi in E, ponaturque ad axem ordinatim BF.

Dico DF, AE, AF lineas continuè esse proportionales.

 Demon-

Demonstratio.

a 34. huius.

RECta AE æqualis est AB: sed AF, a AB, DF proportionales sunt, igitur & AF, AE, DF eandem continuant rationem. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXCIV.

SIt ad ABC parabolæ axem BD, ordinatim applicata AC; actâque per B contingente BE, quæ erectæ ex A diametro, occurrat in E, describatur per AB parabola AFB, cuius axis AE; centroq; D interuallo AD, circulus describatur AGC, quem in G, secet recta quædam HG, æquidistans axi BD, occurrensq; ABC parabolæ in H, & AC lineæ in I: denique per H ponatur KF parallela EB, occurrens AFB parabolæ in F & AE in K.

Dico GI, FK lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.

b 47. huius.

PRoducta BD, occurrat circulo in L: vt AK ad AE, id est HI ad BD; sic FK quadratum est ad quadratum BE: sed etiam vt HI ad BD, sic b AIC rectangulum est ad rectangulum ADC, id est IG quadratum ad quadratum DL; igitur vt quadratum FK ad quadratum BE, sic IG quadratum ad quadratum DL, id est AD, id est EB. quare IG, FK, quadrata adeoque & lineæ inter se æquantur.

PROPOSITIO CXCV.

SVper ABC parabolæ axe AB æquali lateri recto, circulus describatur AEB, quem in E secent vtcunque ordinatim positę GF, ad axem parabolæ. iunganturque AE.

Dico AE, GF lineas æquari.

Demonstratio.

QVoniam AB, lateri recto æqualis est, quadratum FG æquatur rectangulo GAB: sed & GAB rectangulo æquale quoque est quadratum AE, quia AGE angulus rectus est, quadrata igitur AE, FG adeoque & lineæ inter se æquantur. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXCVI.

Iisdem positis, iungantur F B.
Dico F B quadratum æquari quadtatis A G, G E, G B simul sumptis.

Demonstratio.

Quadratum F B, æquale est quadratis B G, G F. sed F G quadratum æquale est quadrato A E, id est quadratis A G, G E, quadratum igitur F B æquale est quadratis A G, G E, G B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXCVII.

Iisdem positis: occurrat F G linea diametris D H, C K. in H & K.
Dico H F K rectangulum æquari rectangulo A B G.

Demonstratio.

Quadratum H G æquale est quadrato F G, vnà cum rectangulo H F K: est autem quadrato H G siue B D, æquale [a] quadratum A B, (cùm A B æqualis ponatur lateri recto) igitur & quadratum A B, æquale est quadrato F G vna cũ rectangulo H F K. sed A B quadratum quoque est æquale rectangulis G A B, G B A, id est [b] quadrato G F vnà cum rectangulo G B A, quadratum igitur F G vnà cum rectangulo G B A, æquale est quadrato F G cum rectaogulo H F K: dempto igitur communi quadrato F G, residua rectangula A B G, H F K sunt inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

[a] 9 huius.

[b] Ex 195. huius.

Corollarium.

Ex dictis patet F E M rectangulum æquari quadrato A G. nam F E M rectangulum vnà cum quadrato E G, æquatur quadrato F G, id est A E, id est quadratis A G, G E: dempto igitur communi quadrato G E, manet F E M rectangulum æquale quadrato A G.

PROPOSITIO CXCVIII.

Iisdem positis: occurrat F B, circulo in L.
Dico B F L rectangulo, æquari quadratum A G.

Demonstratio.

B F L rectangulum æquale est rectangulo N F E, id est M E F. sed [c] M E F rectangulo æquale est quadratum A G; igitur & rectangulo B F L æquale est quadratum A G. Quod erat demonstrandum.

[c] Coroll. præcedent.

PRO-

PROPOSITIO CXCIX.

SIt A B axis parabolæ A B C lateri recto, ſumptiſq; A F, B G æqualibus, ponantur ordinatim ad axem rectæ F D, G E.

Dico iunctas B D, B E eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

SVper A B deſcribatur circulus occurrens F D, G E lineis in I & K. quoniam A F, B G lineę æquales ſunt, & F I, G K normales ad axem A B, rectæ F I, G K, item A G, B F inter ſe æquales ſunt: eſt autem quadratum B D æquale [a] quadratis A F, F I, F B; & B E quadratum æquale quadratis B G, G K, G A; quadratum igitur B D æquale eſt quadrato B E, & B D linea æqualis B E. Quod erat demonſtrandum.

a 196. huius.

PROPOSITIO CC.

IIſdem poſitis, ducatur ex H centro circuli A I B, recta H M L, parallela F D; iunganturque B L.

Dico B L lineam breuiſſimam eſſe omnium quæ ex B ad peripheriam parabolæ duci poſſunt.

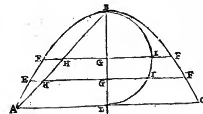
Demonſtratio.

POnatur quęuis alia B D, & ordinatim D F; erit igitur quadratum B L, æquale quadratis A H, H M, H B: & B D quadratum æquale quadratis A F, F I, F B; quia verò A H, H M, H B ſemidiametri ſunt, quadrata illarum minora ſunt quadratis A F, F I, F B (vt facile ex elementis oſtenditur) igitur & quadratum B L minus eſt quadrato B D. & B D linea omnium breuiſſima, quę ex B ad peripheriam duci poſſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCI.

ESto ſuper A B C parabolę axi B D æquali lateri recto deſcriptus ſemicirculus B I D, quem in I ſecent quæcunque ordinatim ad axem poſitę F G E, actaq; per D ordinatim A C, ducatur A B, occurrens E F lineis in H.

Dico rectangulo F H E æquari G I quadratum.



Demonſtratio.

QVoniam axis B D æqualis ponitur lateri recto, & A D ordinatim applicata, rectæ A D, [b] B D adeoque & H G, G B inter ſe æquales ſunt. quia verò E F linea in G diuiſa eſt bifariam & non bifariam in H, rectangulum E H F vnà cum [c] quadrato H G, id eſt B G, ęquale eſt quadrato E G. ſed E G quadratum eſt æquale rectangulo [d] G B D, id

b 9. huius.
c Ex elementis.
d Ex 8. huius.

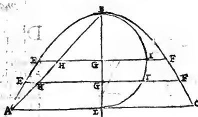
id est quadrato B G vnà cum rectangulo B G D: igitur quadratum B G vnà cum rectangulo B G D æquatur E H F rectangulo vnà quadrato H G, cum id est B G; dempto igitur communi quadrato B G, manet E H F rectangulum æquale rectangulo B G D, id est quadrato G I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCII.

Iisdem positis:

Dico F I, G H, I E lineas proportionales esse.

Demonstratio.

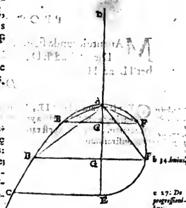


Quoniam E F linea diuisa est bifariam in G & non bifariam in I, rectangulum F I E vnà cum quadrato I G, id est vnà cum rectangulo B G D, æquale est quadrato G F, id est [a] rectangulo G B D id est quadrato B G vnà cum rectangulo B G D id est cum quadrato G I; dempto igitur communi quadrato I G, manet F I E rectangulum æquale quadrato B G id est quadrato H G. proportionales itaque sunt F I, G H, I E. Quod erat demonstrandum. [a] *Ibid.*

PROPOSITIO CCIII.

Esto super A B C parabolæ axe A C æquali lateri recto descriptus semicirculus A F E, sumptaque A D æquali A E, ducatur ordinatim quæuis B F secans axem A E in G, occurrens circulo in F iunganturq; A B, A F.

Dico D G ad D A, rationem habere duplicatam eius quam habet A B ad A F.



Demonstratio.

Quoniam A F quadratum æquale est quadratis F G, A G id est rectangulo D A G rectæ A G, A F, D A continuæ sunt proportionales: sed & A G, A B, G D sunt in [b] continua ratione; igitur cùm A G prima vtrique seriei communis sit, D G ad D A, tertia ad tertiam, in duplicata est ratione [c] A B ad A F, secundæ ad secundam. Quod erat demonstrandum.

[b] 34 *huius.*

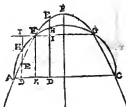
[c] 17: *De progressioni-bus.*

PROPOSITIO CCIV.

PArabolam ABC ſubtendat recta AC normalis ad diametrum ED: ſuper AC verò vt axe deſcribatur ſemiellipſis vel ſemicirculus AF, GC occurrens parabolæ in F & G, vel eandem contingens in B, ducaturque FI parallela ipſi AC, & ID lineæ ponantur æquidiſtantes ED, occurrentes parabolæ in E, ellipſi vel ſemicirculo in H, FI lineæ in I, & ipſi AC in D.

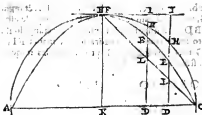
Dico DE, DH, DI lineas eſſe continuè proportionales.

Demonſtratio.



a 47. huius.

DEmittatur ex F diameter FK, ſecans AC lineam in K. vt AKC rectangulum ad rectangulum ADC, ſic FK eſt ad aED: ſed vt AKC rectangulum ad rectangulum ADC, ſic FK quadratum quoque eſt ad quadratum HD, igitur vt FK linea eſt ad lineam ED, ſic quadratum FK eſt ad quadratum HD; recta igitur FK, id eſt ID, ad ED, duplicatam habet rationem eius, quam habet ID ad HD: quare DE, DH, DI lineæ in continua ſunt analogia. Quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO CCV.

MAnente ſecunda figura, ducatur BC, occurrens ID lineis in LL, Dico IE ad ED, duplicatam habere rationem eius quam habet IL ad HD.

Demonſtratio.

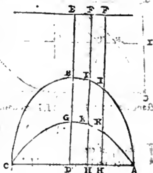
b 67. huius. c 104. huius. d 17. De progreſſionibus.

QVoniam tam ID, bIL, IE lineæ, quàm ID, cHD, ED in continua ſunt analogia, & ID prima vtrique ſeriei eſt communis, ratio IE ad ED, tertiæ ad tertiam, dduplicata eſt rationis IL ad HD, ſecundæ ad ſecundam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCVI.

Sint ABC ellipseos vel circuli diametri coniugatæ AC, BD; ductaque quauis EF parallela AC, secante BD productam in E, fiant ED, BD, GD continuè proportionales, descriptáque per AGC puncta, parabolâ, cuius diameter GD, ponantur lineæ quotcunque FH parallelæ ED, secantes ellipsim in I, parabolam in K, & AC lineam in H.

Dico FH, IH, KH, lineas esse proportionales.



Demonstratio.

VT AHC rectangulum ad rectangulum ADC: sic HK linea ad lineam DG, & IH quadratum ad quadratum BD; igitur HK linea ad lineam DG duplicatã habet rationem eius, quam habet IH linea ad lineam BD. vnde cùm ED, BD, GD positione sint proportionales, & ED, FH primę inter se æquales, sit autem & ratio DG ad KH, tertię ad tertiam; duplicata rationis DB ad HI, secundæ ad secundam, erunt [a] FH, IH, KH, in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

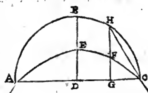
[a] *Ex conuersa 17. De progressionibus.*

PROPOSITIO CCVII.

IN semicirculo ABC decussent sese orthogonaliter in D diametri duæ AC, BD, quarum alterâ BD bifariam in E diuisâ, describatur per A, E, C parabola, cuius axis ED, ductaq; diametro FG, quæ semicirculo occurrat in H; ponatur HC.

Dico FG ad GC duplicatam habere rationem eius, quam habet HG ad HC.

Demonstratio.



QVoniam AC dupla est BD, & illa dupla ED, rectæ AC, BD, ED proportionales sunt, est autem ED ad FG, in duplicata ratione DB ad GH, cùm sit vt ADC rectangulum ad rectangulum AGC, id est BD quadratum ad quadratum HG; rectæ igitur GF, [b] HG, AC in continua sunt analogia, sed & AC, HC, GC [c] lineæ proportionales sunt; igitur FG ad GC, tertia ad tertiam, duplicatam [d] habet rationem eius, quam habet HG ad HC, secunda ad secundam. Quod erat demonstrandum.

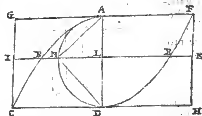
[b] *Ex conuersa 17. de progressionibus.*
[c] *Ex elementis.*
[d] *17. De progressionibus.*

PROPOSITIO CCVIII.

PArabolas æquales ABC, DEF inuersè ad eundem axem AD, qui æqualis sit lateri recto constitutas, contingant in A & D, lineæ GF,

HC: & GF quidem parabolæ DEF, occurrat in F, HC verò parabolæ ABC in C; erectisque ex C & F, diametris quæ FG, CH lineis occurrant in G, & H, ducatur quæuis IK, parallela FG, secans parabolas in B & E, rectas CG, HF in I & K, axem AD in L. dein super AD vt diametro, describatur semicirculus AMD, occurrens IK lineæ in M.

Dico ILM rectangulum æquari rectangulo ELB.



Demonstratio.

Quoniam AD æqualis est lateri recto, lineæ AD, CD, item AM, LB, item MD, LE æquales sunt. rectangulum igitur AMD æquale est rectangulo ELB: sed & AMD rectangulo quoque est æquale rectangulum ADML, id est ILM: rectangula igitur ILM, BLE æqualia sunt.

PROPOSITIO CCIX.

Iisdem positis:

Dico rectangulum ILBM æquari rectangulo BLEK.

Demonstratio.

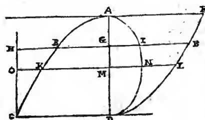
a Per elementa. b Ex elementis.

Quoniam ILM rectangulum æquale est rectangulo ELB, vt IL ad [a] LE, id est LK ad LE, sic LB est ad LM: & permutando vt LK ad LB, sic EL est ad LM: & EK reliquum ad MB, vt LK ad LB, id est IL ad LB: [b] rectangulum igitur ILBM æquale est rectangulo BLEK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCX.

Iisdem positis quæ prius: fiat BGE rectangulo æquale rectangulum HGI: & per A, I, D puncta ellipsis describatur, cuius axis sit AD. ducaturque recta quæuis LK parallela BE, occurrens parabolis in K & L, axi AD in M, ellipsi in N, diametro CH in O.

Dico KML rectangulum æquari rectangulo OMN.



Demonstratio.

c 4. De ellipsi. d Ex 1. sexti. e Ex elementis. f 1. huius.

Quoniam AD axis est ellipseos, & ad illam ordinatim ponuntur IG, MN, vt IG [c] quadratum ad quadratum NM, sic AGD rectangulum est ad rectangulum AMD: rectanguli igitur AGD ad AMD rectangulum, rationem habet duplicatam, IG ad NM, id est rectanguli HGI ad [d] rectangulum OMN: & quia ratio rectanguli AGD, ad AMD rectangulum, composita est ex ratione AG ad [e] AM, id est ex duplicata ratione BG ad KM, & ex GD ad MD, id est ex duplicata ratione GE ad ML, [f] ratio AGD rectanguli ad AMD rectangulum quoque duplicata est eius, quam habet BGE rectangulum ad rectan-

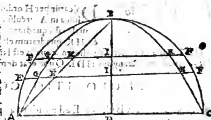
rectangulum KML, igitur vt HGI rectangulum, ad rectangulum OMN, sic BGE rectangulum ad rectangulum KML: & permutando vt HGI rectangulum ad rectangulum BGE, sic OMN rectangulum est ad rectangulum KML; sed HGI, BGE rectangula per hypothesim æqualia sunt: igitur & OMN, KML rectangula inter se æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXI.

Secent ABC semicirculum orthogonaliter diametri duæ AC, BD: descriptâq; per A, B, C, parabolâ, cuius axis BD, ducantur rectæ quotcunque EF, parallelæ AC, occurrentes circulo in E & F, parabolę in G & H, axi verò in I.

Dico EGF rectangulum esse ad rectangulum EGF, vt BID rectangulum ad rectangulum BID.

Demonstratio.



Ponatur AB, secans EF lineas in K. vt BKA rectangulū ad rectangulum BKA, sic EKF [a] rectangulum est ad rectangulum EKF. sed vt BKA rectangulum ad rectangulum BKA, sic GKH [b] rectangulū est ad rectangulum GKH; igitur vt EKF rectangulum est ad rectangulum EKF, sic GKH rectangulum est ad rectangulum GKH. residuum igitur EGF rectangulum, est ad rectangulum EGF, vt EKF rectangulum ad rectangulum EKF, id est rectangulum BKA ad rectangulum BKA, id est rectangulum BID ad rectangulum BID. Quod erat demonstrandum.

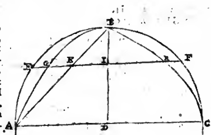
[a] Ex 35. tertij.
[b] 49. huius.

PROPOSITIO CCXII.

Secent ABC semicirculum orthogonaliter diametri duæ AC, BD: descriptaq; per A & B parabolâ cuius axis BD, describatur & altera per B & C, habens axem DC & verticē C ducaturq; linea EF parallela AC occurrens circulo in E & F, parabolis in G, & H, axi BD in I, & AB iunctæ in K.

Dico EI quadratū esse ad quadratū GI, vt IH linea est ad lineam IK.

Demonstratio.



Quoniam tam AD, [c] GI, KI lineæ, quàm DC, FI, HI proportionales sunt, & AD, CD vtriusque seriei primæ æquales, ratio HI ad IK, tertiæ ad tertiam, duplicata est rationis FI ad IG, id est EI ad IG secundæ ad secundam, igitur vt HI linea ad lineam IK, sic EI quadratum ad quadratum GI. Quod erat demonstrandum.

[c] 43. huius.

PROPOSITIO CCXIII.

SEmicirculum ABC, cuius diameter AC, contingat in A linea AD; descriptâque per A parabolâ, cuius axis AC, & contingens AD, sumatur AE æqualis lateri recto; actaque per E ordinatim EF, ducatur in parabola diameter quæcunq; DG occurrens circulo in B & G, parabolæ in H, & FE ordinatim positæ in I.

Dico BDG rectangulum, æquari rectangulo HDI.

Demonstratio.

DVcatur per H ordinatim linea HK: Quoniam AD linea in A circulū contingit, rectangulum BDG æquale est [a] quadrato AD, id est quadrato HK; sed & HK quadratum est æquale [b] rectangulo KAE; id est HDI (quia AE per hypothesim æqualis est lateri recto) rectangulum igitur BDG æquale est rectangulo HDI. Quod erat demonstrandum.

a Ex elementis.
b Ex 8. huius.

PROPOSITIO CCXIV.

PArabolas duas ABC, DBE ad eundem axem BF positas, & contingentes sese interius in B vertice secet in H & A diameter quæcunque GH, iunctisque AB, HB ducatur ordinatim linea IK, secans parabolas in, I K, L, & M, rectas AB, HB, AH in G, N, O, & axem BF in P.

Dico ILK rectangulum æquari rectangulo GPNO.

Demonstratio.

REctangulum GPN æquale est [c] quadrato IP, sed IP quadratum est æquale quadraro LP, id est [d] rectangulo GPO, [e] vnà cum rectangulo ILK rectangulum igitur GPN æquale est rectangulis GPO, ILK: est aurem GPM rectangulum, æquale rectangulis GPO, [f] GPNO, dempto igitur communi rectangulo GPO, manet ILK rectangulum æquale rectangulo GPNO. Quod erat demonstrandum.

c 42. huius.
d Ibid.
e Ex elementis.
f Ex elementis.

PROPOSITIO CCXV.

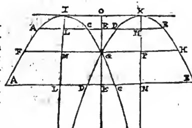
DAtam lineam AB diuisam in C, E, I, D, denuo ita partiri in E vt rectangulum AEC sit ad rectangulum BED sicut quadratum AEC quadratum DB.

Constructio.

REctis AC, BD bisectis in LELN, erige perpendiculares LI, NK æquales inter se, & per puncta A, I, C, & D, K, B, describantur parabolæ NK, sibi mutuo occurrentes in G. Tum ex G duæ GE normales ad AB. Dico factum.

De-

Demonstratio.



Iunge puncta I, K, & E G productã in O, per G duc F M P H parallelam ad K B & I K. Quoniam tam I L, O E, K N, quàm I K, F H sunt parallelę, erit quadratũ I O ad quadratum O K vt quadratum M G ad P G quadratum hoc est vt F G quadratum ad G H quadratum, deinde a A C quadratum est ad quadratum F G vt L I ad M I, hoc est vt N K ad P K, hoc est vt quadratum D B ad quadratum G H. ergo permutatim A C quadratum est ad quadratum D B, vt quadratum F G ad quadratum G H, hoc est (sicut antè ostendi) vt quadratum I O ad quadratum O K. Atqui b rectangulum A E C est ad rectangulũ B E D vt quadratum I O ad quadratum O K, Ergo etiam rectangulum A E C est ad rectangulum B E D vt quadratum A C ad quadratum D B. Factum igitur est quod petebatur.

a 1. huius.

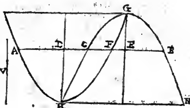
b 191. huius & illius Corollarium.

PROPOSITIO CCXVI.

Datam rectam A B diuisam in C, iterum secare in D, vt rectangulum B D C æquale sit quadrato D A.

Constructio & demonstratio.

Bisecca C B in E, & fiat vt A E ad C E, ita C E ad F E. deinde A F etiam bisecca in D. Dico factum quod petitur.



Ex punctis E ac D erige normales, quarum vna E G sit magnitudinis placitę, altera D H infinita. Deinde per puncta C, G, B, describatur parabola axem habens E G & occurrens ipsi D H in H. Rursum per puncta A H F descripta intelligatur parabola axem habens D H. poterunt autem E G, D H axes esse parabolarum, cùm ambæ ex constructione rectas C B, F A ad angulos rectos bifariam secent. Quoniam igitur ex constructione A E, C E, F E sunt continuæ; colligitur ex 167. huius parabolam A H F transire per G verticem alterius parabolę Ergo per eandem illam propositionem B D, F D, C D sunt continuæ. sed F D, A D æquales sunt ex constructione, ergo B D, D A, C D sunt continuæ; ergo rectangulum B D C æquatur quadrato D A. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO CCXVII.

SInt duæ parabolæ æquales ABC, BCD ad axes parallelos constitutæ EB, CF, per apices mutuos transeuntes; ex B sit ordinatim ducta BF.

Oporteat GH parallelam BF ponere, quę diuidatur à recta BE, secundùm datam rationem I ad K.

Constructio & demonstratio.

Diuidatur BD linea secundùm rationem quadrati I, ad K quadratum, in puncto L: erigatur deinde LH, quæ æquidistet axi CF, occurratq; sectioni in H. & per H ponatur GH parallela BD, secans BE in puncto M. Dico rectam GH esse sectam in M, secundùm rationem I ad K; erigatur ex D parallela ad FE occurrens ipsi GO in P. Quoniam rectangulum HMO æquatur quadrato MN, erunt MH, MN, MO continuæ. Ergo quadratum MH ad quadratum MN, vt MH ad MO, hoc est vt MH ad HP, hoc est vt BL ad LD, hoc est vt quadratum K ad quadratum I; sed quadratum MN æquatur quadrato GM; ergo quadratum MH est ad quadratum GM vt quadratum K ad I. & inuertendo ergo GM est ad rectam MH vt recta I ad K. posuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

a 167. huius.

PA-

PARABOLÆ

PARS QVINTA

Sæpiùs parabolam quadrat.

PROPOSITIO CCXVIII.

SEcent ABC parabolam diametri duæ æquales BD, EF: positisque per D & F, ordinatim lineis AC, GH, iungantur ABC, GEH. Dico ABC, GEH triangula esse inter se æqualia.

Demonstratio.

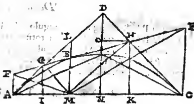
IVnctis, G, C; ponatur AH linea, quam in K & I secent demissæ ex G & C diametri: illas autem secent orthogonaliter in L, M, N, O rectæ AML, HON: & AL quidem occurrat BD lineę in Q, HN verò ipsi EF in S; factisque PQ, SR æqualibus, ipsis BD, EF, iungantur APL, HRN. quoniam igitur æquales sunt diametri BD, EF; & ADC, GFH ad illas ordinatim positæ, iunctęa CG, AH siue IK æquidistant: sed & GK, CI diametri parallelę sunt, parallelogrammum igitur est GCIK, & GK, CI lineæ æquales. est autem vt GK ad IC sic AKH rectangulum ad b rectangulum AIH, rectangula igitur AKH, AIH æqualia sunt; ideoque & c æquales lineę AK, HI, quia verò est vt AK ad KI, sic AM ad ML, & vt HI ad IK, sic HO ad ON, igitur vt AM ad ML, sic HO ad ON: æquales autem sunt lineæ NO, ML (quia AML, HON orthogonales sunt ex constructione, ad GM, GL, æquidistantes, adeoque MO parallelogrammum est) rectæ igitur AM, HO, adeoque totæ AL, HN æquales sunt: sed & PQ, RS per constructionem æquales sunt, triangula igitur APL, NRH id est ABC, GEH æqualia sunt, Quod erat demonstrandum.

a Ex Coroll. 37. huius.
b 47. huius.
c Ex elementis.

Est hęc Archimedis, aliter demonstrata.

PROPOSITIO CCXIX.

PArabolam ABC, contingant duæ quæuis AD, CD conuenientes in D. secetque illas in G & H recta quædam EF, contingens quoque parabolam in B occurrens AE, CF diametris in E & F; demittantur autem ex G & H diametri GI, HK, occurrentes AC in I & K.



Dico rectam IK, dimidium esse AC.

Demon-

Demonstratio.

a 18 huius.

QVoniam AG, RG sectionem contingunt, recta EG ª æqualis est GB: similiter & BH æqualis HF. GH igitur dimidium est totius EF. sed cùm AE, CF, GI, HK æquidistent, erit AC in I & K, diuisa, vt EF diuisa est in G & H; igitur & IK dimidium est AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXX.

IIsdem positis, ponatur per B diameter L M. Dico esse vt G B ad B H, sic L B ad B M.

Demonstratio.

b 94. huius.

QVoniam A L est contingens, L B est ad B M, vt ᵇ AM ad MC, hoc est EB ad BF: sed vt EB ad BF, sic GB est ad BH, igitur vt GB ad BH, sic LB est ad BM. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXI.

EAdem manente figura, ducantur rectæ M G, M H. Dico M D esse parallelogrammum.

Demonstratio.

c Ex elementis. d Ex elementis.

ESt enim vt HB ad BG, sic MB ad BL; per præcedentem & permutando vt HB ad MB, sic GB ad BL: sunt autem anguli ad B lateribus proportionalibus contenti æquales, triangula igitur MBH, GBL ᶜ similia sunt: & MH ᵈ parallela GL: eodem modo si KH producatur donec cum AD conueniat, ostenditur GM, æquidistare ipsi DH: parallelogrammum igitur est DM. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXII.

EAdem manente figura, ducantur AB, BC. Dico triangulum ABC æquale esse parallelogrammo MD.

Demonstratio.

k Ex 119. huius.

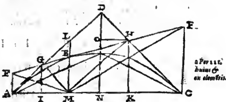
EStenim BEM triangulum triangulo ABM æquale. similiter triangulum BFM æquale BMC triangulo; igitur totum triangulum EMF toti triangulo ABC est æquale. est autem EMF triangulum duplum trianguli GMH, (quia basis EF dupla ᵉ est baseos GH.) igitur MD parallelogrammo æquale est triangulum ABC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXIII.

EAdem manente figura, demittatur ex D diameter DN. Dico lineas GI, HK simul sumptas, æquari rectæ DN:

Demon-

Demonstratio.



DVcatur H O parallela A C, occurrens N D lineæ in O. Quoniam I M, G I, æquidistant lineis D O, H O: est autem & G M [a] æqualis & parallela D H: triangula I G M, D O H, adeóque & latera D O, G I æqualia sunt: est autem H K æqualis O N. Igitur G I, H K simul sumptæ, sunt æquales lineæ D N.

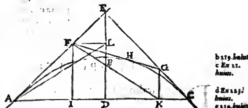
a Per 112. huius & ex elem. 6.

PROPOSITIO CCXXIV.

SIt ad A B C parabolæ axem B D ordinatim ducta A C, actæque per A & C, contingentes conueniant in E. ponatur autem & F G contingens in B, quæ A C, C E lineas secet in F & G, tum rectæ demittantur F I, G K, axi æquidistantes.

Dico trapezium F I K G, æquale esse triangulo A E D.

Demonstratio.



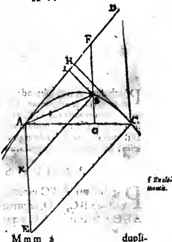
POnatur F L parallela A C, iunganturque L A, F K. Quoniam F L æquidistat A C; & I K est [b] æqualis A D, dimidio [c] scilicet A C; triangula A L D, I F K æqualia sunt. Rursum cùm in triangulis F K G, A E L, tam bases [d] K G, E L, quàm altitudines [e] I K, A D æquales sint, triangula quoque F K G, A E L sunt inter se æqualia: trapezium igitur F I K G æquale est triangulo A E D. Quod erat demonstrandum.

b 219. huius
c Ex 21. huius.
d Ex 213. huius.
e 219. huius

PROPOSITIO CCXXV.

PArabolam A B C subtendat A C quæcunque, ponatur autem per A contingens A D, conueniens cum C D diametro in D: ponatur quoque diameter quæuis B G, occurrens A D lineæ in F. iunganturque A B.

Dico triangulum A F B ad triangulum A D C triplicatam habere rationem lineæ A F ad A D.



Demonstratio.

DEmissa ex A diametro A E, ducantur lineæ B K, C E parallelæ contingenti A D; & ex C, & B rectę C H, B I normales ipsi A D. ratio A F B trianguli ad triangulum A D C composita est ex ratione A F ad A D, & ex [f] ratione I B ad H C: sed vt I B ad H C, sic F B ad C D, id est A K ad A E; igitur ratio trianguli A F B ad A D C triangulum composita est ex ratione A F ad A D, & ex ratione A K ad A E: est autẽ ratio A K ad A E,

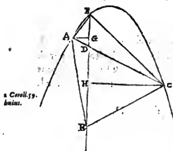
f Ex elementis.

duplicata rationis KB ad EC, id est AF ad AD, (quia FK, DE parallelogramma sunt) igitur triangulum AFB ad ADC, triangulum; triplicatam habet rationem eius, quam habet AF ad AD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXVI.

PArabolæ ABC diametrum BD, secet in D recta quæuis AC, positaque ordinatim CE, iungantur AB, BC.

Dico triangulum ABD ad BCE, triangulum, duplicatam habere rationem lineæ AD ad DC.



Demonstratio.

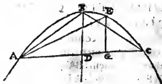
POnantur ex A & C lineæ AG, CH normales ad diametrum BE. iunganturque AE. vt AD ad DC, sic [a] BD est ad BE: sed vt AD est ad DC, sic GD est ad DH, hoc est AG ad CH; igitur vt BD ad BE, sic AG est ad CH. est autem ratio trianguli ABD ad BCE triangulum, composita ex ratione BD ad BE, & AG ad CH; igitur ratio trianguli ABD ad BCE triangulum duplicata est rationis AD ad DC. Quod erat demonstrandum.

a Coroll. 59. huius.

PROPOSITIO CCXXVII.

DAtæ parabolæ terminatæ maximum inscribere triangulum.

Constructio & demonstratio.



PArabolam ABC subtendat quæuis AC, quâ diuisâ bifariam in D, ponatur diameter BD. & iungantur AB, CB. Dico triangulum ABC esse quæsitum. erigatur enim quæuis alia GE, parallela BD diametro: Quoniam ADC rectangulum ad AGC [b] rectangulum eam rationem obtinet, quam DB à GE, igitur recta DB, maior est rectâ GE: ergo etiam triangulum ABC, maius triangulo AEC: igitur maximum est triangulorum ABC. Quod demonstrare oportuit.

b 47. huius.

PROPOSITIO CCXXVIII.

PArabolam ABC intersecent duæ quæuis parallelæ AB, DC: iunctisque BC, AD, segmenro CB triangulum inscribatur maximum AEC, ponaturque EF, æquidistans AB, & iungantur AFD,

Dico

Dico AFD triangulum, illorum esse maximum quæ AFD segmento inscribi possunt. & contra si triangula AFD, BEC fuerint maxima, dico FE æquidistare AB.

Demonstratio.

QVoniam AB, CD, FE æquidistant, recta FI a æquatur KE, adeoque triangula FAI, FID æqualia sunt triangulis, KBE, KEC: si igitur AFD triangulum non sit maximum, sit aliud AGD, maius triangulo AFD; positaque GH parallela AB, iungantur BHC: ostendetur vt priùs, triangulum BHC, æquari triangulo AGD: sed AGD maius est triangulo AFD, id est vt ostendi, BEC, triangulum igitur BHC maius quoque est triangulo BEC, quod est contra hypothesim. non igitur AGD triangulum maximum est, sed AFD. Quod erat primum. 229 huius.

Sint iam AFD, BEC triangula maxima, dico iunctam FE æquidistare AB: sin verò; ponatur FH æquidistans AB, iunganturque BHC: triangulum igitur BHC maximum est eorum quæ BEC segmento inscribi possunt, adeoque & maius BEC triangulo, quod absurdum: non igitur FH æquidistat AB, sed FE. Quod erat demonstrandum.

Quod si AB contingat parabolam, eadem inferri possunt quæ priùs, eademque prorsus est demonstratio.

PROPOSITIO CCXXIX.

ESto ABC parabolæ inscriptum triangulum maximum ABC.

Dico illud maius esse dimidio parabolæ ABC.

Demonstratio.

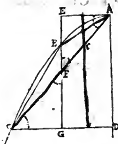
PErficiatur rectangulum ACF; manifestum igitur est EC parallelogrammum maius esse parabolâ ABC: igitur & ABC triangulum, dimidium scilicet parallelogrammi EC maius est dimidio parabolæ ABC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXX.

SIt ad ABC parabolæ diametrum AD, posita ordinatim CD, iunctâq; AC diuisâ in F bifariam, ponatur diameter BF iunganturque AB, CB.

Dico CAD triangulum quadruplum esse trianguli ABC.

 Demon-



Demonſtratio.

AGatur per A contingens A E, occurrens B F lineæ in E, quæ producta ſecet D C in G. quoniam igitur æquidiſtant A E, C D, vt C F ad F A, ſic G F eſt ad F E. ponitur autem A C in F biſariam diuiſa, igitur & E F æqualis eſt F G & E A F triangulum æquale triangulo C F G: ſed E A F triangulo æquale eſt triangulum C B A: igitur & C F G triangulum æquale eſt triangulo A B C, quia [a] E B, B F lineæ æquales ſunt: eſt autem C A D quadruplum trianguli C F G quia A D dupla eſt F G & C D dupla C G, igitur & quadruplum erit trianguli A B C. Quod erat demonſtrandum.

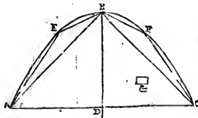
[a] Ex 17. huius.

PROPOSITIO CCXXXI.

ESto A B C parabolæ inſcriptum triangulum maximum A B C: inſcribantur autem & reſiduis ſegmentis triangula maxima: & hoc ſemper fiat.

Dico toti triangulorum ſeriei æqualem eſſe parabolam A B C.

Demonſtratio.



SI enim non ſit æqualis, maior igitur eſt vel minor. ſit primùm parabola maior totâ triangulorum ſerie, & exceſſus ponatur quantitas G. quoniam igitur triangulum A B C maximum eſt illorum, quæ parabolæ inſcribi poſſunt, maius [b] quoque illud erit dimidio parabolę cui inſcriptum eſt. ſimiliter triangula duo A E B, B F C maiora ſunt dimidijs ſegmentorum quibus inſcribuntur, quod cùm ſine termino continuari poſſit, relinquetur ex [c] parabola quantitas, datâ minor, ergo & minor quantitate G, ergo illa exceſſus non eſt, quo parabola triangulorum ſeriem excedit: ergo parabola maior non eſt totâ triangulorum ſerie.

[b] 219. huius.

[c] 1. decimi.

Quod verò neque minor illâ ſit, manifeſtum eſt; cùm triangulorum ſeries, ex hypotheſi ſemper intra parabolam continuetur, ac proinde ſeries illa quantumcunque aucta, plurium triangulorum additione, ſemper tamen pars maneat parabolæ: cùm igitur ſerie triangulorũ, nec maior, nec minor ſit parabola, æqualis vt ſit neceſſe eſt.

PROPOSITIO CCXXXII.

EAdem poſitâ figurâ:

Dico A B C parabolam ad triangulum maximum A B C eam habere proportionem quam quatuor ad tria.

Demonſtratio.

TRiangulum [d] maximum A B C, quadruplum eſt triangulorum maximorũ A E B, B F C quæ reſiduis inſcribuntur ſegmentis; & illa rurſum ſimul ſumpta, quadrupla triangulorum reſiduis ſegmentis inſcriptorum. atque ita ſine termino procedendo, cùm ablata ſemper quadrupla ſint triangulorum, quæ reſiduis inſcribuntur ſegmentis,

[d] Ex 230. huius.

gmentis, tota triangulorum series, id est [a] parabola ABC, [b] est ad triangulũ ABC, primum seriei terminum, vt quatuor ad tria. Quod fuit demonstrandum. a 131. huius. b 87. De progressionibus.

Corollarium primum.

HInc manifestum est triangulum maximum ABC, triplum esse residuorum segmentorum AEB, BFC. cùm enim tota parabola, ad triangulum maximum inscriptum, sit vt quatuor ad tria; patet ipsum triangulum, tres quartas continere parabolæ; adeoque & residuorum esse triplum.

Corollarium secundum.

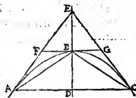
SEquitur secundò segmenta AEB, BFC esse inter se æqualia: triangula enim ABD, BDC singula singulorum tripla sunt, & inter se æqualia.

PROPOSITIO CCXXXIII.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata AC, actisque per A & C contingentibus, quæ cum diametro BD conueniant in E, ponatur per B contingens, quæ AE, CE lineis occurrat in F & G.

Dico FEG triangulum, maius esse dimidio figuræ concauę AECBA.

Demonstratio.



IVngantur ABC. quoniam AE parabolam contingit, & AC ordinatim ponitur ad BD, [c] ED, AE, CE, in B, F, G punctis bissectæ sunt: quare EBF, ABF triangula, item EBF, EBG, ac proinde tota EFG, ABE æqualia sunt. sed ABE triangulum maius est dimidio figurę mixtilineæ ABCEA, cùm AB latus cadat intra parabolam conuexam, triangulum igitur FEG illo maius quoque est. Quod erat demonstrandum. c Ex 17. huius.

Corollarium primum.

EX antè demonstratis facile deducitur triangulum FEG, maximum esse illorum, quæ intra triangulum AEC ab alia quauis contingente auferri possunt.

Corollarium secundum.

SEquitur quoque, ABC triangulum, duplum esse trianguli FEG; est enim ED [d] dupla EB. & AC dupla FG. d ibid.

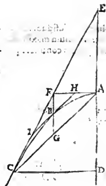
PROPOSITIO CCXXXIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD contingat in C recta CE conueniens cum diametro in E, actaque per A contingente, quæ CE lineæ occurrat in F, demittatur ex F diameter FB, & per B ponatur contingens, quæ AF, EC lineis occurrat in H & I.

Dico triangulum AEF, quadruplum esse trianguli HFI.

Demon-

Demonstratio.



a 17. huius. b 19. huius. c 15. huius. d Ex elementis.

POnatur recta AC, occurrens FB productæ in G. quoniam EC contingens est, & CD ordinatim applicata ad diametrum AD, [a] rectæ EA, AD, adeoque & EF, FC æquales sunt: est autem vt EF ad FC, sic AG ad GC, (cùm FG, ED diametri [b] æquidistent;) linea igitur AC in G bissecta est, adeoque IH [c] contingenti parallela, vnde FG, FA lineæ in B & H, bifariam quoque sunt diuisæ, & AFC triangulum [d] quadruplum trianguli FHI: est autem FAE, æquale triangulo FAC, quia FE, CE lineæ æquales sunt; igitur & FAE, quadruplum est trianguli FHI. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXXV.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata AC, positisq; per A & C, contingentibus quæ diametro BD occurrant in E, ducatur per B, contingens, quæ AE, CE lineas secet in F & G, diametri deinde ponantur FH, GI; & per H & I, contingentes LK, MN: atque idem sine termino continuetur.

Dico figuram mixtilineam AEC, BA, æqualem esse toti triangulorum seriei.

Demonstratio.

e 233. huius. f 1. decimi.

SI enim non sit æqualis; maior igitur vel minor vt sit necesse est, sit primum figura mixtilinea maior triangulorum serie, excessu quantitatis O. triangulum FEG maius [e] est dimidio figuræ concauę AECBA; similiter triangula LFK, MGN maiora sunt dimidijs mixtilineorum quibus inscribuntur, & id semper fit; igitur per ablationem illam continuatam, relinquetur ex mixtilineo [f] AECBA quantitas datâ minor, ergo & minor quantitate O, ergo O excessus non est, quo mixtilineum AECBA excedit triangulorum seriem: igitur nec illud serie totâ maius est. similiter ostendetur AECBA figuram minorem quoque non esse totâ triangulorum serie. æqualis igitur vt sit necesse est.

PROPOSITIO CCXXXVI.

EAdem manente figura:

Dico parabolam concauam AECB ad triangulum FEG, eam proportionem habere quam quatuor ad tria.

Demon-

Demonstratio.

QVoniam EFG triangulum quadruplum est triangulorum LFK, MGN, & illa rursum simul sumpta, quadrupla illorum quæ residuis figuris mixtilineis inscribuntur, & ita sine termino procedendo, ablata semper quadrupla sunt triangulorum residuis figuris inscriptorum, erit per 87. libri nostri de progressionibus tota triangulorum series id est concauum AECBA, ad FEG triangulum, vt quatuor ad tria. Quod erat demonstrandum. a 234. huius.

Corollarium.

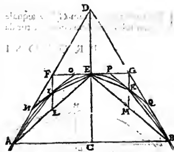
HInc patet FEG triangulum triplum esse residuorum AHBFA, CIBGC. est enim FEG triangulum ad figuram concauam ABCEA, vt tria ad quatuor: quare triangulum EFG tres quartas continet figuræ ABCEA, adeoque residuorum triplum est.

PROPOSITIO CCXXXVII.

IIsdem positis:

Dico AEB parabolam conuexam duplam esse figuræ concauæ AEBDA.

Demonstratio.



INscribantur tam concauę quàm conuexæ parabolæ, triangula maxima AEB, FDG. quoniam igitur AEB parabola est ad triangulum AEB vt b quatuor ad tria; eandem autem habeat proportionem figura concaua c AEBD, ad triangulum FDG, erit vt triangulum AEB ad parabolam conuexam, sic FDG triangulum ad figuram mixtilineam AEBD: & permutando vt AEB triangulum ad triangulum FDG, sic parabola AEB ad figuram concauam: sed AEB triangulum d duplum est trianguli FDG: igitur & parabola AEB dupla est figuræ AEBD. Quod erat demonstrandum. b 231. huius. c 236. huius. d Coroll. 233. huius.

PROPOSITIO CCXXXVIII.

IDem aliter demonstrare.

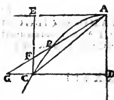
Demonstratio.

INscribantur segmentis residuis tam parabolæ conuexæ, quàm concauæ, triangula maxima AIE, EKB, NFO, PGQ. Quoniam triangulum AEB, e ablatum ex parabola duplum est trianguli FDG, ablati ex figura ADBEA; & iterum triangula AIE, EKB ablata ex residuo parabolę dupla triangulorum NFO, PGQ, ablatorum ex residuo figuræ ADBEA, insuper ostensum sit ablationem illam in proportione dupla, siue termino in vtraque figura posse f continuari; siue totam triangulorum maximorum seriem parabolę AEB inscriptorum, illi æquari; & figuram mixtilineam AEBDA æquari toti g triangulorum maximorum seriei figuræ illi inscriptorum, parabola AEB, h dupla est figuræ mixtilineæ ADBEA. Quod erat demonstrandum. e Ibid. f 231. huius. g 235. huius. h 85. De progressionibus.

PROPOSITIO CCXXXIX.

DAto segmento parabolico triangulum æquale exhibere.

Constructio & demonstratio.



SIt ABC segmentum datum: ductâque diametro AD ponatur ordinatim CD; agaturque per A ipsi CD, æquidistans AE, occurrens erectæ ex C diametro in E: tum EC diuisa in F vt FC quarta pars sit EC, ducatur ex A per F, linea AG, occurrens CD in G. dico GAC triangulum æquale esse dato segmento ABC. Quoniam AE, CG lineæ æquidistant, vt CF ad FE, sic GC est ad EA: sed CF tertia pars est FE; igitur & GC, tertia pars est EA hoc est CD. Quare & GAC triangulum tertia pars est trianguli CAD: est autem ABC segmentum æquale tertiæ ᵃ parti trianguli CAD. igitur & GAC triangulo est æquale: dato igitur segmento parabolico æquale triangulum exhibuimus; quod erat imperatum.

a Ex Coroll. 231. huius.

Corollarium.

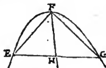
HInc patet triangulum GAD æquale esse parabolæ ABCD. adeoque eadem praxi solui problema quo petitur datæ parabolæ, triangulum æquale exhiberi.

PROPOSITIO CCXL.

PArabolæ terminatæ eam inter se sortiuntur rationem quam triangula maxima illis inscripta.



Demonstratio.



SInt ABC, EFG parabolis terminatis triangula maxima inscripta ABC, EFG. dico parabolas illam inter se habere rationem quā triangula maxima. Triangulum ᵇABC est ad ABC, parabolam vt tria ad quatuor: triangulū quoque EFG est ad parabolam EFG, vt tria ad quatuor; igitur vt ABC triangulum ad parabolam ABC, sic EFG triangulum ad parabolam EFG, & permutando vt ABC triangulum ad triangulum EFG, sic ABC parabola ad parabolam EFG. Quod erat demonstrandum.

b 232. huius.

Corollarium.

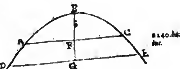
HInc si duæ parabolæ habeant eandem vel æqualem subtensam, erunt illæ inter se vt altitudines; & si altitudines fuerint æquales, erunt inter se vt bases.

PRO-

PROPOSITIO CCXLI.

PArabolam A B C secent duæ quæuis parallelæ A C, D E. Dico A B C parabolam ad D B E parabolam esse in triplicata ratione A C ad D E.

Demonstratio.



POnatur diameter B F ad quam ordinatim positæ sint A C, D E. Parabola A B C ad D B E parabolam eam habet rationem, quam [a] triangulum sub A C & B F ad triangulum sub D E, & B G: sed ratio trianguli sub A C & B F, ad triangulũ sub D E & B G, est triplicata rationis A C ad D E, quia composita ex ratione A C ad D E, & B F ad B G; hoc est ex duplicata ratione A C ad D E; igitur A B C parabola est ad parabolam D B E in triplicata ratione A C ad D E. Quod fuit demonstrandum.

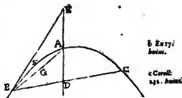
a 140. huius.

PROPOSITIO CCXLII.

PArabolam A B C contingat in B linea E B, conueniens cum diametro quacunque A E in E, iunganturq; A B.

Dico figuram concauam B F A E B, duplam esse conuexæ B F A G B.

Demonstratio.



POnatur ex B, ordinatim A C ad diametrum A D. Quoniam B E est cõtingens, erũt A D, A E lineæ [b] æquales, adeoque A B D, A B E triangula æqualia: est autem A B D triangulum triplum [c] segmenti B F A G B, igitur & triangulũ A B E triplum est segmenti B F A G B. residua igitur figura concaua B F A E B dupla est conuexæ B F A G B. Quod erat demonstrandum.

b Ex 171 huius.

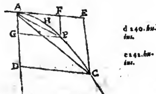
c Coroll. 141. huius.

PROPOSITIO CCXLIII.

SInt ad A B C parabolæ diametrum A D, ordinatim positæ D C, G B: iunctisq; A B, A C ponatur per A æquidistans ipsi D C, occurrens erectis ex B & C, diametris in F & E.

Dico esse vt A B F triangulum ad triangulum A C E siue A B G ad A C D triangulum, sic A H B F A figurã concauã ad figuram A H C E A.

Demonstratio.



VT A B G triangulum ad triangulum A C D, sic A H B segmentum [d] ad segmentum A B C, sed vt A H B ad A B C segmentum, sic A H B F figura ad figuram A B C E, cùm [e] A H B F duplum sit segmenti A H B, & A B C E duplum A B C; igitur vt triangulum A B G ad A C D triangulum, sic A H B F figura ad figuram A B C E. Quod erat demonstrandum.

d 140. huius.

e 141. huius.

Co-

Corollarium.

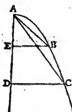
Ademposita figura sequitur esse vt G F parallelogrammum ad parallelogrammum D E, sic A G B parabolam ad parabolam A D C: item conoexum A H B F ad conuexum A B C E.

PROPOSITIO CCXLIV.

Parabolam A B C cuius diameter A D secent vtcunque lineæ A B, A C: ducanturque ordinatim B E, C D.

Dico spatium parabolicum E B C D, quadruplum esse spatij C A B C lineis A B, A C & parabolica B C contenti.

Demonstratio.

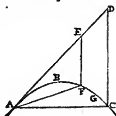


a Ex Coroll. 232. huius.

Quoniam parabola D A B C quadrupla est a segmenti A B C & E A B parabola quadrupla segmēti A B, parabola D A B C est ad segmentum A B C vt E A B parabola ad segmentum A B; igitur cum parabola D A B C ad A B C, totum ad totum sit vt E A B ablatum ad ablatum A B, erit reliquum E B C D, ad reliquum A C B A, vt D A B C totum ad totum A B C: quare E B C D figura, quadrupla est figuræ lineis A C, A B & parabolica B C contentæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLV.

Contingat A B C parabolam linea quæcunque A D conueniens cum diametris quibusuis D C, F E in D & E. iunganturque A F, A C.



Dico concauum E D C G F duplum esse partis A F G C, lineis A F, A C contentæ.

Demonstratio.

b 242. huius.

Concauum A B C D A b duplum est parabolæ A B C: & concauum A B F E A duplum est segmenti A B F; igitur residuum E D C G F duplum est residui A F G C A. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLVI.

Parabolam A B C subtendat linea A C, qua diuisa in D & E, vt A D, A E, A C continuè proportionales sint, erigantur diametri D B, E I, C F. & per B & I, puncta ex A rectæ ponantur A G, A F secantes C F diametrum in F & G.

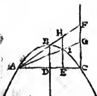
Dico E I G C ad spatium quadrilaterum B I triplicatam habere rationem A C ad A E.

Demonstratio.

c 1. De progressionibus.

Quoniam A D, A E, A C ponuntur continuè proportionales, vt C A ad E A, sic c C E ad E D, sed vt C E ad E D, sic C G est ad G F; igitur vt C A ad E A, sic C G ad G F: vnde triangulum C A G ad G A F triangulum, est vt C E ad E D, id est vt C A ad E A, id est F A ad H A, id est F G ad H I: est autem G A F triangulum

triangulum ad triangulū HAI in duplicata ratione FG ad HI, igitur cùm ratio trianguli CAG ad HAI componatur ex ratione trianguli CAG ad GAF, & ex GAF ad HAI, patet CAG triangulum esse ad triangulum HAI in triplicata ratione FG ad HI: quia verò ratio quadrilateri EG ad BI quadrilaterum, componitur ex ratione EG ad GH quadrilaterum, (id est ex ratione trianguli CAG ad triangulum GAF,) & ex ratione GH ad IB, quadrilaterum, (id est ex ratione trianguli GAF ad HAI triangulum, cùm FA, HA, BA proportionales sint) erit EG quadrilaterum ad quadrilaterum BI vt CAG triangulum ad triangulum HAI; igitur & EG quadrilaterum ad BI quadrilaterum rationem habet triplicatam AC ad AE. Quod erat demonstrandum.

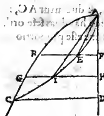


PROPOSITIO CCXLVII.

Esto ABC parabolæ diameter AD. positáque ad illam ordinatim CD, describatur per A & C, parabola AEC, quam in A contingat AD, ponanturq́ue ordinatim quæuis FB, HG secantes AEC parabolam in E & I.

Dico figuram concauam AFEA, ad figuram concauam AHIA, duplicatam habere rationem parabolæ BAF ad parabolam GAH.

Demonstratio.



Iungantur AE, AI. Figura mixtilinea AFEA ad figuram AHIA eam habet rationem quam AEF triangulum [a] ad triangulum AIH. ratio autem trianguli AEF ad triangulum AIH composita est ex ratione AF ad AH, hoc est duplicata rationis FB ad HG, & ex ratione FE ad IH, hoc est duplicata rationis AF ad AH, id est quadruplicata rationis FB ad HG: igitur AFEA figura ad figuram AHIA sextuplicatam habet rationem lineæ FB ad HG. sed BAF [b] parabola ad GAH parabolam triplicatam habet rationem FB lineæ ad lineam HG: igitur figura AFEA ad figuram AHIA, duplicatam habet rationem parabolæ BAF ad parabolam GAH. Quod erat demonstrandum.

a 141. huius.

b 140. huius.

Corollarium.

Hinc patet concauum AFE ad concauum AHI, triplicatam habere rationem AF ad AH; nam AEF triangulum ad triangulum AIH rationem habet compositam ex AF ad AH, & EF ad IH, id est ex duplicata rationis AF ad AH.

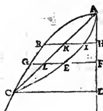
PROPOSITIO CCXLVIII.

Iisdem positis sint AH, AF, AD proportionales, iunganturq́ue AC. Dico mistilineum IF ad ED mistilineum, rationem habere sextuplicatam, cuius ratio trapezij KF ad LD, trapezium est quadruplicata.

 Demon-

Demonstratio.

a Ex 143. huius.



QVoniam AH, AF, AD lineæ proportionales sunt, rectæ quoque IH, EF, CD, adeoque figuræ [a] concauæ AHIA, AFEA, ADCA in continua sunt analogia. igitur vt AHIA figura ad figuram AFEA, sic IF mistilineum est ad mistilineum ED; sed AHIA figura ad figuram AFEA, sextuplicatam habet rationem BH ad GF, igitur & IF mistilineum ad mistilineum ED sextuplicatam habet rationem BH ad GF. Rursum, quia AH, AF, AD proportionales sunt, triangula quoque AKH, ALF, ACD in continua sunt analogia. adeoque vt AKH triangulum est ad triangulum ALF, sic KF trapezium est ad trapezium LD: sed AKH triangulum ad triangulum ALF, duplicatam habet rationem lineæ AH ad AF, hoc est quadruplicatam rationis HB ad FG: igitur & KF trapezium ad trapezium LD quadruplicatam habet rationem lineæ HB ad FG, cuius IF mistilineum ad mistilineum ED habet sextuplicatam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLIX.

IN parabola ACB sit AB pars axeos æqualis lateri recto, ductaq; AF ad axem normali, ponatur quæuis FC parallela AB, secans parabolam in C, & ducantur AC, BF.

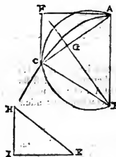
Dico has duas sese orthogonaliter intersecare & CG, FG, GA, GB continuè esse proportionales.

Demonstratio.

b Ex 8. huius.

c 6. sexti.

d Ex 13. sexti.



CVm BA æqualis sit lateri recto, erit [b] rectangulum BAFC æquale quadrato FA. Igitur sunt tres in continua analogia FC, FA, AB: ergo cùm anguli CFA, BAF æquales sint, similia sunt triangula [c] CFA, FAB. vnde angulus FAC æqualis angulo ABF. est autẽ angulus FAC vnà cum CAB, recto æqualis; igitur etiam angulus FBA vnà cum angulo CAB recto est æqualis, & consequenter angulus AGB rectus est. vlterius cùm tam angulus AFC quàm AGF rectus est, tres CG, GF, GA [d] proportionales sunt: quia verò anguli AGB, FAB recti sunt, lineæ quoque FG, GA, GB proportionales sunt; eandem igitur continuant rationem CG, FG, GA, GB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCL.

INter duas datas, duas medias exhibere organicè.

Constructio & demonstratio.

SInt duæ datæ HI, IK inter quas duas medias oporteat exhibere. constituantur hæ ad angulos rectos & conficiant triangulum orthogonum HIK. deinde describatur parabola ACB cuius latus rectum sit AB pars axeos, super quo segmentum circuli constituatur capiens angulum ACB æqualem IHK, occurrens parabolę in C & ducantur CF, FA ad angulos rectos, ita vt CF sit æquidistans axi & iungantur AC, BF. Dico factum quod requiritur. nam ostensum est angulos ad G rectos

esse

esse, estque angulus BCA seu BCH æqualis angulo K. ergo BCG triangulum simile triangulo HIK; igitur cum FG, GA mediæ [a] sint inter CG, GB, etiam inter HI, IK inventæ erunt mediæ.

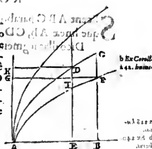
a Ex 9 huius.

PROPOSITIO CCLI.

Habeant duæ parabolæ ABC, AFB communem axem; sitque AB linea lateri recto æqualis parabolæ ABC, ductisque ordinatim BFC, ED, sit ADE parabola æqualis AFB.

Dico AE, ED, medias esse inter FB, BA.

Demonstratio.



Quoniam AB ex hypothesi est latus rectum parabolæ ACB, rectangulum BAE æquatur [a] quadrato ED. igitur vt BA ad ED, sic ED ad AE. Deinde quia parabolæ æquales sunt, æquantur etiam [b] rectangula AED, ABF. Ergo vt BA ad ED, sic reciprocè AE ad BF. sed cum ostendi vt BA est ED, sic ED esse ad AE, ergo, vt ED ad AE, sic AE ad BF. liquet igitur quatuor rectas BA, ED, AE, BF esse in continua analogia: & proinde inter BA, BF, medias esse ED, AE. Quod erat demonstrandum.

b Ex Coroll. 141. huius.

PROPOSITIO CCLII.

Inter duas datas, duas medias exhibere.

Constructio & demonstratio.

Datæ sint AB, BF, quibus ad angulum rectum dispositis describe parabolam AC circa axem AB, cuius rectum latus æquale sit ipsi AB. occurrat deinde BF, parabola AC in C, & circa communem axem AB aliam describe parabolam per A & F. Demum [c] ducatur ordinatim DE, faciens segmenta parabolica ADE, AFB æqualia. Dico DE, EA esse medias inter AB, BF: demonstratio ex præcedenti manifesta est.

c Ex 141. huius.

PA-

PARABOLÆ

PARS SEXTA

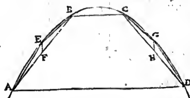
Segmenta primùm & parabolas inter se confert; dein figuras maximas sectioni inscribit.

PROPOSITIO CCLIII.

SEcent ABC parabolam parallelæ quæuis duæ AD, BC, ducanturque lineæ AB, CD.

Dico illas segmenta auferre æqualia.

Demonstratio.



SEgmentis AB, CD triangula inscribantur maxima AEB, CGD; quæ cùm BC, AD, [a] æquidistent, inter se æqualia sunt: vnde & [b] segmenta æquantur. Quod erat demonstrandum.

a 118. huius.
b Ex 140. huius.

PROPOSITIO CCLIV.

EAdem manēte figurâ, oportet ex dato in peripheria puncto C, rectam ducere, quæ segmentum auferat æquale dato AB.

Constructio & demonstratio.

IVnctâ BC, ducatur AD parallela BC, iunganturque CD: manifestum est per præcedentem DC ex dato puncto eductam, segmentum auferre æquale dato AB. Quod erat requisitum.

PROPOSITIO CCLV.

DAto segmento ABC & diametro GH oportet ad illam ordinatim applicare lineam, quæ segmentum auferat dato æquale.

Constructio & demonstratio.

DIuisa AB bifariam in F, erigatur diameter FE, cui fiat æqualis GH: & per H ordinatim ponatur CD, dico factum esse quod petitur: iungantur enim AEB, CGD. quoniam EF, GH diametri æquales sunt, [c] triangula quoque AEB, CGD æqualia sunt: quæ cùm [d] maxima sint illorum quę segmentis AB, CD inscribi possunt, [e] segmenta quoque AB, CD æqualia sunt: applicuimus igitur ad datam diametrum, &c. Quod erat faciendum.

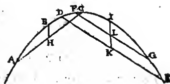
c 118. huius.
d 118. huius.
e 140. huius.

PRO-

PROPOSITIO CCLVI.

Data parabola ABC, & in illa segmento AG, oportet cuicunq; ED æquidistantem ducere, quæ segmentum auferat dato æquale.

Constructio & demonstratio.

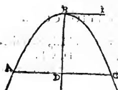


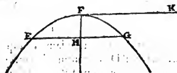
Diuisis AC, DE bifariam in H & K, erigantur diametri HB, IK: factâq; IL æquali HB, ponatur per L, FG æquidistans DE, patet per præcedentem FIG segmentum dato AC, æquale esse: igitur lineam duximus æquidistantē DE, quæ segmentum FIG auferat æquale dato. Quod erat postulatum.

PROPOSITIO CCLVII.

Sit ad ABC parabolæ axem BD cuius latus rectum BI, ordinatim posita AC: sit autem & EFG parabola, cuius axis FH, & latus rectum FK; oportet ex EFG parabola segmentum auferre, quod ad segmentum ABC, rationem habeat quam BI ad FK.

Constructio & demonstratio.





Fiat vt IB ad FK, sic FH ad BD, & per H ordinatim ponatur EG. dico factum esse quod petitur: cùm enim sit vt IB ad FK, sic FH ad BD, rectangulum super IB BD idest [a] quadratum AD, æquale est rectangulo super FK, FH id est quadrato EH. vnde AC, EG inter se æquales: sunt triangulum igitur maximum segmenti EFG, ad triangulum maximum segmenti ABC est vt FH ad BD, id est per constructionem BI ad FK; ergo & segmentum [b] EFG ad segmentum ABC, vt IB ad FK; abstulimus igitur ex EFG parabola segmentum EFG, quod ad segmentum ABC eam rationem continet quam latus rectum BI, ad latus rectum FK. Quod exhibendum erat.

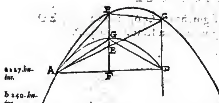
[a] Ex 8. huius.

[b] Ex 140. huius.

PROPOSITIO CCLVIII.

Sit ad ABC parabolæ diametrum BE ordinatim posita AC: ductaque AD normali, ad diametrum ex C demissam, fiant BE, FG lineæ æquales; & per AGD, parabola describatur, cuius axis GF.

Dico AGD segmentum æquari segmento ABC.



Demonstratio.

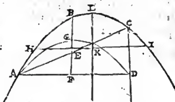
QVoniam BE, GF lineæ æquales sunt, triangula BCE, GDF, item BAE, GAF, ac propterea ABC, AGD triangula inter se æqualia sunt, sed quoque a maxima sunt illorũ quæ segmentis ABC, AGD, inscribi possunt; segmenta igitur ABC, b AGD æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

a 127. huius.
b 140. huius.

PROPOSITIO CCLIX.

POnatur LK axis parabolæ ABC, æqualis diametro BE, & ordinatim per K linea HI.

Dico illam rectæ AD æqualem existere.



Demonstratio.

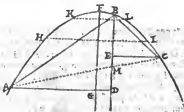
EST enim per præcedent. AGD parabola æqualis parabolę ABC id est c HLI: igitur & triangula maxima AGD, d HLI sunt æqualia: sunt autem ex hypothesi illorum altitudines LK, FG æquales, igitur & bases AD, HI inter se æquales sunt. Quod fuit demonstrandum.

c Ex 118. & 140. huius.
d Ex conuersa 140. huius.

PROPOSITIO CCLX.

SEcent ABC parabolam lineæ quæuis AB, BC: demissaq; ex B diametro BD, ponantur ad illam ex A & C normales AD, CE.

Dico segmentum AB esse ad segmentum BC in triplicata ratione lineæ AD ad CE.



Demonstratio.

INuento axe FG applicentur ad illum ordinatim lineæ HI, KL: & HI quidem sit æqualis AD, KL verò rectæ CE: erit igitur segmento AB e æquale segmentum HFI, & segmento BC æquale segmentum KFL. sed HFI segmentum ad segmentum KFL, f triplicatam habet rationem lineæ HI ad lineam KL; igitur & segmentum AB ad segmentum BC, triplicatam habet rationem lineę HI ad KL, lineam, id est ex hypothesi AD ad EC. Quod erat demonstrandum.

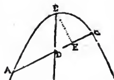
e Ex conuersa 158. huius.
f 241. huius.

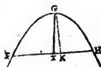
Corollarium.

HInc sequitur iunctâ AC, quę occurrat BD in M, AB segmentum ad segmentum BC triplicatam habere rationem AM ad MC. patet, cùm sit vt AD ad CE, sic AM ad MC. ergo, &c.

PRO-

Demonstratio.





CVm enim segmenta ABC, FGH ponantur æqualia, triangula quoque illorum [a] maxima inter se æqualia sunt, vnde vt BE ad GK, sic [b] FH ad AC. Quod erat demonstrandum.

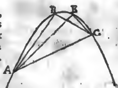
a Ex conuersa 140. huius.
b Ex elementis.

PROPOSITIO CCLXV.

PArabolæ ABC segmento ABC, triangula duo inscripta sint, & ABC quidem illorum maximum, quæ segmento inscribi possunt, alterum verò AEC quodcunque.

Dico segmenta AE, EC simul sumpta, maiora esse segmentis AB, BC simul sumptis.

Demonstratio.



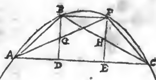
CVm triangulum AEC minus sit triangulo ABC, residua AE, EC segmenta, maiora sunt residuis segmentis AB, BC; eodem etenim excessu superat triangulum ABC triangulum AEC, quo segmenta super lineis AE, EC excedũt segmenta super AB, BC.

PROPOSITIO CCLXVI.

PArabolam ABC subtendat recta AC, qua diuisa in quotuis partes æquales, in punctis D, E: erigantur diametri DB, EF, iunganturque AB, BF, FC.

Dico segmenta AB, BF, FC æqualia esse.

Demonstratio.



POnantur AF, BC & AF quidem occurrat BD in G; BC verò rectæ FE in H: vt AD ad DE, sic AG ad GF, sed AD, DE per hypothesim æquales sunt; igitur & AG, GF quoque inter se æquantur, quare ABC triangulum [c] maximum est eorum quę ABF segmento inscribi possunt, & AB, BF segmenta [d] sunt æqualia. similiter æqualia ostenduntur segmenta BF, FC: segmenta igitur AB, BF, FC, æqualia sunt.

c 227. huius.
d Coroll. 1. propos. 132. huius.

PROPOSITIO CCLXVII.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE; quâ diuisâ in partes æquales, punctis E, F, G, demittantur diametri EC, FH, GB, occurrentes parabolæ in B, H, C; iungantúrque AB, BH, HC: Dico segmenta AB, BH, HC esse inter se æqualia.

Demonstratio.

DVcantur AH, BC; & AH quidem occurrat GB lineæ productæ in I; BC verò ipsi FH in K. Quoniam IG, FH æquidistant & AG, GF ponuntur æquales, rectæ AI, IH inter se æquales sunt: quare AH ordinatim posita est ad diametrum IB, & ABH triangulum maximum [a] est eorum quæ segmento ABH inscribi possunt: adeoque & segmenta [b] AB, BH æqualia sunt. eodem modo ostenduntur segmenta BH, HC inter se æquari; segmenta igitur AB, BH, HC æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

a 227. huius.

b Ex Coroll. 232. huius.

Corollarium.

PRopositio quoque vera est si ex A ducta secans AN diuidatur in partes æquales punctis L, M: ex quibus in parabolam rectæ emittantur LB, MH, NC parallelę diametro AD. demonstratio patet ex præcedenti.

PROPOSITIO CCLXVIII.

SIt ad ABC parabolę axem BD ordinatim posita recta EF; actaq; per B contingente BH, sumatur in illa, portio HI æqualis EF: & ex H & I, diametri demittantur HA, IK, occurrentes parabolæ in A & K, iunganturque AK.

Dico segmentum AK, æquari segmento EBF.

Demonstratio.

DIuisâ AK bifariam in N ducatur diameter NM. Quoniam AL, EF lineæ ponuntur æquales & MN ad BG in duplicata est ratione [c] AL ad EF, rectæ MN, BG inter se ęquales sunt; sed ratio segmenti AK ad segmentum EBF composita est [d] ex ratione MN ad BG, & AL ad EF; segmentum igitur AK æquale est segmento EBF. Quod erat demonstrandum.

c 262. huius.

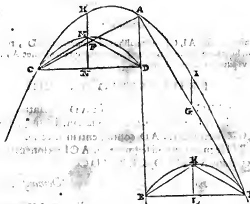
d 261. huius.

PROPOSITIO CCLXI.

PArabolam ABC, secent duæ quæuis lineæ AB, AC: demissâque ex A diametro AD, ponantur ad illam ex B & C normales BE, CD: dein AB, AC lineis bifariam diuisis in F & G, erigantur diametri FH, GI.

Dico segmentum AHC ad segmentum AIB, rationem habere compositam, ex ratione FH ad IG, & CD ad BE.

Demonstratio.



DIuisis EB, CD lineis bifariam in L & N, erigantur normales LK, NM: & LK quidem æqualis IG: NM verò æqualis HF: & per E, K, B, item C, M, D puncta, parabolæ describantur, quarum axes sint LK, MN: iunganturque EKB, CMD. Quoniam LK æqualis est IG, segmenta EKB, [a] AIB æqualia sunt: eadē de causa æqualia sunt segmenta AHC, DMC; segmentum igitur AHC est ad segmentum AIB vt DMC segmentum, est ad segmentum EKB. sed DMC segmentum est ad segmentum EKB, [b] vt DMC triangulum ad triangulum EKB; igitur & AHC segmentum, ad segmentum AIB, est vt DMC triangulum ad triangulum EKB, & inuertendo vt triangulum DMC ad triangulum EKB, sic AHC segmentum est ad segmentum AIB: sed ratio trianguli DMC ad triangulum EKB est composita ex ratione NM, ad LK, id est FH ad IG, & ex DC ad EB; ratio igitur segmenti AHC ad segmentum AIB, composita est ex ratione HF ad IG, & DC ad EB. Quod erat demonstrandum.

[a] 228. & 240. huius.

[b] 240. huius.

PROPOSITIO CCLXII.

AVferant AB, BC lineæ segmenta quæcunque, demissâq; ex B diametro BD, ponatur AC occurrens BD lineæ in D: dein AB, BC diuisis bifariam in F & H, ponantur per F & H, diametri EF, GH.

 Dico

Demonstratio.

a 17. huius.
b 19. huius.
c 15. huius.
d Ex elementis.

POnatur recta AC, occurrens FB productæ in G. quoniam EC contingens est, & CD ordinatim applicata ad diametrum AD, [a] rectæ EA, AD, adeoque & EF, FC æquales sunt: est autem vt EF ad FC, sic AG ad GC, (cùm FG, ED diametri [b] æquidistent;) linea igitur AC in G bisecta est, adeoque IH [c] contingenti parallela. vnde FG, FA lineæ in B & H, bifariam quoque sunt diuisæ, & AFC triangulum [d] quadruplum trianguli FHI: est autem FAE, æquale triangulo FAC, quia FE, CE lineæ æquales sunt, igitur & FAE, quadruplum est trianguli FHI. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXXV.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata AC, positisq; per A & C, contingentibus quæ diametro BD occurrant in E, ducatur per B, contingens, quæ AE, CE lineas secet in F & G, diametri deinde ponantur FH, GI; & per H & I, contingentes LK, MN: atque idem sine termino continuetur.

Dico figuram mixtilineam AEC, BA, æqualem esse toti triangulorum seriei.

Demonstratio.

e 233. huius.
f 1. decimi.

SI enim non sit æqualis; maior igitur vel minor vt sit necesse est. sit primum figura mixtilinea maior triangulorum serie, excessu quantitatis O. triangulum FEG maius [e] est dimidio figuræ concauæ AECBA; similiter triangula LFK, MGN maiora sunt dimidijs mixtilineorum quibus inscribuntur, & id semper fit: igitur per ablationem illam continuatam, relinquetur ex mixtilineo [f] AECBA quantitas datâ minor, ergo & minor quantitate O, ergo O excessus non est, quo mixtilineum AECBA excedit triangulorum seriem: igitur nec illud serie totâ maius est. similiter ostendetur AECBA figuram minorem quoque non esse totâ triangulorum serie. æqualis igitur vt sit necesse est.

PROPOSITIO CCXXXVI.

EAdem manente figura:

Dico parabolam concauam AECB ad triangulum FEG, eam proportionem habere quam quatuor ad tria.

Demon-

Demonstratio.

QVoniam EFG triangulum quadtuplum est trianguloium LFK, MGN, & [a] illa rursum simul sumpta, quadrupla illorum quæ residuis figuris mixtilineis inscribuntur, & ita sine termino procedendo, ablata semper quadrupla sunt triangulorum residuis figuris inscriptoru, erit per 87. libri nostri de progressionibus tota triangulorum series id est concauum AECBA, ad FEG triangulum, vt quatuor ad tria. Quod erat demonstrandum.

[a] a 234. huius.

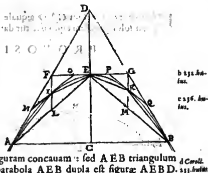
Corollarium.

HInc patet EFG triangulum triplum esse residuorum AHBFA, CIBGC. est enim FEG triangulum ad figuram concauam ABCEA, vt tria ad quatuor: quare triangulum EFG tres quartas continet figuræ ABCEA, adeoque residuorum triplum est.

PROPOSITIO CCXXXVII.

IIsdem positis:
Dico AEB parabolam conuexam duplam esse figuræ concauæ AEBDA.

Demonstratio.



INscribantur tam concauæ quàm conuexæ parabolæ, triangula maxima AEB, FDG. quoniam igitur AEB parabola est ad triangulum AEB vt [b] quatuor ad tria; eandem autem habeat proportionem figura concaua [c] AEBD, ad triangulum FDG, erit vt triangulum AEB ad parabolam conuexam, sic FDG triangulum ad figuram mixtilineam AEBD: & permutando vt AEB triangulum ad triangulum FDG, sic parabola AEB ad figuram concauam: sed AEB triangulum [d] duplum est trianguli FDG: igitur & parabola AEB dupla est figuræ AEBD. Quod erat demonstrandum.

[b] b 232. huius.

[c] c 236. huius.

[d] d Coroll. 233. huius.

PROPOSITIO CCXXXVIII.

IDem aliter demonstrare.

Demonstratio.

INscribantur segmentis residuis tam parabolæ conuexæ, quàm concauæ, triangula maxima AIE, EKB, NFO, PGQ. Quoniam triangulum AEB, [e] ablatum ex parabola duplum est trianguli FDG, ablati ex figura ADBEA; & iterum triangula AIE, EKB ablata ex residuo parabolę dupla triangulorum NFO, PGQ, ablatorum ex residuo figuræ ADBEA, insuper ostensum sit ablationem illam in proportione dupla, siue termino in vtraque figura posse [f] continuari, siue totam triangulorum maximorum seriem parabolę AEB insciptorum, illi æquari & figuram mixtilineam AEBDA æquari toti [g] triangulorum maximorum seriei figuræ illi inscriptorum, parabola AEB, [h] dupla est figuræ mixtilineæ ADBEA. Quod erat demonstrandum.

[e] e Ibid.

[f] f 231. huius.

[g] g 235. huius.

[h] h 85. De progressionibus.

PROPOSITIO CCXXXIX.

DAto segmento parabolico triangulum æquale exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt ABC segmentum datum: ductâque diametro AD ponatur ordinatim CD; agaturque per A ipsi CD, æquidistans AE, occurrens erectæ ex C diametro in E: tum EC diuisa in F vt FC quarta pars sit EC, ducatur ex A per F, linea AG, occurrens CD in G: dico GAC triangulum æquale esse dato segmento ABC. Quoniam AE, CG lineæ æquidistant, vt CF ad FE, sic GC est ad EA: sed CF tertia pars est FE; igitur & GC, tertia pars est EA hoc est CD. Quare & GAC triangulum tertia pars est trianguli CAD: est autem ABC segmentum æquale tertiæ a parti trianguli CAD. igitur & GAC triangulo est æquale: dato igitur segmento parabolico æquale triangulum exhibuimus; quod erat imperatum.

a Ex Coroll. 131. huius.

Corollarium.

HInc patet triangulum GAD æquale esse parabolæ ABCD. adeoque eadem praxi solui problema quo petitur datæ parabolæ, triangulum æquale exhiberi.

PROPOSITIO CCXL.

PArabolæ terminatæ eam inter se sortiuntur rationem quam triangula maxima illis inscripta.

Demonstratio.

SInt ABC, EFG parabolis terminatis triangula maxima inscripta ABC, EFG. dico parabolas illam inter se habere rationem quã triangula maxima. Triangulum b ABC est ad ABC, parabolam vt tria ad quatuor: triangulũ quoque EFG est ad parabolam EFG, vt tria ad quatuor; igitur vt ABC triangulum ad parabolam ABC, sic EFG triangulum ad parabolam EFG, & permutando vt ABC triangulum ad triangulum EFG, sic ABC parabola ad parabolam EFG. Quod erat demonstrandum.

b 131. huius.

Corollarium.

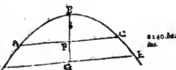
HInc si duæ parabolæ habeant eandem vel æqualem subtensam, erunt illæ inter se vt altitudines; & si altitudines fuerint æquales, erunt inter se vt bases.

PRO-

PROPOSITIO CCXLI.

PArabolam ABC secent duæ quæuis parallelæ AC, DE. Dico ABC parabolam ad DBE parabolam esse in triplicata ratione AC ad DE.

Demonstratio.



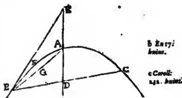
POnatur diameter BF ad quam ordinatim positæ sint AC, DE. Parabola ABC ad DBE parabolam eam habet rationem, quam [a] triangulum sub AC & BF ad triangulum sub DE, & BG: sed ratio trianguli sub AC & BF, ad triangulũ sub DE & BG, est triplicata rationis AC ad DE, quia composita ex ratione AC ad DE, & BF ad BG; hoc est ex duplicata ratione AC ad DE; igitur ABC parabola est ad parabolam DBE in triplicata ratione AC ad DE. Quod fuit demonstrandum.

a 140. huius.

PROPOSITIO CCXLII.

PArabolam ABC contingat in B linea EB, conueniens cum diametro quacunque AE in E, iunganturq; AB. Dico figuram concauam BFAEB, duplam esse conuexæ BFAGB.

Demonstratio.



POnatur ex B, ordinatim AC ad diametrum AD. Quoniam BE est cõtingens, erũt AD, AE lineæ [b] æquales, adeoque ABD, ABE triangula æqualia: est autem ABD triangulum triplum [c] segmenti BFAGB, igitur & triangulũ ABE triplum est segmenti BFAGB. residua igitur figura concaua BFAEB dupla est conuexæ BFAGB. Quod erat demonstrandum.

b Ex 171 huius.

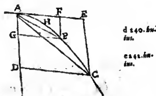
c Coroll. 141. huius.

PROPOSITIO CCXLIII.

SInt ad ABC parabolæ diametrum AD, ordinatim positæ DC, GB: iunctisq; AB, AC ponatur per A æquidistans ipsi DC, occurrens erectis ex B & C, diametris in F & E.

Dico esse vt ABF triangulum ad triangulum ACE siue ABG ad ACD triangulum, sic AHBFA figurã concauã ad figuram AHCEA.

Demonstratio.



VT ABG triangulum ad triangulum ACD, sic AHB segmentum [d] ad segmentum ABC. sed vt AHB ad ABC segmentum, sic AHBF figura ad figuram ABCE, cùm [e] AHBF duplum sit segmenti AHB, & ABCE duplum ABC; igitur vt triangulum ABG ad ACD triangulum, sic AHBF figura ad figuram ABCE. Quod erat demonstrandum.

d 140. huius.

e 242. huius.

Corollarium.

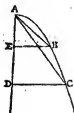
EAdem positâ figurâ sequitur esse vt G F parallelogrammum ad parallelogrammum D E, sic A G B parabolam ad parabolam A D C: item conuexum A H B F ad conuexum A B C E.

PROPOSITIO CCXLIV.

PArabolam A B C cuius diameter A D secent vtcunque lineæ A B, A C: ducanturque ordinatim B E, C D.

Dico spatium parabolicum E B C D, quadruplum esse spatij C A B C lineis A B, A C & parabolica B C contenti.

Demonstratio.

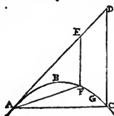


a Ex Coroll. 232. huius.

QVoniam parabola D A B C quadrupla est segmenti A B C & E A B parabola quadrupla segmẽti A B, parabola D A B C est ad segmentum A B C vt E A B parabola ad segmentum A B; igitur cùm parabola D A B C ad A B C, totum ad totum sit vt E A B ablatum ad ablatum A B, erit reliquum E B C D, ad reliquum A C B A, vt D A B C totum ad totum A B C: quare E B C D figura, quadrupla est figuræ lineis A C, A B & parabolica B C contentæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLV.

COntingat A B C parabolam linea quæcunque A D conueniens cum diametris quibusuis D C, F E in D & E. iunganturque A F, A C.



Dico concauum E D C G F duplum esse partis A F G C, lineis A F, A C contentæ.

Demonstratio.

b 242. huius.

COncauum A B C D A b duplum est parabolæ A B C: & concauum A B F E A duplum est segmenti A B F; igitur residuum E D C G F duplum est residui A F G C A. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLVI.

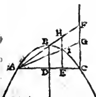
PArabolam A B C subtendat linea A C, qua diuisa in D & E, vt A D, A E, A C continuè proportionales sint, erigantur diametri D B, E I, C F. & per B & I, puncta ex A rectæ ponantur A G, A F secantes C F diametrum in F & G.

Dico E I G C ad spatium quadrilaterum B I triplicatam habere rationem A C ad A E.

Demonstratio.

c 1. De proportionibus.

QVoniam A D, A E, A C ponuntur continuè proportionales, vt C A ad E A, sic c C E ad E D, sed vt C E ad E D, sic C G est ad G F; igitur vt C A ad E A, sic C G ad G F: vnde triangulum C A G ad G A F triangulum, est vt C E ad E D, id est vt C A ad E A, id est F A ad H A, id est F G ad H I: est autem G A F triangulum



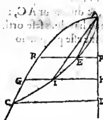
triangulum ad triangulũ H A I in duplicata ratione F G ad H I, igitur cùm ratio trianguli C A G ad H A I componatur ex ratione trianguli C A G ad G A F, & ex G A F ad H A I, patet C A G triangulum esse ad triangulum H A I in triplicata ratione F G ad H I: quia verò ratio quadrilateri E G ad B I quadrilaterum, componitur ex ratione E G ad G H quadrilaterum, (id est ex ratione trianguli C A G ad triangulum G A F,) & ex ratione G H ad I B, quadrilaterum, (id est ex ratione trianguli G A F ad H A I triangulum, cùm F A, H A, B A proportionales sint) erit E G quadrilaterum ad quadrilaterum B I vt C A G triangulum ad triangulum H A I; igitur & E G quadrilaterum ad B I quadrilaterum rationem habet triplicatam A C ad A E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLVII.

Esto A B C parabolæ diameter A D, positaque ad illam ordinatim C D, describatur per A & C, parabola A E C, quam in A contingat A D, ponanturque ordinatim quæuis F B, H G secantes A E C parabolam in E & I.

Dico figuram concauam A F E A, ad figuram concauam A H I A, duplicatam habere rationem parabolæ B A F ad parabolam G A H.

Demonstratio.



Iungantur A E, A I. Figura mixtilinea A F E A ad figuram A H I A eam habet rationem quam A E F triangulum [a] ad triangulum A I H. ratio autem trianguli A E F ad triangulum A I H composita est ex ratione A F ad A H, hoc est duplicata rationis F B ad H G, & ex ratione F E ad I H, hoc est duplicata rationis A F ad A H, id est quadruplicata rationis F B ad H G; igitur A F E A figura ad figuram A H I A sextuplicatam habet rationem lineæ F B ad H G. sed B A F [b] parabola ad G A H parabolam triplicatam habet rationem F B lineæ ad lineam H G: igitur figura A F E A ad figuram A H I A, duplicatam habet rationem parabolæ B A F ad parabolam G A H. Quod erat demonstrandum.

[a] 141. huius.

[b] 140. huius.

Corollarium.

Hinc patet concauum A F E ad concauum A H I, triplicatam habere rationem A F ad A H; nam A E F triangulum ad triangulum A I H rationem habet compositam ex A F ad A H, & E F ad I H, id est ex duplicata rationis A F ad A H.

PROPOSITIO CCXLVIII.

Iisdem positis sint A H, A F, A D proportionales, iunganturque A C.

Dico mistilineum I F ad E D mistilineum, rationem habere sextuplicatam, cuius ratio trapezij K F ad L D, trapezium est quadruplicata.

 Demon-

Demonstratio.

QVoniam A H, A F, A D lineæ proportionales sunt, rectæ quoque I H, E F, C D, adeoque figuræ [a] coocauæ A H I A, A F E A, A D C A in continua sunt analogia. igitur vt A H I A figura ad figuram A F E A, sic I F mistilineum est ad mistilineum E D; sed A H I A figura ad figuram A F E A, sextuplicatam habet rationem B H ad G F, igitur & I F mistilineum ad mistilineum E D sextuplicatam habet rationem B H ad G F. Rursum, quia A H, A F, A D proportionales sunt, triangula quoque A K H, A L F, A C D in continua sunt analogia. adeoque vt A K H triangulum est ad triangulum A L F, sic K F trapezium est ad trapezium L D: sed A K H triangulum ad triangulum A L F, duplicatam habet rationem lineæ A H ad A F, hoc est quadruplicatam rationis H B ad F G: igitur & K F trapezium ad trapezium L D quadruplicatam habet rationem lineæ H B ad F G, cuius I F mistilineum ad mistilineum E D habet sextuplicatam. Quod erat demonstrandum.

a Ex 243. huius.

PROPOSITIO CCXLIX.

IN parabola A C B sit A B pars axeos æqualis lateri recto, ductâq; A F ad axem normali, ponatur quæuis F C parallela A B, secans parabolam in C, & ducantur A C, B F.

Dico has duas sese orthogonaliter intersecare & C G, F G, G A, G B continuè esse proportionales.

Demonstratio.

CVm B A æqualis sit lateri recto, erit [b] rectangulum B A F C æquale quadrato F A. Igitur sunt tres in continua analogia F C, F A, A B: ergo cùm anguli C F A, B A F æquales sint, similia sunt triangula [c] C F A, F A B. vnde angulus F A C æqualis angulo A B F. est autẽ angulus F A C vnà cum C A B, recto æqualis; igitur etiam angulus F B A vnà cum angulo C A B recto est æqualis, & consequenter angulus A G B rectus est. vlterius cùm tam angulus A F C quàm A G F rectus est, tres C G, G F, G A [d] proportionales sunt: quia verò anguli A G B, F A B recti sunt, lineæ quoque F G, G A, G B proportionales sunt; eadem igitur continuant rationem C G, F G, G A, G B. Quod erat demonstrandum.

b Ex 8. huius.

c 6. sexti.

d Ex 13. sexti.

PROPOSITIO CCL.

INter duas datas, duas medias exhibere organicè.

Constructio & demonstratio.

SInt duæ datæ H I, I K inter quas duas medias oporteat exhibere. constituantur hæ ad angulos rectos & conficiant triangulum orthogonum H I K. deinde describatur parabola A C B cuius latus rectum sit A B pars axeos, super quo segmentum circuli constituatur capiens angulum A C B æqualem I H K, occurrens parabolę in C & ducantur C F, F A ad angulos rectos, ita vt C F sit æquidistans axi & iungantur A C, B F. Dico factum quod requiritur. nam ostensum est angulos ad G rectos esse

esse, estque angulus BCA seu BCH æqualis angulo K. ergo BCG triangulum simile triangulo HIK; igitur cum FG, GA mediæ [a] sint inter CG, GB etiam inter HI, IK inuentæ erunt mediæ.

[a] Ex 3 huius.

PROPOSITIO CCLI.

Habeant duæ parabolæ ABC, AFB communem axem; sitque AB linea lateri recto æqualis parabolæ ABC, ductisque ordinatim BFC, ED, sit ADE parabola æqualis AFB.

Dico AE, ED, medias esse inter FB, BA.

Demonstratio.

Quoniam AB ex hypothesi est latus rectum parabolæ ACB, rectangulum BAE æquatur [a] quadrato ED. igitur vt BA ad ED, sic ED ad AE. Deinde quia parabolæ æquales sunt, æquantur etiam [b] rectangula AED, ABF. Ergo vt BA ad ED, sic reciprocè AE ad BF. sed eum ostendi vt BA est ED, sic ED esse ad AE, ergo vt ED ad AE, sic AE ad BF. liquet igitur quatuor rectas BA, ED, AE, BF esse in continua analogia: & proinde inter BA, BF, medias esse ED, AE. Quod erat demonstrandum.

[b] Ex Coroll. 142. huius.

PROPOSITIO CCLII.

Inter duas datas, duas medias exhibere.

Constructio & demonstratio.

Datæ sint AB, BF, quibus ad angulum rectum dispositis describe parabolam AC circa axem AB, cuius rectum latus æquale sit ipsi AB. occurrat deinde BF, parabola AC in C; & circa communem axem AB aliam describe parabolam per A & F. Demum [c] ducatur ordinatim DE, faciens segmenta parabolica ADE, AFB æqualia. Dico DE, EA esse medias inter AB, BF: demonstratio ex præcedenti manifesta est.

[c] Ex 141. huius.

PA-

PARABOLÆ

PARS SEXTA

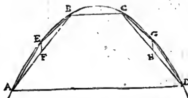
Segmenta primùm & parabolas inter se confert; dein figuras maximas sectioni inscribit.

PROPOSITIO CCLIII.

SEcent A B C parabolam parallelæ quæuis duæ A D, B C, ducanturque lineæ A B, C D.

Dico illas segmenta auferre æqualia.

Demonstratio.



SEgmentis A B, C D triangula inscribantur maxima A E B, C G D; quæ cùm B C, A D, [a] æquidistent, inter se æqualia sunt: vnde & [b] segmenta æquantur. Quod erat demonstrandum.

a 218. huius.
b Ex 140. huius.

PROPOSITIO CCLIV.

EAdem manẽte figurâ, oportet ex dato in peripheria puncto C, rectam ducere, quæ segmentum auferat æquale dato A B.

Constructio & demonstratio.

IVnctâ B C, ducatur A D parallela B C, iunganturque C D: manifestum est per præcedentem D C ex dato puncto eductam, segmentum auferre æquale dato A B. Quod erat requisitum.

PROPOSITIO CCLV.

DAto segmento A B C & diametro G H oportet ad illam ordinatim applicare lineam, quæ segmentum auferat dato æquale.

Constructio & demonstratio.

DIuisa A B bifariam in F, erigatur diameter F E, cui fiat æqualis G H: & per H ordinatim ponatur C D, dico factum esse quod petitur: iunguntur enim A E B, C G D. quoniam E F, G H diametri æquales sunt, [c] triangula quoque A E B, C G D æqualia sunt: quæ cùm [d] maxima sint illorum quę segmentis A B, C D inscribi possunt, [e] segmenta quoque A B, C D æqualia sunt: applicuimus igitur ad datam diametrum, &c. Quod erat faciendum.

c 218. huius.
d 218. huius.
e 140. huius.

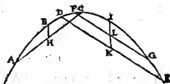
PRO-

PROPOSITIO CCLVI.

Data parabola ABC, & in illa ſegmento AG, oportet cuicunq; ED æquidiſtantem ducere, quæ ſegmentum auferat dato æquale.

Conſtructio & demonſtratio.

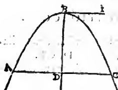
Diuiſis AC, DE biſariam in H & K, erigantur diametri HB, IK: factâq; IL æquali HB, ponatur per L, FG æquidiſtans DE, patet per præcedentem FIG ſegmentum dato AC, æquale eſſe; igitur lineam duximus æquidiſtantē DE, quæ ſegmentum FIG auferat æquale dato. Quod erat poſtulatum.

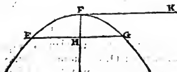


PROPOSITIO CCLVII.

Sit ad ABC parabolæ axem BD cuius latus rectum BI, ordinatim poſita AC: ſit autem & EFG parabola, cuius axis FH, & latus rectum FK; oportet ex EFG parabola ſegmentum auferre, quod ad ſegmentum ABC, rationem habeat quam BI ad FK.

Conſtructio & demonſtratio.





Fiat vt IB ad FK, ſic FH ad BD, & per H ordinatim ponatur EG. dico factum eſſe quod petitur: cùm enim ſit vt IB ad FK, ſic FH ad BD; rectangulum ſuper IB BD id eſt [a] quadratum AD, æquale eſt rectangulo ſuper FK, FH id eſt quadrato EH. vnde AC, EG, inter ſe æquales: ſunt triangulum igitur maximum ſegmenti EFG, ad triangulum maximum ſegmenti ABC eſt vt FH ad BD, id eſt per conſtructionem BI ad FK; ergo & ſegmentum [b] EFG ad ſegmentum ABC, vt IB ad FK: abſtulimus igitur ex EFG parabola ſegmentum EFG, quod ad ſegmentum ABC eam rationem continet quam latus rectum BI, ad latus rectum FK. Quod exhibendum erat.

[a] Ex 8. huius.

[b] Ex 140. huius.

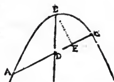
PROPOSITIO CCLVIII.

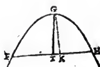
Sit ad ABC parabolæ diametrum BE ordinatim poſita AC: ductaque AD normali, ad diametrum ex C demiſſam, fiant BE, FG lineæ æquales; & per AGD, parabola deſcribatur, cuius axis GF.

Dico AGD ſegmentum æquari ſegmento ABC.

 Demon-

Demonstratio.





CVm enim segmenta ABC, FGH ponantur æqualia, triangula quoque illorum a maxima inter se æqualia sunt, vnde vt BE ad GK, sic b FH ad AC. Quod erat demonstrandum.

a Ex vniuersa 240. huius.
b Ex elementis.

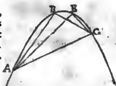
PROPOSITIO CCLXV.

PArabolæ ABC segmento ABC, triangula duo inscripta sint, & ABC quidem illorum maximum, quæ segmento inscribi possunt, alterum verò AEC quodcunque.

Dico segmenta AE, EC simul sumpta, maiora esse segmentis AB, BC simul sumptis.

Demonstratio.

CVm triangulum AEC minus sit triangulo ABC, residua AE, EC segmenta, maiora sunt residuis segmentis AB, BC; eodem etenim excessu superat triangulum ABC triangulum AEC, quo segmenta super lineis AE, EC excedũt segmenta super AB, BC.



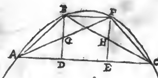
PROPOSITIO CCLXVI.

PArabolam ABC subtendat recta AC, qua diuisa in quotuis partes æquales, in punctis D, E: erigantur diametri DB, EF, iunganturque AB, BF, FC.

Dico segmenta AB, BF, FC æqualia esse.

Demonstratio.

POnantur AF, BC & AF quidem occurrat BD in G; BC verò rectæ FE in H: vt AD ad DE, sic AG ad GF, sed AD, DE per hypothesim æquales sunt; igitur & AG, GF quoque inter se æquantur, quare ABC triangulum c maximum est eorum quę ABF segmento inscribi possunt, & AB, BF segmenta d sunt æqualia. similiter æqualia ostenduntur segmenta BF, FC: segmenta igitur AB, BF, FC, æqualia sunt.

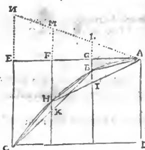


c 227. huius.
d Coroll. 2. propos. 232. huius.

PROPOSITIO CCLXVII.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE; quâ diuisâ in partes æquales, punctis E, F, G, demittantur diametri EC, FH, GB, occurrentes parabolæ in B, H, C; iunganturque AB, BH, HC: Dico segmenta AB, BH, HC esse inter se æqualia.

Demonstratio.



DVcantur AH, BC; & AH quidem occurrat GB lineæ productæ in I; BC verò ipsi FH in K. Quoniam IG, FH æquidistant & AG, GF ponuntur æquales, rectæ AI, IH inter se æquales sunt: quare AH ordinatim posita est ad diametrum IB, & ABH triangulum maximum a est eorum quæ segmento ABH inscribi possunt: adeoque & segmenta b AB, BH æqualia sunt. eodem modo ostenduntur segmenta BH, HC inter se æquari; segmenta igitur AB, BH, HC æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

a 117. huius.

b Ex Coroll. 232. huius.

Corollarium.

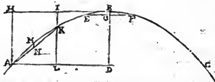
PRopositio quoque vera est si ex A ducta secans AN diuidatur in partes æquales punctis L, M: ex quibus in parabolam rectæ emittantur LB, MH, NC parallelę diametro AD. demonstratio patet ex præcedenti.

PROPOSITIO CCLXVIII.

SIt ad ABC parabolę axem BD ordinatim posita recta EF; actaq; per B contingente BH, sumatur in illa, portio HI æqualis EF: & ex H & I, diametri demittantur HA, IK, occurrentes parabolæ in A & K, iunganturque AK.

Dico segmentum AK, æquari segmento EBF.

Demonstratio.



DIuisâ AK bifariam in N ducatur diameter NM. Quoniam AL, EF lineæ ponũtur æquales & MN ad BG in duplicata est ratione c AL ad EF, rectę MN, BG inter se ęquales sunt; sed ratio segmenti AK ad segmentum EBF composita est d ex ratione MN ad BG, & AL ad EF; segmentum igitur AK æquale est segmento EBF. Quod erat demonstrandum.

c 161. huius.

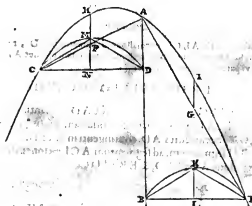
d 161. huius.

PROPOSITIO CCLXI.

Parabolam ABC, secent duæ quævis lineæ AB, AC: demissaque ex A diametro AD, ponantur ad illam ex B & C normales BE, CD: dein AB, AC lineis bifariam diuisis in F & G, erigantur diametri FH, GI.

Dico segmentum AHC ad segmentum AIB, rationem habere compositam, ex ratione FH ad IG, & CD ad BE.

Demonstratio.



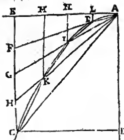
Diuisis EB, CD lineis bifariam in L & N, erigantur normales LK, NM: & LK quidem æqualis IG: NM verò æqualis HF: & per E, K, B, item C, M, D puncta, parabolæ describantur, quarum axes sint LK, MN: iunganturque EKB, CMD. Quoniam LK æqualis est IG, segmenta EKB, [a] AIB æqualia sunt: eadē de causa æqualia sunt segmenta AHC, DMC; segmentum igitur AHC est ad segmentum AIB vt DMC segmentum, est ad segmentum EKB. sed DMC segmentum est ad segmentum EKB, [b] vt DMC triangulum ad triangulum EKB; igitur & AHC segmentum, ad segmentum AIB, est vt DMC triangulum ad triangulum EKB, & inuertendo vt triangulum DMC ad triangulum EKB, sic AHC segmentum est ad segmentum AIB: sed ratio trianguli DMC ad triangulum EKB est composita ex ratione NM, ad LK, id est FH ad IG, & ex DC ad EB: ratio igitur segmenti AHC ad segmentum AIB, composita est ex ratione HF ad IG, & DC ad EB. Quod erat demonstrandum.

[a] 118. & 240. huius.
[b] 240. huius.

PROPOSITIO CCLXII.

AVferant AB, BC lineæ segmenta quæcunque, demissaq; ex B diametro BD, ponatur AC occurrens BD lineæ in D: dein AB, BC diuisis bifariam in F & H, ponantur per F & H, diametri EF, GH.

PROPOSITIO CCLXIX.



Parabolam A B C cuius diameter A D, contingat in A linea A E: in qua assumpto quouis pũcto E, ponatur diameter E C, quę in F, G, H punctis secetur in partes æquales; ductisq; A C, A H, A G, A F lineis quę parabolæ occurrant in B, I, K: iungantur A B, B I, I K, K C.

Dico segmenta A B, B I, I K, K C esse inter se æqualia.

Demonstratio.

Erigantur ex B, I, K diametri B L, I N, K M: Quoniam B L, I N, K M, C E æquidistant axi, recta A E [a] in L, N, M diuisa est sicut E C diuisa in F, G, H: igitur lineæ A L, L N, N M, M E, æquales sunt: ac proinde segmenta A B, B I, [b] I K, K C inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

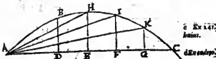
[a] Ex 24. huius.
[b] 67. huius.

PROPOSITIO CCLXX.

Parabolam A B C subtendat quæuis A C normalis ad axem parabolæ, quâ diuisâ in D, E, F, G: vt A D, A E, A F, A G, A C proportionales sint, ponantur diametri D B, E H, F I, G K: iunganturque A B, A H, A I, A K.

Dico segmenta A B, A B H, A H I, A I K, A K C in continua esse analogia.

Demonstratio.



Segmentum A B ad A B H segmentum [c] rationem habet triplicatam lineæ A D ad A E lineam: & A H segmentum ad segmentum A I triplicatam [d] habet rationem A E ad A F, & sic de cęteris; igitur cùm A D, A E, A F, A G, A C continuè sint proportionales, segmenta quoque in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

[c] Ex 141. huius.
[d] Ex eadem.

PRO-

PROPOSITIO CCLXXI.

Sit ABC parabolæ diameter AD diuisa in E, F, G punctis vt AE, AF, AG AD lineæ sint continuè proportionales positisque ordinatim EB, FH, GI, CD iungantur AB, AH, AI, AC.

Dico segmenta AB, ABH, ABI, ABC in continua esse analogia.

Demonstratio.

Ratio segmenti AB ad segmentum AH triplicata est eius quam habet [a] BE ad HF. rursum ABH segmentum ad segmentum ABI triplicatam habet rationem HF ad IG, & sic de cæteris; sed EB, FH, GI, CD lineæ continuè [b] sunt proportionales, quoniam AE, AF, AG, AD in continua ponuntur analogia; igitur & segmenta AB, ABH, AHI, AIC sunt in ratione continuata. Quod erat demonstrandum.

a Ex eadem.

b 33 huius.

PROPOSITIO CCLXXII.

Sit ABC parabolæ diameter AD, diuisa in E & F, vt AE, AF, AD sint proportionales, & ordinatim ponantur EB, FG, DC: iunganturque BG, GC.

Dico segmentum BG ad segmentum GC rationem habere triplicatam eius, quam habet EB linea ad lineam FG.

Demonstratio.

Ducantur FB, DG. Quoniam AE, AF, AD lineæ proportionales sunt, EF est ad FD, [c] vt AE ad AF, id est vt quadratum EB ad quadratum FG. sed ratio trianguli FEB ad triangulum DFG [d] composita est ex ratione EF ad FD, & ex EB ad FG; triangulum igitur FEB ad DFG triangulum, triplicatam habet rationem EB ad FG. eodem modo triangulum FBG ad DGC, triangulum triplicatam habet rationem FG ad DC, (cùm rationem habeant compositam ex EF ad FD, altitudine ad altitudinem, & ex FG ad DC, id est EB ad FG; (cùm EB, FG, DC proportionales sint) igitur totum rectilineum EBGF est ad totum rectilineum FGCD in triplicata ratione EB ad FG; sed & mixtilineum EBGF est ad mixtilineum DFGC in triplicata ratione EB ad FG, nam cùm EB, FG, DC proportionales sint, parabolæ quoque EAB, FAG, [e] DAC in continua sunt analogia: adeoque vt ABE parabola est ad parabolam FAG, sic EBGF mixtilineum est ad mixtilineum FGCD. igitur & reliquum [f] segmentum BG est ad reliquum GC, in triplicata ratione EB ad FG. Quod erat demonstrandum.

c 1. De progressionibus.

d Ex elementis.

e Ex 241. huius.

f Ex 19. quinti.

PRO-

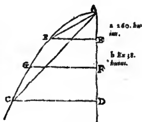
PROPOSITIO CCLXXIII.

SInt denuo proportionales A E, A F, A D, & A F æqualis lateri recto diametri A D, & iungantur A B, A C.

Dico ſegmentum A B eſſe ad ſegmentum A C vt quadratum A B ad quadratum A C.

Demonſtratio.

SEgmentum A B eſt ad ſegmentum A C a in triplicata ratione E B ad D C, id eſt ſextuplicata E B ad F G, cùm E B, F G, D C proportionales ſint: ſed A B, quadratum ad quadratum A C rationem habet b ſextuplicatam lineæ E B ad F G, igitur vt quadratum A B ad quadratum A C, ſic A B ſegmentum ad ſegmentum A C. Quod erat demonſtrandum.



a 260. huius.

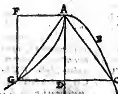
b Ex 38. huius.

PROPOSITIO CCLXXIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AF; dein per A deſcribatur parabola F A G cuius A F ſit diameter & contingens A D, ducaturque in A B C parabola ordinatim linea G C, occurrens F A G parabolæ in G, iunganturque A C, A G.

Dico ſegmentum A G eſſe ad ſegmentum A B C, vt G D linea ad lineam D C.

Demonſtratio.



ERigatur ex G linea G F parallela contingenti A D, erit igitur ſegmentum G A, ad c ſegmentum A B C, vt F A G triangulum id eſt triangulum G D A, ad triangulum D A C; ſed G D eſt ad D C, vt G D A triangulum ad triangulum D A C: ſegmentum igitur A G eſt ad ſegmentum A C, vt G D linea ad lineam D C. Quod erat demonſtrandum.

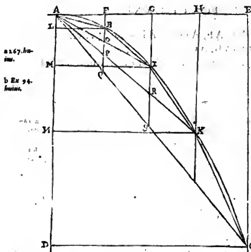
c Ex 240. & ex Coroll. 256. huius.

Scholion.

LVbet hoc loco propoſitionem ducenteſimam ſexageſimam ſeptimam huius, ſecundùm proportiones quaſdam Arithmeticas contemplari, nimirum quæ linearum, & ſegmentorum, tam connexorum quàm concauorum Arithmetica ſit progreſſio, ſiue incrementum.

Sit A B C *parabola diameter* A D, *& contingens* A E: *quâ diuiſâ in quotcunque partes æquales punctis* F, G, H *demittantur diametri* F B, G I, H K, E C *occurrentes parabolæ in* B, I, K, C *ex quibus ordinatim ponantur* BL, I M, KN, CD: *ductiſque* A B, A I, A K,

A C *iun-*



a 267. huius.

b Ex 94. huius.

A C iungantur B I, I K, K C, & F B, G I, H K lineæ producantur, donec A I, A K, A C lineis occurrant in O, P, Q, R, S, T punctis.

Erunt igitur [a] *segmenta* A B, B I, I K, K C *inter se æqualia: item lineæ æquales* F B, B O, O P, P Q: *cùm* F Q *linea* [b] *sit diuisa vt* A E.

Primò vt quadratū A F *ad quadratum* A G, *sic* F B *est ad lineam* G I: *sed* A G *quadratum quadruplū est quadrati* A F *quia* A G *dupla est* A F; *igitur &* G I *quadrupla est linea* F B, *id est* A M *quadrupla ipsius* A L: *rursum quadratum* A H *est ad quadratum* A F, *vt* 9. *ad* 1. *cùm* A H *tripla sit* A F, *igitur &* H K *linea est ad lineam* A F, *id est* A N *ad* A L, *vt nouem ad vnum: iterum quadratum* A E *est ad quadratum* A F *est vt* 16. *ad* 1. *ergo &* E C *est ad* F B, *id est* A D *ad* A L, *vt* 16. *ad* 1. *& sic de cæteris: igitur* A L *dat vnum; quorum* A M *quatuor;* A N *nouem;* A D *sedecim.*

Rursum cùm I R *sit ad* O P, *vt* A I *ad* A O, *id est* A G *ad* A F, *ponatur autem* A G *dupla* A F, *erit &* I R *dupla* O P: *eadem methodo ostenditur* K T *triplam esse* P Q *siue* O P, *& sesquialteram ipsius* I R. *vnde incrementum innatescit linearum* B O, I R, K T.

c 241. huius.

Secundò segmentorum connexorum A B, A I, A K, A C *arithmetica proportio sic instituitur. Triangulum* A B O *æquale est triangulo* A F B (*cùm* F B, B O *æquales ostensæ sint*) *adeoq; triplum segmenti* [c] A B: *quare totum triangulum* A B I, *sextuplum est segmenti* A B; *additis igitur segmentis æqualibus* A B, B I, *erit totum segmentum* A B I *ad segmentum* A B *vt* 8. *ad* 1. *Rursum triangulum* A I R, (*habens* I R *basim duplam baseos* O P, *&* I M *altitudinem duplam altitudinis* L B) *quadruplum est trianguli* A B O: *est autem triangulum* I K R *duplum trianguli* A B O, *quia eandem habent altitudinem, & basis* I R *dupla est baseos* O B, *igitur totum triangulum* A I K, *sextuplū est trianguli* A B O, *vnde est ad segmentum* A B, *vt* 18. *ad* 1. *addita igitur segmenta* I K *æquali segmento* A B, *& segmento* A I, *quod octuplum est segmenti* A B, *erit totum segmentum* A K *ad segmentum* A B, *vt* 27. *ad* 1: *iterum, cùm* A K T *triangulum, basim* T K *habeat triplam baseos* O B, *&* N K *altitudinem triplam altitudinis* L B, *erit* A K T *triangulum noncuplum trianguli* A B O: *est autem triangulum* K C T *triplum trianguli* A B O, *igitur totum triangulum* A K C, *duodecuplum erit trianguli* A B O: *quare & ad segmentum* A B *est vt* 36. *ad* 1. *addita ergo segmenta* K C, *æquali ipsi* A B, *&* A I K *segmento quod ad* A B *segmentum est vt* 27. *ad* 1; *erit* A K C *segmentum ad segmentum* A B, *vt* 64. *ad vnum: & sic de cæteris.*

d 240. huius.

Tertiò parabola A I M *est ad* A B L *parabolam,* [d] *vt* A I M *triangulum ad triangulum* A B L, *est autem* A I M *triangulum octuplum trianguli* A B L, (*cùm* A M *basis ostensa sit quadrupla baseos* A L, *&* M I *altitudo dupla ipsius* L B;) *igitur* A I M *parabola octupla est parabolæ* A B L: *eadem modo cùm* A N *noncupla sit* A L, *&* N K *tripla* L B, *erit triangulum* A K N *ad triangulū* A B L *est vt* 27. *ad* 1. *vnde &* A K N *parabola toties continebit parabolam* A B L. *eadem praxi procedendo, reliquorum proportio habebitur.*

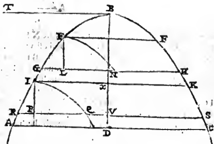
e 243. huius.

Sed & truncatorum quoque segmentorum A F B, A G I, A H K, *&c. excessus eadem ratione innotescunt, cùm segmenta illa eandem seruent rationem* [e] *quam triangula* A F B, A G I, A H K, *quorum nota est proportio.*

PROPOSITIO CCLXXV.

Sit parabolæ A B C axis B D, ad quem ponantur ordinatim E F, G H, & I K, R S: ductis deinde diametris E L, I M. medijsque constitutis L N, M O inter G L, L H, & A M, M C, describantur circa axes E L, I M & puncta N & Q, parabolæ E L N, I P Q.

Dico parabolas has æquales esse.



Demonstratio.

Sit B T latus rectum axeos B V. erit ergo rectangulum V B T æquale quadrato V R, & rectangulum X B T æquale quadrato X I hoc est quadrato V P: itaque à rectangulo V B T dempto rectangulo X B T, remanet rectangulum V X B T, æquale rectangulo R P S, quod ex quadrato V R remanet per 5. 2. dempto quadrato V P. sed cùm ex constructione R P, P Q, P S sint continuæ, rectangulũ R P S æquatur quadrato P Q. rectangulum igitur V X B T, hoc est I P B T æquatur quadrato P Q. ergo B T latus rectum est parabolæ I Q P. Atqui eodem plano discursu B T latus rectum est parabolæ E N L.[a] æquantur igitur parabolæ. Quod erat demonstrandum.

[a] defin. huius.

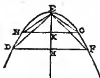
PROPOSITIO CCLXXVI.

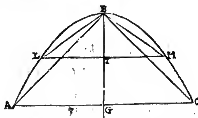
Omnis parabola, parabolæ similis est.

NOTA:

Duplici modo superficies duas curuilineas dici similes: Primo, quando similes figuræ in infinitum illis inscribi possunt: & hoc sensu Archimedes & Euclides, similia esse curuilinea quadam ostendunt. Secundo, similes dicuntur figuræ curuilineæ quarum essentiales proprietates eædem sunt. Nos duplicem hanc similitudinem parabolis inesse demonstrabimus.

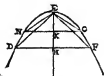
Demonstratio.

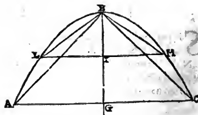




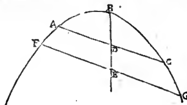
Ponantur A B C, D E F parabolarum axes B G, E H æquales lateribus suis rectis: & per G & H, ordinatim A C, D F: iunganturque A B C, D E F. Quoniam E H, B G lineæ lateribus rectis æquales sunt & A C, D F ordinatim positę, rectæ E H, D H, item A G, B G æquales sunt: & quia A G, D H ad axes ordinatim applicantur, anguli D H E, A G B recti sunt: vnde triangula D H E, A G B, ac proinde tota D E F, A B C similia sunt: Rursum diuisis A G, E H lineis proportionaliter in I & K, ponantur per I & K ordinatim L M, N O: iunganturque L B M, N E O. Quoniam igitur vt B I ad B G, sic E K est ad E H, vt L I quadratum ad quadratum A G, sic N K quadratum est

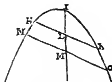
 ad





ad quadratum D H, vt L I linea ad A G, sic N K linea ad D H; & permutando inuertendo vt A G ad D H, sic L I ad N K: sed est vt A G ad D H, id est B G ad E H, (quia A G, G B item D H, H E æquales sunt) sic B I ad E K;) per constructionē igitur vt L I ad N K, sic B I est ad E K. & permutando vt L I ad B I, sic N K ad E K: quare cùm L I B, N K E anguli lateribus proportionalibus cōteti recti sint, triangula L I B, N K E, adeoq; & tota L B M, N E O inter se similia sūt: similiter si iungantur N D, O F, L A, M C, ostendetur triangula D N E, E O F similia triangulis B L A, B M C: adeoque figuram totam D N E O F similem figuræ A L B M C. quæ operatio cùm sine termino continuari possit: cōstat A B C, D E F parabolas similes esse primo modo.





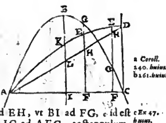
Secundo autem modo parabolas parabolis esse similes, sic ostendo. sit A B C parabolæ diameter quæcunque A D diuisa vtcunque in D & E punctis, per quæ ordinatim ponantur A C, F G. sit autem & H I K parabolæ diameter I L diuisa proportionaliter in L & M, & per L & M ordinatim positæ H K, N O. Quoniam est vt B D ad B E, sic I L ad I M, erit vt quadratum A C ad quadratum F G, sic H K quadratum ad quadratum N O. eodem modo si rursum diametri B D, I L proportionaliter diuidantur, & per diuisionum puncta ordinatim ponantur lineę, ostendentur quadrata ordinatim positarum in vna parabola, proportionalia esse quadratis ordinatim positarum in altera. Quod cū in infinitum semper fieri possit, patet A B C, H I K parabolas esse similes secundo modo. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCLXXVII.

Sit ad A B C parabolæ axem B I ordinatim posita A C, erectaque diametro C D, sumatur in ea punctum quoduis D, & per A & D, parabola describatur cuius diameter D C, iunganturq; A D: tum E F ponatur diameter, occurrens A B C parabolæ in G, & A E D in E, rectæ verò A D in H.

Dico A B C parabolam esse ad segmentum A E D, vt F G linea ad lineam E H.

Demon-



Demonstratio.

Occurrat axis BI, parabolæ AEC in K, & AD in L, cùm igitur AC bifariam in I, sit diuisa, & CD æquidistet BI, erit & AD quoque in L bifariam diuisa & ordinatim ad LK diametrum posita: quia verò AC normalis ad CD, vtrique parabolę est communis, erit ABC parabola ad segmentum AED, [a] vt BI ad LK; (cùm rationem habeant [b] compositam ex ratione BI ad LK, & AC ad AC) sed vt BI ad LK, sic GF ad EH, quia LK est ad EH, vt BI ad FG, [c] id est ALD rectangulum ad rectangulum AHD, vt AIC ad AFC, rectangulum; igitur vt FG ad EH, sic ABC parabola est ad segmentum AED. Quod erat demonstrandum.

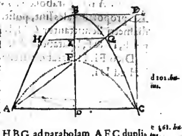
a Coroll. 240. huius.
b 161. huius
c Ex 47. huius.

PROPOSITIO CCLXXVIII.

Sit ad ABC parabolæ axem BD, ordinatim posita AC, contingens verò BE, quæ erectæ ex C diametro occurrat in E posita, autem AE quæ axem secet in F: & parabolam in G, per A, F, C parabola describatur, habens apicem in F, ponaturque ordinatim GH, occurrens axi BD in I.

Dico HBG parabolam ad parabolam AFC duplicatam habere rationem HG ad AC.

Demonstratio.



Quoniam EB, AC æquidistant, vt AF ad FE, sic FD est ad FB, & EB ad AD: sed AF, FE æquales sunt, æquantur igitur EB, AD, & BF, FD: quia verò [d] EF dupla est GF, id est BI dupla IF, erit & EB dupla GI; vnde tota HG æqualis est EB, id est AD dimidio rectæ AC; quare vt BI ad BF, id est FD, sic HG est ad AC, est autem ratio parabolæ HBG ad AFC parabolam composita ex ratione [e] BI ad FD, & HG ad AC: igitur ratio parabolæ HBG ad parabolam AFC duplicata est HG ad AC. Quod erat demonstrandum.

d 101. huius.
e 161. huius.

PROPOSITIO CCLXXIX.

Iisdem positis:

Dico ABC parabolam, octuplam esse parabolæ HBG.

Demonstratio.

Quoniam AD, HG lineæ æquales sunt ostensæ, & BD quadrupla ipsius BI, [f] triangulum ABC octuplum est trianguli HBG, sed ABC parabola est ad parabolam HBG, vt ABC triangulum ad triangulum HBG; octupla igitur est parabola ABC, parabolæ HBG. Quod erat demonstrandum.

f Ex elementis.

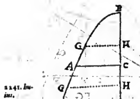
PROPOSITIO CCLXXX.

Sint ABC, DEF parabolarum axes BC, EF, diuisoque BC vtcunque in H diuidatur & EF proportionaliter in K, ponanturq; ordinatim HG, IK.

Dico GBH parabolam esse ad parabolam IEK, vt ABC parabola est ad parabolam DEF.

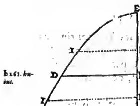
 Demon-

Demonstratio.



Ponantur ordinatim CA, FD: vt BH ad BC, sic EK est ad EF, igitur vt quadratum GH ad quadratum AC, sic IK quadratum ad quadratum DF, & inuertendo permutando vt AC quadratum ad quadratum DF, sic GH quadratum ad quadratum IK, & vt AC ad DF, sic GH ad IK. sed ABC parabola est ad parabolam GBH a in triplicata ratione AC ad GH: & DEF parabola ad parabolam IEK, in triplicata ratione DF ad IK, erit igitur vt parabola ABC ad parabolam GBH, sic DEF parabola ad parabolam IEK: & permutando vt ABC parabola ad parabolam DEF, sic GBH parabola ad parabolam IEK; quod erat demonstrandum.

a 141. huius.



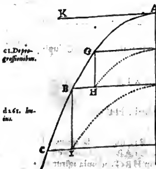
Si verò BC, EF lateribus rectis æquentur, erit GBH parabola ad parabolam IEK in duplicata ratione GH ad IK: quia ABC parabola ad parabolam DEF in duplicata est ratione AC ad DF, cùm AC, CB lineæ, item DF, FE ex quibus b rationem habent compositam, æquales ponantur.

b 161. huius.

PROPOSITIO CCLXXXI.

Esto ABC parabolæ axis AD diuisus in E & F, vt AE, AF, AD proportionales sint, positisque ordinatim EG, FB, DC ex G & B, diametri demittantur GH, BI occurrentes FB, DC lineis in H & I; & per E, H & F, I parabolæ describantur habentes apices in E & F.

Dico FEH parabolam esse ad parabolam DFI, in triplicata ratione FH ad DI.



Demonstratio.

Quoniam AE, AF, AD continuè proportionales sunt, vt AE ad c AF, sic EF est ad FD: sed vt AE ad AF, sic EG quadratum est ad quadratum FB, id est quadratum FH ad quadratum DI; igitur vt EF ad FD, sic FH quadratum est ad quadratum DI: quia verò ratio parabolæ FEH ad parabolam DFI composita est ex d ratione EF ad FD, id est ex duplicata ratione FH ad DI, & iterum ex ratione FH ad DI, parabola FEH est ad parabolam DFI, in triplicata ratione FH ad DI. Quod erat demonstrandum.

c 1. De progressionibus.

d 161. huius.

Corollarium.

Hinc sequitur, figuram mixtilineam HGB, esse ad figuram IBC in triplicata ratione HB ad IC. cùm enim EG, FB, DC proportionales sint, parabolæ EAG, FAB, DAC in e continua quoque sunt analogia: quare & FEGB mixtilineum ad mixtilineum DFBC est f vt EAG parabola ad parabolam FAB, id est in triplicata ratione EG ad FB, id est FH ad DI: sed & rectangulum FG, ad rectangulum DB est in triplicata ratione lineæ FH ad lineam DI, quia rationem habent compositam ex ratione EF ad FD, & FH ad DI. igitur & residuum HGB ad residuum IBC in triplicata est ratione FH ad DI. quia verò est GE ad FB, id est FH ad

e Ex 141. huius.

f 1. De progressionibus.

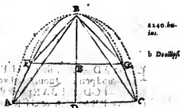
FH ad DI, vt FB ad DC, recta HB est ad IC, reliquum ad reliquum vt FH ad DI: figura igitur HGB ad IBC figuram, triplicatam habet rationem HB ad IC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCLXXXII.

Esto ABC parabolæ diameter BD, vtcunque diuisa in D & E, sic vt nec BE nec BD sit æqualis lateri recto diametri BD, & per E & D, ordinatim positis AC, FG, describantur per A, B, C, & F, B, G, puncta ellipses quarum coniugatæ sint diametri AC, BD, FG, BE.

Dico ABC parabolam esse ad parabolam FBG, vt ABC ellipsis ad ellipsim FBG.

Demonstratio.



IVngantur ABC, FBG: vt ABC triangulum ad triangulum FBG, sic ABC [a] parabola est ad parabolam FBG: sed & ABC ellipsis est ad ellipsim FBG, vt ABC, [b] triangulum ad triangulum FBG: igitur vt parabola ABC est ad parabolam FBG, sic ABC. Quod erat demonstrandum.

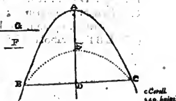
a 240. huius.

b Dellipsi.

PROPOSITIO CCLXXXIII.

Parabolam ABC subtendat recta quæuis BC, oportet super illam describere parabolam quæ ad ABC parabolam datam habeat rationem F ad G.

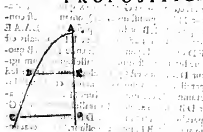
Constructio & demonstratio.

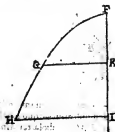


Diuisa BC bifariam in D, erigatur diameter DA, quæ diuidatur in E, vt AD sit ad DE sicut G est ad F; tum per B, E, C puncta parabola describatur cuius diameter sit DE, & ordinatim ad illam applicata BC. dico factum esse quod petitur. Quoniam ABC, BEC parabolę communem subtensam habent BC, parabola BEC ad ABC, parabolam est, vt ED [c] linea ad lineam AD, id est vt F ad G.

c Coroll. 140. huius.

PROPOSITIO CCLXXXIV.

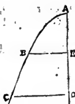


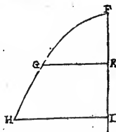


Esto ABC parabolæ diameter AD, diuisa vtcunque in E & D, & ordinatim positæ BE, CD. sit autem & FGH parabolæ diameter FI vtcun-

vtcunque diuisa in I & ordinatim posita H I. oportet F H G parabolam iterum diuidere sicut A B C parabola diuisa est.

Constructio & demonstratio.





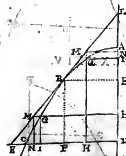
Fiat vt A D ad A E, sic F I ad F K; & ex K ordinatim ponatur K G: dico factũ esse quod petitur. Quoniam est vt A E ad A D, sic F K ad F I, erit & G K ad H I, vt B E ad C D: sed B A E parabola ad parabolam C A D [a] in triplicata est ratione lineæ B E ad C D, & G F K parabola ad parabolam H F I in triplicata ratione G K ad H I, igitur vt parabola B A E ad C A D, parabolam, sic G F K est ad parabolam H F I. perfecimus igitur quod fuit postulatum.

a 141. huius.

PROPOSITIO CCLXXXV.

Sit ad A B C parabolæ diametrum A D, ordinatim posita D C: diuisaq; A D in E, vt E D dupla sit A E, ponatur ex E ordinatim E B, & ex B, demittatur diameter B F, occurrens rectæ D C in F.

Dico parallelogrammum D E B F maximum esse illorum, quæ in angulo E B F, parabolæ A B C D terminatæ inscribi possunt.



Demonstratio.

Inscribatur enim quodcunque parallelogrammum I G H habens angulum I G H æqualem angulo E B F: agaturque per B contingens L K, occurrens A D diametro in L, & D C lineæ in K, rectæ verò H G in M; ex quo recta ponatur M N æquidistans G I. Quoniam B L est contingens, & E B ordinatim posita, rectæ L A, A E [b] æquales sunt; adeoque tota L E, æqualis est E D quæ dupla ponitur A E: vnde L K in B quoque bifariam est diuisa: parallelogrammum igitur D B maius est [c] parallelogrammo D M: sed parallelogrammum D M maius est parallelogrammo D G: quia punctum M cadit extra parabolam; parallelogrammu migitur D B, multo maius est parallelogrammo D G: eodem demonstratur de quouis alio: parallelogrammum igitur D B maximum est eorum quę A B C parabolæ terminatę in angulo E B F, inscribi possunt. Quod erat demonstrandum.

b Ex 17. huius.
c Ex elementis.

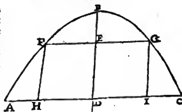
P R O-

PROPOSITIO CCLXXXVI.

DAtæ parabolæ terminatæ maximum inſcribere parallelogrammum.

Conſtructio & demonſtratio.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim poſita AC: oportet parabolæ ABC maximum inſcribere parallelogrammum. diuiſâ DB in E, vt ED dupla ſit EB, ponatur per E ordinatim linea FG, & ex F & G diametri demittantur FH, GI occurrentes AC lineæ in H & I. Manifeſtũ eſt ex præcedenti propoſitione, parallelogrammum HGIF eſſe id quod quæritur.



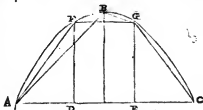
PROPOSITIO CCLXXXVII.

DAtæ parabolæ terminatæ, polygonum regulare inſcribere, quod dato laterum conſtet numero.

Polygonum regulare voco, cuius ſingula latera ſegmenta auferunt æqualia, præter ſubtenſam.

Conſtructio & demonſtratio.

PArabolam datam ABC ſubtendat AC, oporteat ABC parabolæ, polygonum regulare inſcribere, quatuor conſtans lateribus. ſecetur AC in D & E, trifariam, & ex D & E diametri ponantur DF, EG, iunganturque AF, FG, GC: dico AFGC polygonum ſatisfacere petitioni. cùm enim AD, DE, EC lineæ æquales ſint, ſegmenta quoque AF, FG, GC æqualia ſunt: polygonum igitur regulare eſt quadrilaterum AFGC inſcripſimus igitur, &c. quod erat faciendum.



PROPOSITIO CCLXXXVIII.

IIſdem poſitis:
Dico AFGC quadrilaterum eſſe maximum illorum quæ ABC parabolæ terminatæ inſcribi poſſunt.

Demonſtratio.

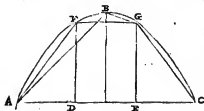
INſcribatur enim aliud quoduis quadrilaterum ABGC: quod primò quidem latus CG commune habeat cum quadrilatero AFGC: quoniam igitur AF, FG æqualia ſunt ſegmenta, [a] minora illa ſunt ſegmentis AB, BG: reſidua igitur figura rectilinea AFGC maior eſt figura rectilinea ABGC: ſimiliter oſtenditur quadrilaterum quoduis aliud minus eſſe quadrilatero AFGC: maximum igitur illud eſt eorum quæ ABC parabolæ terminatæ inſcribi poſſunt.

[a] 265. huius.

Corollarium.

QVæ de quadrilatero regulari dixi, eadem de quotuis laterum polygono regulari intelligenda sunt: eademque omnibus constructio & demonstratio conuenit.

PROPOSITIO CCLXXXIX.



DAtæ parabolæ terminatæ, polygonum inscribere maximum illorum quæ dato numero laterum inscribi possunt.

Constructio & demonstratio.

INscribendum sit parabolę, maximum quadrilaterum: inscribatur ABC parabolæ quadrilaterum regulare AFGC: dico illud esse maximum eorum quæ pari numero laterum, parabolæ inscribi possunt. Demonstratio ex præcedenti manifesta est.

P A-

PARABOLÆ

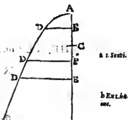
PARS SEPTIMA

Varias exhibet geneses, qua tum è lineis, circulis, ellipsibus, tum ex ipsa oriuntur parabola.

PROPOSITIO CCXC.

Esto AB linea vtcunque diuisa in C; ponantur autem ad AB rectæ quotcunque BD inter se æquidistantes: vt CAB rectangulis æqualia sint quadrata BD.

Dico puncta A, D, D esse ad parabolam cuius latus rectum est AC.



Demonstratio.

Vt AB linea ad AB, sic a CAB rectangulum ad rectangulum CAB: sed CAB rectangulis æqualia ponuntur quadrata BD, quadratum igitur BD est ad quadratum BD, vt AB linea ad lineam AB: puncta igitur A, D, D, sunt ad b parabolam, cuius latus rectum AC. Quod fuit demonstrandum.

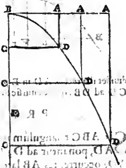
a 1. Sexti.

b Ex l. huius.

PROPOSITIO CCXCI.

Esto angulus quicunque ABC: sumptoque in BC latere, quouis puncto E, fiant proportionales EB, BA, AD; & AD quidem æquidistent lateri BC:

Dico B, D, D esse ad parabolam cuius latus rectum est BE.



Demonstratio.

Dvcantur DC parallelæ AB: quoniam igitur CD æquatur AB, rectæ EB, CD, BC in continua sunt analogia; & EBC rectangulis æqualia quadrata CD: quare per præcedentem, puncta B, D, D, ad parabolam sunt, cuius latus rectum est BE.

PROPOSITIO CCXCII.

Eadem manente figura: sit iterum angulus ABC, & BC lateri quotcunque eductæ parallelæ AD: fiat autem vt AB quadratum ad quadratum AB, sic AD linea ad lineam AD.

Dico B, D, D, puncta esse ad parabolam.

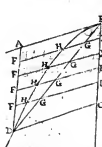
Demon-

Demonstratio.

POnantur iterum D C parallelæ A B. erit igitur D C quadratum ad quadratum D C, vt A D linea ad lineam A D, id est B C ad B C; puncta igitur B, D, D, [a] ad parabolam sunt.

a Ex 1. huius.

PROPOSITIO CCXCIII.



ESto ABCD parallelogrammi diameter B D, quam in G, secent lineæ quotcunque E F, parallelæ lateri A B. fiant autem proportionales F E, H E, G E.

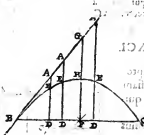
Dico B, H, H puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

QVoniam F E lineæ æquales sunt, rectangulũ F E G ad F E G rectangulum est vt G E linea ad lineam G E: id est vt B E ad B E. sed F E G rectangulis æqualia ponuntur quadrata H E, quadratum igitur H E est ad quadratum H E, vt E B linea ad lineam E B: quare B, H, H, ad [b] parabolam sunt.

b ibid.

PROPOSITIO CCXCIV.



LAtera anguli A B C, secent quotcunque parallelæ A D: quæ diuidantur in E, vt D E sit ad E A, sicut C D est ad D B.

Dico B, E, C, puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

DIuisâ B C bifariam in F, erigatur F G parallela A D; seceturque F G bifariam in H. dein per B, H, C describatur parabola quæ in B contingat A B lineam, diuidet illa rectas A D in E punctis, vt D E ad E A, eam habeant [c] rationem quam C D ad D B: quare cùm sic diuisæ ponantur, erunt puncta B E C ad parabolam.

c 63 huius.

PROPOSITIO CCXCV.

SIt A B C triangulum rectangulum; ductisq; ex A lineis quotcunque A D, ponantur ad D, lineæ D E, D F: & D E quidem normales ad A D, occurrentes A B lateri producto in E: D F verò normales ad C B: occurrant autem D F lineis in F, rectæ E F parallelę lateri C B.

Dico B, F, F, esse ad parabolam cuius latus rectum est A B.

Demon-

Demonstratio.

Cum enim anguli A D E ponantur recti, & D B linea normalis ad A B, rectangulis A B E a æqualia sunt quadrata D B, id est F E: sed A B E rectangula illa inter se seruant proportionem, quam lineæ B E. igitur vt B E ad B E, sic E F quadratum ad quadratum E F. vnde B F F sunt b ad parabolam cuius c latus rectum A B. Quod erat demonstrãdum.

a Ex elementis.

b Ex 1. huius.

c Ex 9. huius.

PROPOSITIO CCXCVI.

Secent A B C triangulum, rectæ quotcunque D E, F G, H I, K L: lateri B C parallelæ: fiant autem continuæ proportionales B C, K L, K P: item B C, H I, H O: item B C, F G, F N: denique B C, D E, D M. Dico puncta A, M, N, O, P, C, esse ad parabolam.

Demonstratio.

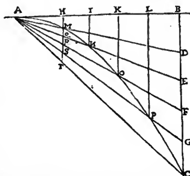
Quoniam B C linea communis prima est, feriebus continuarum B C, K L, K P: B C, H I, H O: B C, F G, F N, &c. rectangula B C K P, B C H O, B C F N, B C D M illam sortiuntur rationem quam habent lineæ K P, H O, F N, D M. igitur & quadrata K L, H I, F G, D E eandem quoque seruant proportionem: sed vt K L quadratum, ad quadratum H I, sic K A quadratum est ad quadratum H A, & vt H I quadratum ad quadratum F G, sic H A quadratum est ad quadratum F A, &c. igitur & quadrata A K, A H, A F, A D illam habent rationem quam lineæ H P, H O, F N, D M. puncta igitur A, M, N, O, P ad d parabolam sunt.

d 9. huius.

PROPOSITIO CCXCVII.

Esto A B C trianguli latus B C vtcunque diuisum in punctis D, E, F, G, iunctisq; A D, A E, A F, A G, diuidatur latus A B in punctis H, I, K, L, sicut B C est diuisum in D, E, &c. demittantur autem ex H, I, K, L rectæ H M, I N, K O, L P parallelæ lateri B C: & H M quidem occurrat A D in M; I N verò ipsi A E in N: dein K O, rectæ F A in O, & L P, ipsi A G in P. Dico A, M, N, O, P, C esse ad parabolam.

Demon-



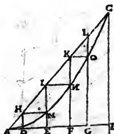
Demonstratio.

PRoducta HM, occurrat lineis AD, AE, AF, AG in Q, R, S, T, quoniam est AH ad AI, vt BD ad BE, ex hypothesi; sit autem vt BD ad BE, sic HM ad HQ, HM est ad HQ, vt AH ad AI, id est vt HQ ad IN: proportionales igitur sunt HM, HQ, IN. similiter ostenduntur proportionales HM, HR, KO: item HM, HS, LP: denique HM, HT, BC: quare rectangula HMIN, HMKO, HMLP, &c. illam inter se proportionem habent, quam HQ, HR, HS quadrata: sed est vt HQ quadratum ad quadratum HR, sic BE quadratum ad quadratum BF, id est per hypothesim AI quadratum ad quadratum AK; & vt HR quadratum ad quadratum HS, sic quadratum BF ad quadratum BG, id est quadratum AK ad quadratum AL: igitur & rectangula HMIN, HMKO, HMLP eam inter se seruant rationem quam AI, AK, AL quadrata: sed rectangula HMIN, HMKO, HMLP sunt vt lineę IN, KO, LP; igitur & quadrata AI, AK, AL eam inter se habent proportionem, quam lineæ
a *Ibid.* IN, KO, LP. quare [a] A, M, N, O, P sunt ad parabolam. Quod erat demonstrandū.

PROPOSITIO CCXCVIII.

ESto ABC trianguli latus AB diuisum in D, E, F, G punctis vt ratio AD ad AE, duplicata sit rationis AE ad AF; & illa rursum duplicata sit rationis AF ad AG, &c. dein ex D, E, F, G punctis rectæ erigantur DH, EI, FK, GL parallelæ lateri CB: quas in M, N, O secent lineæ HM, IN, KO æquidistantes lateri AB.

Dico A, M, N, O, C puncta esse ad parabolam.



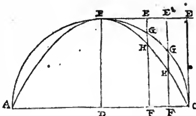
Demonstratio.

QVoniam ratio AD ad AE, id est DH ad EI; id est EM ad FN, duplicata est rationis AE ad AF, quadratum AE est ad quadratum AF, vt EM linea ad lineam FN. similiter ostendetur esse vt FN ad GO, sic AF quadratum ad quadratum AG; puncta igitur
b *Ibid.* A, M, N, O [b] sunt ad parabolam.

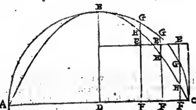
PRO-

PROPOSITIO CCXCIX.

SEmicirculum ABC secet orthogonaliter in D diametri duæ AC, BD. ponatur autem EE linea parallela AC: dein sumptis in AC punctis FF, erigantur normales FE, occurrentes EE lineæ in E, semicirculo in GG. fiant autem proportionales EF, GF, HF.



Dico H, H, C puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

CVm enim proportionales sint EF, GF, HF, erit vt quadratum FG ad quadratum FG, sic EFH rectangulum ad rectangulum EFH: sed EFH rectangula illam inter se habent rationem, quam lineæ HF, igitur & HF lineæ sunt vt quadrata GF; id est vt AFC rectangula, puncta igitur H, H, C ad parabolam sunt.

Idem continget in ellipsi, si AC, BD *diametri ponantur coniugata, &* EF *æquidistantes ipsi* BD.

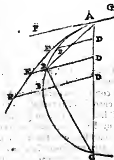
PROPOSITIO CCC.

SEgmentum circuli ABC subtendat recta AC, quam in D secent quotcunque DE, parallelæ contingenti FG per A ductæ: fiat autem vt AB ad AB, sic DE ad DE.

Dico A, E, E puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

IVngantur AB, BC: quoniam FG contingens est, angulus CAG æquatur angulo ABC; sed angulo CAG æqualis est angulus ADB, quia FG, DE æquidistant; angulo igitur ABC æqualis est angulus ADB; & triangula ABC, ABD, similia sunt. quare vt AD ad AB, sic AB ad AC; & DAC rectangulo æquale est quadratum AB. quadratum igitur AB est ad quadratum AB, vt DAC rectangulum ad rectangulum DAC, id est vt DA linea ad lineam DA: sed AB quadratis æqualia sunt quadrata DE, quadrata igitur DE eam habent rationem, quam obtinent lineæ DA. [a] quare A, E, E puncta ad parabolam sunt.

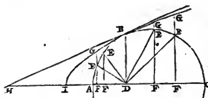


a Exi. hu. ius.

PROPOSITIO CCCI.

ASsumptum sit in A B C semicirculi diametro A C, punctum quodcunque D, quod centrum non sit, & ex D ad peripheriam, rectæ ducantur D E: aganturque per E, lineæ G F, normales ad diametrum A C, & D E rectis æquales.

Dico G G puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

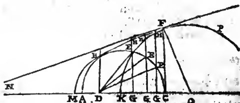
ERigatur ex D linea D B normalis ad diametrum A C: actaque per B contingente, quę A C, diametro occurrat in H, secetur H D bifariam in I: & per I & B, describatur parabola habens I C axem, occurrensque rectis F E in G. Quoniam D B, ordinatim posita est ad axem I C, & D I, I H lineæ æquales, contingent H B linea [a] parabolam in B: quia verò in eodem puncto, eadem recta circulum contingit, contingent quoque sese in eodem puncto [b] circulus & parabola. quare D E lineis [c] æquales sunt rectæ F G. Igitur cùm F E G lineę normales ad diametrum A C, rectis D E, ponantur æquales, puncta G, G ad [d] parabolam sunt: cuius apicem assignat punctum in quo H D diuiditur bifariam.

a Ex 17. huius.
b Ex 131. huius.
c 134. huius.
d Ex conuersa 134. huius.

PROPOSITIO CCCII.

PArabolam priori propositione productam in infinitum eadem praxi extendere.

Constructio & demonstratio.



FIat C D, æqualis C F, parallela B D: erit F ad parabolam M B H, cùm omnes D E, translatæ [e] in G E H ad parabolam sint. factâ deinde C M, æquali M N, [f] ponatur N F contingens parabolam, & erigatur F O perpendicularis ad N F contingentem; centroq; O interuallo F O circulus describatur; continget ille [g] parabolam, & N F lineam in F: tum parabola describatur, [h] quæ ex descripto iam circulo K F P, oritur; hæc quoque continget circulum K F P & N F, lineam in F, vt in priori propositione ostensum est; vertex igitur eiusdem est in M, cùm M C, C N lineæ æquales sint: ergo parabolæ illæ duæ communem habent verticem M, & punctum F; vna igitur eademque sunt parabola, quæ per vtrumque circulum est descripta: ergo circulus K F P parabolam priori praxi descriptam producit: atque ita eadem parabola eâdem praxi in infinitum continuabitur. Quod erat propositum.

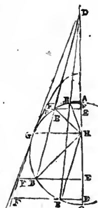
e 301. huius.
f Ex 17. huius.
g 131. huius.
h Ex 301. huius.

P R O-

PROPOSITIO CCCIII.

Esto circuli A B C diameter A C, vtcunque producta in D, ex quo in circulum immittantur lineæ D B; aganturq; ad A C per B normales F E proportionales ipsis D B, quarum termini sint F F.

Dico F F puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

Dvcatur ex D linea D G, contingens circulum in G, & ex G, ponatur G H normalis ad A C, iungunturque H B, igitur D B [a] ad D B est vt B H ad B H. sed B H translatæ in F E, producant [b] parabolam, igitur & ipsis D B, id est B H, proportionales in eundem locum translatæ, producunt quoque parabolam.

a Ex 35. & 36 lib. nostri de circulo.
b 301. huius.

PROPOSITIO CCCIV.

Assumptum sit in A B C circuli diametro A C, punctum quodcunque D, extra centrum. radio autem D C, quadrans describatur circuli C E F, perficiaturque quadratum F D C. tum ex D rectæ ducantur quotcunque D E, occurrentes circulo A B C in H, & C E F quadranti in E: & per H agantur normales I K ad A C, fiantq; H E lineis, æquales L I.

Dico L, L puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



Qvoniam F D C quadratum est, & D, centrum circuli C E F, rectæ D E, lineis I K æquales sunt: ponuntur autem ipsis H E, æquales L I, reliquæ igitur L K, reliquis H D æquales sunt. sed H D translatæ [c] in K L ad parabolam sunt; igitur L, L puncta iam quoque sunt ad parabolam.

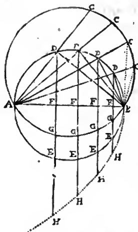
c 301. huius.

Corollarium.

Porro vertex huius parabolæ sic inuenitur. erecta ex D normali D B, per B agatur contingens B M: dein M D diuidatur bifariam in N: patet N [d] esse verticem parabolæ.

d Ex 17. huius.

PROPOSITIO CCCV.



INterſecent ſeſe in A & B, circuli duo quiuis A B C, A D B: ductiſque ex A lineis, A D C, demittantur ex D rectæ D E F orthogonaliter ſecantes A B diametrum in F F. fiat autem vt D C ad D C, ſic F H ad F H.

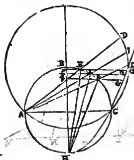
Dico B, H, H puncta eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

IVngantur D B, C B: erunt igitur triangula D C B ſimilia: quare vt D C ad D C, ſic D B ad D B; ſed D B tranſlatæ in [a] F H producunt parabolam, igitur & D C tranſlatæ in F H, ſectionem producunt parabolicam.

a 300. huius.

PROPOSITIO CCCVI.



OCcurrant ſibi inuicem circuli duo A B C, A C D in A & C, & A B C quidem circulus tranſeat per centrum circuli A C D, ducanturq; ex A rectæ A E D, occurrentes circulo A B C in E, & A C D in D: ponantur autem per E E ad H B, normales F G, quæ æquales vel proportionales ſint lineis A D.

Dico puncta G, G eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

DVcta A C, ponatur B H diameter, normalis ad diametrum A C, iunganturq; puncta H E. erit igitur A D ad A D lineam, [b] vt H E ad H E, ſed vt A D ad A D, ſic F G eſt ad F G per hypotheſim: igitur & F G eſt ad F G, vt H E ad H E: ſed H E tranſlatæ in F E G producunt [c] parabolam, igitur & A D tranſlatæ in F E G parabolam producunt.

b 13. De circulo.

c 308. huius.

Corollarium.

APex verò inuentæ parabolæ G G, eſt punctum H: nam F G quadratum eſt ad quadratum F G vt H E quadratum, ad quadratum H E, id eſt vt F H linea ad lineam F H. vnde H, vertex eſt parabolæ.

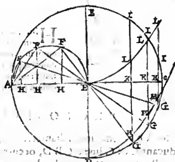
PRO-

PROPOSITIO CCCVII.

Circulum ABC, orthogonaliter in E diuidant diametri duæ AC, BD: descriptoq; super AE vt diametro, semicirculo AFE, agantur per E rectæ quotcunque FG, & ex F & G, lineæ demittantur FH, GI normales ad diametrum AC, quam GI secent in K. fiat autem vt AH ad AH, sic KM ad KM, incipiendo ex parte versus C, item vt EH ad FH, sic KL ad KL incipiendo ex parte E.

Dico puncta D,M,M, item E,L,L esse ad parabolas.

Demonstratio.



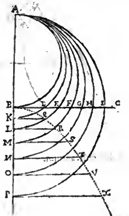
IVngantur AF: Quoniam FH, GK æquidistant, triangula FHE, EKG sunt similia; est autem & FHE triangulum simile triangulo AFE; igitur & AFE, EKG triangula similia sunt.quia verò AE æqualis est EG, triangula AFE æqualia sunt triangulis EGK, & AF,FE latera, æqualia lateribus GK, KE: vnde vt AF quadratum ad quadratum AF, id est GK quadratum ad quadratum GK, sic AH lineа ad lineam AH, id est per hypothesim KM ad KM. sed est vt GK quadratum ad quadratum GK, sic AKC rectangulum ad rectangulum AKC: igitur vt AKC rectangulum ad rectangulum AKC, sic MK linea est ad lineam MK: a quare D,M,M puncta ad parabolam sunt. Quod erat primum. a Ex conuersa 47. huius.

Rursum cùm sit vt EH ad EH, sic LK ad LK, sit autem vt EH ad EH, sic EF quadratum ad quadratum EF, id est EK quadratum ad quadratum EK: erit & LK linea ad lineam LK, vt EK quadratum ad quadratum EK: vnde ELL b puncta sunt ad parabolam. b 191. huius

PROPOSITIO CCCVIII.

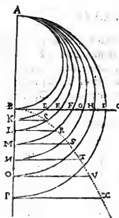
Sint ad AB diametralem quotcunque descripti circuli contingentes sese in eodem puncto A, quorum diametri AB,AK,AL, AM, &c. ductaq; ex B linea BC, contingat circulum minimum in B, reliquos autem secet in D, E, F, G, H. fiant autem lineis BD, BE, BF, BG, &c. æquales rectæ KQ, LR, MS, NT, &c. quæ circulos contingant in LMNO, &c.

Dico B, Q, R, S, T, V puncta esse ad parabolam cuius AB, latus rectum.



Demonstratio.

QVoniam BD normalis est ad communem diametralem AB, quadratum BD, & ad quadratum BE vt ABK rectangulum ad rectangu-



lum A B L, id eſt (quia circuli contingunt ſeſe in A) vt B K linea eſt ad lineam B L. igitur & quadratum K Q eſt ad quadratum L R, vt B K linea ad lineam L B; (cùm L R, K Q lineæ æquales ſint B D, B E) eodem modo oſtenditur M S quadratum eſſe ad quadratum N T, vt B M linea eſt ad lineam B N, & ſic de cæteris: puncta igitur B, Q, R, S, T, &c. ſunt ad parabolam. A B ergo latus rectum eſſe patet; cum ſemper quadrata D K, R K, &c. æqualia ſint rectangulis ſuper K B, B A, L B, B A, &c.

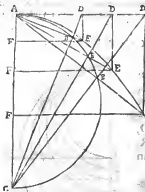
Corollarium.

Hinc facilis patet praxis, producendi in infinitum parabolam, priori methodo ortam: cùm enim in infinitum multiplicari poſſint circuli illi contingentes, & B C lineæ protendi, poterit quoque in infinitum continuari praxis qua priùs parabolam produxi; adeoq; eadem poterit in infinitum extendi.

PROPOSITIO CCCIX.

Esto A B C ſemicirculi diameter A C, actaq; per A contingente A D, ducantur ex C lineæ C B D, occurrentes contingenti in D, ſemicirculo in B: dein ex D normales demittantur D E quas in E ſecent lineæ B, A E.

Dico puncta A, E, E eſſe ad parabolam cuius latus rectum A C.



Demonſtratio.

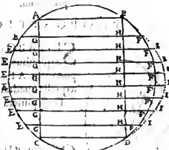
Ponantur enim E F æquidiſtantes A D. quoniam A D contingens tranſit per A extremum diametri A C, angulus C A D rectus eſt: ſed & angulus quoque A B C in ſemicirculo rectus eſt, triangula igitur A B D, A D C ſimilia ſunt: quia verò E D, normalis eſt ad A D, & D B normalis ad A E, triangula A D B ad A D E, ſimilia quoque ſunt. ſed A D B ſimile eſt triangulo C A D, triangula igitur A D E, A D C ſimilia quoque ſunt. quare E D ad D A, vt D A ad A C: adeoque quadrato A D id eſt F E æquale rectangulum E D A C id eſt F A C. vnde F E quadratum eſt ad quadratum F E vt F A C rectangulum ad rectangulum F A C, id eſt vt F A linea ad lineam F A, puncta igitur A, E, E ſunt ad parabolam. A C verò latus rectum eſſe patet ex demonſtrandum.

PROPOSITIO CCCX.

Esto circulo ABC inscriptum rectangulum ABCD, & vni laterum AB, ductæ parallelæ EGHF: fiant autem GH, HF, FI proportionales.

Dico puncta B, I, D esse ad parabolam.

Demonstratio.



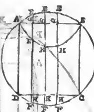
QVoniam est vt GH ad HF, sic HF ad FI, erit componendo inuertendo vt GF, id est EH, ad GH, sic HI ad HF; rectangulo igitur EGF, id est EHF, æquale est rectangulum GHI: & GHI rectangulum ad rectangulum GHI, vt EHF rectangulum ad rectangulum EHF, id est BHD ad BHD, rectangulum; sed GHI rectangulum est ad rectangulum GHI vt HI linea ad lineam HI: igitur vt BHD rectangulum ad rectangulum BHD, sic HI linea ad lineam HI. puncta igitur BID ad parabolam sunt.

PROPOSITIO CCCXI.

INscriptum sit circulo ABC rectangulum ABCD, ductisque vni laterum DA parallelis EGHF. fiant EGF rectangulis æqualia rectangula HGK.

Dico puncta AKB esse ad parabolam.

Demonstratio.

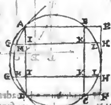


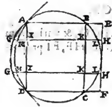
VT EGF rectangulum est ad rectangulum EGF, sic AGB rectangulum est ad rectangulum AGB: igitur & HGK rectangulum est ad rectangulum HGK vt AGB ad AGB, rectangulum. sed HGK rectangulum est ad rectangulum HGK vt GK linea ad lineam GK; igitur & AGB rectangulum est ad rectangulum AGB, vt GK linea ad lineam GK; puncta igitur AKB ad parabolam sunt. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO CCCXII.

INscriptum sit iterum rectangulum ABCD, circulo ABC, ductaq; lateri BC parallela EF, quæ circulum contingat, ponantur rectæ GH, æquidistantes lateri AB: fiantque GIL rectangulis, æqualia rectangula HIM.

Dico A, M, D puncta esse ad parabolam.



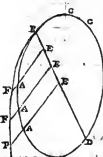


Demonstratio.

CVm æqualia sint rectangula HIM, rectangulis GIL, HIM rectangulum ad HIM rectangulum est vt GIL ad GIL, id est AID rectangulum ad rectangulum AID: sed HIM rectangulum est ad rectangulum HIM, vt IM linea ad lineam IM, igitur vt AID rectangulum ad rectangulum AID, sic IM linea ad lineam IM. puncta igitur M,M [a] sunt ad parabolam.

a Ex 47. huius.

PROPOSITIO CCCXIII.



SIt in ABC ellipsi vna ex diametris coniugatis æqualibus, diameter BD, ad quam ordinatim ponantur AE. fiant autem quadratis AE, EB æqualia quadrata EF.

Dico puncta B,F,F esse ad parabolam.

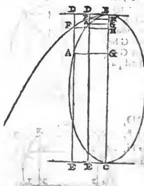
Demonstratio.

QVoniam BD vna est è diametris coniugatis æqualibus, quadrata AE æqualia sunt [b] rectangulis BED: addito igitur quadrato BE, quadrata duo AE, EB æqualia sunt rectangulis EBD. igitur FE quadratum est ad quadratum FE, vt EBD rectangulum ad rectangulum EBD; id est vt EB linea ad lineam EB. igitur B,F,F puncta sunt ad parabolam.

b 176. De ellipsi.

Circulo quoque conuenit hac propositio, eademq́ est demonstratio.

PROPOSITIO CCCXIV.



ESto ABC ellipseos diameter BC, quam in B & C, contingant rectæ DB, EC: positisque DE parallelis diametro BC. fiant DAE rectangulis æqualia rectangula EDF.

Dico B,F,F puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

DVcantur AG, FH parallelæ DB, patet AG ordinatim esse positas ad BC. igitur DAE rectangulum est ad rectangulum DAE, id est BGC ad BGC, vt AG, quadratum ad quadratum AG, id est FH quadratum ad quadratum FH: igitur & FDE rectangulum est ad rectangulum FDE, id est HBC ad HBC rectangulum, vt FH quadratum ad quadratum FH, sed HBC rectangulum est ad rectangulum HBC, vt HB linea ad lineam HB, igitur vt FH quadratum ad quadratum FH, sic HB linea ad lineam HB. puncta igitur B,F,F puncta ad eandem sunt parabolam.

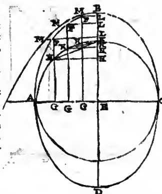
PRO-

PROPOSITIO CCCXV.

Sint A B C ellipseos axes A C, B D; & super A C minore axe, vt diametro, descriptus sit circulus A K C, quem in H secent lineæ F G, parallelæ axi B D: iunctisque punctis H K, ponantur F L normales ad axem B D, fiantque F, L M æquales H K.

Dico B, M, M puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



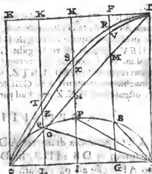
Ponantur H N, parallelæ F L: & E centrum, sit commune circulo & ellipsi; erit igitur vt B E ad K E, sic F G ad H G, id est L E ad N E, & permutando vt B E ad L E, sic K E ad N E; quare & K E ad N K, est vt B E ad L B, & permutando vt B E ad K E, sic B L ad K N, & B L est ad B L, vt K N ad K N: sed est vt K N ad K N, sic H K quadratum ad quadratum H K, id est per hypothesim vt M L quadratum ad quadratum M L; igitur vt B L linea ad lineam B L, sic M L quadratum ad quadratum M L. quare B, M, M puncta sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXVI.

Super A B C ellipseos axe A C quadratum constituatur A E, cuius diameter C D occurrat rectis F G, H I, L K lateri A B parallelis, in M, N, O. fiat autem A G quadrato, æquale rectangulum G F R, & A I quadrato æquale rectangulum S H I, dein & quadrato A L æquale rectangulum T K L.

Dico D, R, S, T puncta esse ad parabolam.

Assumitur in propositione ellipsis, ob sequentes propositiones.



Demonstratio.

Rectangulum R F G est ad rectangulum S H I vt R F ad S H; & S H I rectangulum est ad rectangulum T K L vt S H linea ad lineam T K: igitur & quadrata A G, A I, A L, id est D F, D H, D K, eam inter se continent rationem, quam sectæ R F, S H, T K. quare D, R, S, T puncta ᵃad parabolam sunt. ᵃ 292. huius

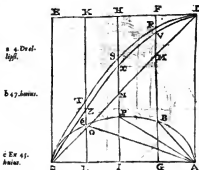
PRO-

PROPOSITIO CCCXVII.

Iisdem positis: fiant BG, PI, QL quadratis, æqualia rectangula GFRV, HISX, KLTZ.

Dico puncta D, X, V, Z. esse ad parabolam.

Demonstratio.



Rectangulum GFRV ad rectangulum HISX est vt RV linea ad lineam SX: igitur & quadratum GB est ad quadratum PI, vt RV linea ad lineam SX: sed vt BG quadratum ad quadratum PI, sic AGC rectangulum est ad [a] rectangulum AIC, igitur vt RV ad SX lineam, sic AGC rectangulum ad rectangulum AIC, id est DMC rectangulum ad rectangulum DNC, id est MR [b] linea ad lineam SN, quia RST ostensa est parabola, igitur & MV est ad XN, vt DMC rectangulum ad rectangulum DNC. similiter ostendam esse XN ad ZO, vt DNC rectangulum ad rectangulum DOC; puncta [c] igitur V, X, Z ad parabolam sunt.

[a] 4. De ellipsi.

[b] 47. huius.

[c] Ex 45. huius.

PROPOSITIO CCCXVIII.

Iisdem positis: iungantur AB, AP, AQ: fiantq; rectangula GFV, IHX, LKZ æqualia quadratis AB, AP, AQ.

Dico V, X, Z puncta rursum esse ad parabolam.

Demonstratio.

Quoniam BG, PI, QL, normales sunt ad AC, quadratum AB æquale est quadratis AG, GB: sed GB quadratum æquale positum est rectangulo GFRV, & AG quadratum æquale rectangulo GFR: igitur quadratum AB id est rectangulum GFV, æquale est rectangulis GFR, GFRV: similiter ostenditur rectangulum IHX, æquale esse rectangulis IHS, IHSX; & LKZ rectangulum æquari rectangulis LKT, LKTZ. sed cum GFR, GFRV rectangula æqualia ponebantur quadratis AG, GB; & IHS, IHSX, æqualia quadratis AI, IP, &c. ostensa sunt V, X, Z esse [d] ad parabolam; igitur & iam ad parabolam sunt.

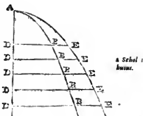
[d] 316. & 317. huius.

PROPOSITIO CCCXIX.

Sit ABC parabolæ diameter AD: & ordinatim ad illam positæ DB: fiat autem vt DB ad DB, sic DE ad DE.

Dico AEE esse ad parabolam.

Demon-



Demonstratio.

EST enim ED quadratum ad quadratum ED vt DB quadratum ad quadratum DB ex hypothesi, id est vt AD linea ad lineam AD; puncta igitur E, E ad [a] parabolam sunt.

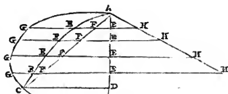
a Schol. 1. huius.

PROPOSITIO CCCXX.

SIt ABC parabolæ diameter AD, & ordinatim positæ CD, BE: ductaq; linea AC quæ BE rectis occurrat in FF, fiat vt FB ad FB, sic BG ad BG.

Dico G, G puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



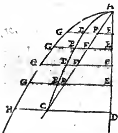
Fiat vt BF ad BG, sic FE ad EH: quoniam est vt FB ad FB, ita BG ad BG, erit permutando vt FB ad BG, sic FB ad BG: sed per construct. FE est ad EH, vt FB ad BG, ergo FE est ad EH, vt FE ad EH; igitur cùm puncta EE in directum sint, puncta quoque HH in directum sunt, vt patet ex elementis: deinde quia est vt FB ad BG, sic FE ad EH, erit componendo, conuertendo GF ad BF, vt FH ad FE, & permutando GF ad FH, vt BF ad EF, & componendo GH ad FH, vt BE ad FE, iterumque permutando GH ad BE, vt FH ad FE, sed cùm antè ostenderim esse FE ad EH, vt FE est ad EH: erit quoque vt FH ad FE, sic FH ad FE, ergo vt GH ad BE, sic GH ad BE, & permutando GH ad GH, vt BE ad BE: igitur & quadratum GH ad GH quadratum est, vt quadratum BE ad quadratum BE, hoc est vt EA ad EA, hoc est, vt AH ad AH, puncta igitur GG ad parabolam sunt, cuius diameter AH.

PROPOSITIO CCCXXI.

POnantur eadem quæ priùs, & fiant FE lineis æquales rectæ BG.

Dico iterum A, G, G esse ad parabolam.

Demonstratio.



CVm enim FE lineis æquales ponantur GB, additis communibus BF, rectæ FG æquales sunt FE, & FG quadrata æqualia quadratis BE: igitur quadratum FG ad quadratum FG est vt BE quadratum ad quadratum BE, id est vt AE linea ad lineam AE, id est AF ad AF.

 puncta

puncta igitur A, G, G ad parabolam sunt, cuius diameter AFC.

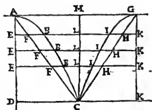
Si verò FG lineæ proportionales sint ipsis FE, ostenditur vt in præcedenti propositione, A, G, G esse ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXII.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in D linea AG: ponantur autem ordinatim lineæ BE, CD; iunctaque AC occurrat BE lineis in F. dein ductâ quacunq; CG ad AG, contingentem, quæ BE lineas productas secet in HH: fiat vt FB ad FB: sic HI ad HI.

Dico puncta I, I esse ad parabolam.

Demonstratio.



Fiant HI ad HK, vt BF ad FE: patet ex elementis GKK esse in directum: erit igitur HK ad HK, vt FE ad FE: & cùm sit IH ad HK, vt BF ad FE, erit componendo vt BE ad FE, sic IK ad HK, & vt BE ad BE, sic IK ad IK: vnde quadratum IK est ad quadratum IK, vt BE quadratum est ad quadratum BE, id est vt AE linea ad lineam AE, id est vt GK ad GK. puncta igitur G, I, I sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXIII.

EAdem manente figura: perficiatur parallelogrammum ADC, & MC, latus occurrat lineis EB in L: fiat autem vt LB ad LB, sic LI ad LI.

Dico puncta I, I esse ad parabolam.

Demonstratio.

Fiat AM ad MG, vt LB ad LI, & recta ducatur GC occurrens BI, lineis in HH. erit igitur vt LF ad LF, sic LH ad LH. sed ex hypothesi est LI ad LI, vt LB ad LB, igitur & HI est ad HI, residuum vt FB ad FB, residuum. vnde per præcedentem puncta I, I sunt ad parabolam.

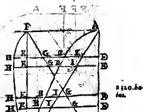
PRO-

PROPOSITIO CCCXXIV.

Esto ABC parabolæ diameter AD, ad quam ordinatim ponantur CD, BE: perfectoque parallelogrammo DF, ducatur linea FD, secans EB rectas in GG: fiant autem GE lineis æquales G, BH.

Dico HH puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



Iungantur AC: quoniam DF parallelogrammum est cuius diametri AC, FD, & KE lineæ æquidistant lateri AF, lineis EG æquales sunt rectæ KI; igitur & HB lineis æquales sunt KI. demptis igitur communibus KB, manent IB, HK lineæ æquales: puncta igitur HH a ad parabolam sunt.

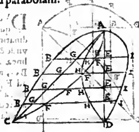
a 320. huius.

PROPOSITIO CCCXXV.

Esto ABC parabolæ diameter AD, ad quam ordinatim ponantur lineæ CD, BE, quas in G secet recta AC, descripta dein per A & C, parabolâ CFA quam in A recta contingat AD, & FB diameter sit, fiant FG lineis proportionales EH, & rectis BG proportionales EI.

Dico tam H,H puncta quàm I,I esse ad parabolam.

Demonstratio.



Est enim vt AGC rectangulum ad rectangulum AGC, sic AED rectangulum ad rectangulum AED: sed vt AGC rectangulum est ad rectangulum AGC, sic FG linea est ad b lineam FG, id est EH linea ad lineam EH: igitur & HE est ad HE, vt AED rectangulum ad rectangulum AED: similiter ostenditur, esse EI ad EI, vt AED rectangulum ad rectangulum AED: puncta igitur H,H vti & I,I, c puncta ad parabolas sunt.

b 47. huius.

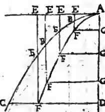
c 320. huius.

PROPOSITIO CCCXXVI.

Parabolam ABC contingat in A linea AE: ponatur autem sectionis diameter AD, & illi parallelæ EB: dein rectis EB proportionales fiant lineæ BF.

Dico A,F,F puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



Ducantur FG parallelæ contingenti AE: cùm igitur sit vt EB ad EB, sic BF ad BF, erit quoque EF ad EF, vt EB ad EB: sed ratio EB ad EB, duplicata est rationis EA ad EA, id est FG ad FG: igitur & ratio EF ad EF, id est AG ad AG, duplicata est rationis GF ad GF: igitur A,F,F puncta sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXVII.

Esto ABC parabolæ diameter AD: actaq; per A contingente AE, demittantur diametri FB occurrentes parabolæ in B, & AC in G: ponantur autem ordinatim lineæ HB: fiatq; vt FG ad FG, sic B, HI ad B, HI.

Dico puncta A,I,I esse ad parabolam.

Demonstratio.

VT FG ad FG, sic AF est ad AF, id est HB ad HB: igitur & HI est ad HI, vt BH ad BH: & HI quadratum ad quadratum HI, vt HB quadratū ad quadratum HB id est vt AH linea ad lineam AH: puncta igitur A,I,I ad parabolam sunt.

PROPOSITIO CCCXXVIII.

Sit ABC parabolæ diameter AD æqualis lateri recto: ductaque ordinatim CD perficiatur quadratum CA: sumptisque in peripheria punctis B,B, erigantur ex B diametri BF occurrentes AE lineæ in G; fiantque rectis AG æquales lineæ BF.

Dico A,F,E puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

DVcatur recta AC occurrens FB lineis in HH: quoniam AD lateri recto æqualis est, & CD ordinatim posita ad AD, rectæ AD, CD, æquales sunt: vnde & rectæ AG, GH quoque æquales sunt: & HG lineæ æquales ipsis FB: demptis igitur communibus BG, manent HB, FG lineæ æquales. quare FG est ad FG, vt BH ad BH; id est vt AHC [a] rectangulum ad rectangulum AHC, id est AGE rectangulum ad rectangulum AGE. puncta igitur A,F,E ad parabolam sunt.

a 47. huius.

PROPOSITIO CCCXXIX.

PArabolam ABC subtendat recta AC, quam in D secent quotcunque diametri BD: fiant autem BD lineis proportionales DE.

Dico puncta A,E,C esse ad parabolam.

Demonstratio.

VT BD ad BD, sic ED est ad ED, sed est vt BD ad BD, sic ADC [b] rectangulum ad rectangulum ADC: igitur & ED est ad ED, vt ADC rectangulum ad rectangulum ADC: quare AEC puncta [c] ad parabolam sunt.

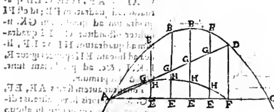
b Ibid.

c Ex conuersa 47. huius.

PROPOSITIO CCCXXX.

Parabolam ABC subtendant rectæ AC, AD, demissaque ex D diametro FD, quæ AC lineæ occurrat in F, ducantur quotuis rectæ BE æquidistantes DF secantes AD lineam in G G: fiantque rectis BG proportionales lineæ EH.

Dico puncta A,H,F esse ad parabolam.



Demonstratio.

VT AGD rectangulū est ad AGD rectangulum, a sic BG linea ad lineam BG: sed vt BG ad BG. sic EH ponitur ad lineam EH, igitur & EH est ad EH, vt AGD rectangulum ad rectangulum AGD, id est AEF rectangulum ad rectangulum AEF. quare A,H,F puncta b sunt ad parabolam.

a 47. huius

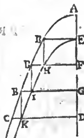
b Ex conuersa 47. huius.

PROPOSITIO CCCXXXI.

ESto ABC parabolæ diameter AD, diuisa in partes æquales, punctis E, F, G, D; ductisq; ordinatim lineis EB, FB, GB, DC, demittantur ex B punctis diametri BH, BI, BK, conuenientes cum ordinatim positis in H, I, K.

Dico E,H,I,K puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



QVoniam diametri partes AE, EF, FG, &c. ponuntur æquales, EF est ad EG, vt AE ad AF: id est vt EB quadratum ad quadratum FB, id est FH quadratum ad quadratum GI. eodem modo ostenditur esse vt EG ad ED, sic GI quadratum ad quadratum DK: puncta igitur E, H, I, K sunt ad parabolam. Quod erat demonstrandum.

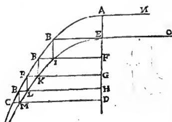
PROPOSITIO CCCXXXII.

ESto ABC parabolæ diameter AD, diuisa punctis E, F, G, H, D, vt AE, EF, FG, GH, &c. sint continuæ proportionales: ducantur autem ordinatim lineæ EB, FB, GB, &c. & ex B, diametri demittantur conuenientes cum ordinatim positis.

 Dico

Dico puncta E, I, K, &c. ad eandem esse parabolam: & si series continuarum AE, EF, FG, &c. maioris fuerit inæqualitatis; dico parabolas in aliquo puncto conuenire, si verò minoris fuerit inæqualitatis dico nusquam sectiones conuenire.

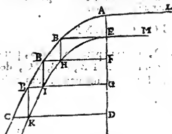
Demonstratio.



Quoniam AE, EF, FG, &c. proportionales sunt, EF est ad EG, vt AE ad AF; id est vt EB quadratum ad quadratum FB; id est FI quadratum ad quadratum GK. similiter ostenditur esse FI quadratum ad quadratum HL vt EF, linea ad lineam EH: puncta igitur E, I, K, L, &c. ad parabolam sunt. Quod erat primum.

Ponantur autem series AE, EF, FG, &c. maioris inæqualitatis: dico parabolas conuenire in aliquo puncto. sit enim ABC parabolæ latus rectum AN, & EIK parabolæ latus rectum EO: erit igitur quadrato EB æquale rectangulum EAN, & FI quadrato æquale rectangulum FEO: vnde cum EB, FI quadrata æqualia sint, rectangula quoque EAN, FEO sunt æqualia: quare cùm AE maior ponatur EF, erit AN latus rectum minus latere recto EO: adeoque parabolæ in aliquo puncto [a] conuenient.

[a] 167. huius.



Sit iam AE, EF, FG, &c. terminorum continuatio minoris inæqualitatis: dico parabolas nusquam sibi occurrere: ponatur enim LA latus rectum parabolę ABC, & ME, latus rectum parabolæ EHI, quia igitur EB, FH quadrata æqualia sunt, rectangula quoque LAE, MEF æqualia sunt: & cùm AE minor ponatur EF, erit LA maior quàm ME. vnde nusquam [b] conuenient sectiones.

[b] 166. huius.

PROPOSITIO CCCXXXIII.



Esto ABC parabolæ axis AD, in quo sumptæ cuiuis parti AD, demittantur æquales diametri BE.

Dico D, E, E puncta esse ad parabolam æqualem parabolæ ABC.

Demonstratio.

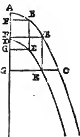
Ductis ordinatim BF, ponantur EG, parallelæ. Quoniam igitur AD lineæ, æqualis est BE id est FG, dempta vel addita communi FD, rectę AF æqualis est DG. vnde DG est ad DG, vt AF ad AF, id est vt FB quadratum ad quadratum FB, id est EG quadratum ad quadratum EG. puncta igitur D, E, E, ad parabolam sunt, quia verò tam AF, DG, quàm

quàm FB, GE lineæ inter se æquales sunt, adeoque FB quadratum æquale quadrato GE, latera quoque recta axium AD, DG æqualia sunt, vnde & [a] parabolæ æquales. [a Per defin. 6.]

PROPOSITIO CCCXXXIV.

Iisdem positis:
Dico parabolas illas nusquam conuenire.

Demonstratio.



POnatur in parabola DEE ordinatím ad axem DG, linea GE occurrens ABC parabolę in C. quoniam igitur latera recta vtriusque parabolæ æqualia sunt, & DG linea minor AG, rectangulum quoque sub DG & latere illius recto minus est rectangulo sub AG & latere recto. igitur & EG quadratum minus est quadrato CG : & C punctum cadit intra parabolam ABC: idem cùm de omnibus punctis eiusdem parabolæ ostendi possit, patet sectiones illas nusquam conuenire.

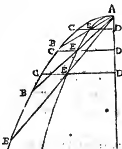
Vocentur autem sectiones eiusmodi, parabolę parallelæ, siue asymptotiæ: quarum proprietates reliquas, & miram cum hyperbola inter asymptotos posita, symbolisationem, octauâ parte huius libri, exhibebimus.

PROPOSITIO CCCXXXV.

PArabolam ABC cuius diameter AD, secent ex A demissæ lineæ quotcunque AB: quæ proportionaliter diuidantur in E.

Dico puncta A,E,E esse ad parabolam.

Demonstratio.



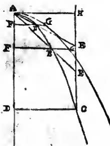
DVcantur per E lineæ DC, ordinatim ad diametrum AD: erunt igitur DC lineę [b] proportionaliter quoque in E diuisæ: & vt DC ad DC, sic DE ad DE. puncta igitur A,E,E [c] ad parabolam sunt. [b 78. huius.] [c 319. huius.]

PROPOSITIO CCCXXXVI.

ESto ABC parabolę diameter AD ad quam ordinatim ponatur DC; demittâtur autem ex A lineæ AB, occurrentes CE diametro in E; quam & acta per A contingens, secet in H. dein per B, ordinatim ductis FB, fiat vt HE ad HE, sic FG ad FG.

Dico AG, esse ad parabolam.

Demonstratio.

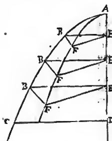


QVoniam tam FB, AH quàm FA, HE parallelæ sunt, similia sunt triangula AFB, AHE; quare vt HE ad HE, sic FB ad FB: sed vt HE ad HE, sic FG ponitur ad FG, igitur est FG ad FG, vt FB ad FB, vnde [d] puncta A,G,G ad parabolam sunt. [d 319. huius.]

PROPOSITIO CCCXXXVII.

Esto ABC parabolæ diameter AD, ad quam ordinatim ponantur lineæ BE; ducantur autem ex B lineæ BF, inter se parallelæ, & proportionales lineis EB.

Dico puncta A,F,F esse ad parabolam.

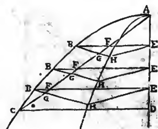


Demonstratio.

Iungantur EF: Quoniam tam FB lineæ inter se, quàm EB æquidistant, anguli EBF æquales sunt: vnde cùm proportionalia sint latera EB,BF, æquales angulos continentia, triangula quoque EBF inter se similia sunt: adeoque & EF lineæ æquidistantes sunt ad inuicem; & EB lineis proportionales: quadratum igitur EF est ad quadratum EF, vt EB quadratum ad quadratum EB, id est vt AE linea ad lineam AE: vnde puncta A,F,F sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXXVIII.

Esto ABC parabolæ diameter AD, & ordinatim ad illam positæ CD, BE: & EB quidem iuncta AC, diuidat in F: ductis autem parallelis BG, quæ AC lineæ occurrant in G: fiat vt FB ad BG, sic EB ad BH.

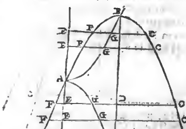


Dico AH puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

Iungantur enim EH: Quoniam EB,BH lineæ proportionales sunt, lineis FB, BG; & angulus FBG communis, triangulis FBG similia sunt triangula EBH: sunt autem & FBG triangula quoque similia, cùm tam FB lineæ inter se, quàm BG rectæ æquidistent: igitur & EBH triangula similia sunt. Quare vt EB ad EB, sic EH ad EH, adeoque per præcedentem puncta AH ad eandem sunt parabolam.

PROPOSITIO CCCXXXIX.



Esto ABC parabolæ axis BD, cui parallela ponatur AE, secans parabolam in A: ducantur autem ad axem ordinatim lineæ EC, & inter FE, EC mediæ ponantur EG.

Dico A,G,B puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

Est enim vt AE linea ad lineam AE, sic FEC rectangulum ad rectangulum FEC, igitur & EG quadratum est ad quadratum EG, vt AE linea ad lineam AE: quare A,G, G puncta ad parabolam sunt.

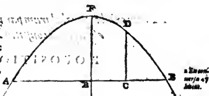
(144. huius)

PROPOSITIO CCCXL.

Datis rectis A B, C D se mutuo decussantibus, inuenire parabolam cuius D C data sit diameter.

Constructio & demonstratio.

Diuisa A B bifariam in E, ducatur E F parallela C D: fiatque vt A E B rectangulum ad rectangulum A C B, sic E F linea ad lineam D C: patet A, F, D, B puncta esse ad [a] parabolam quæsitam, cuius diameter est D C.



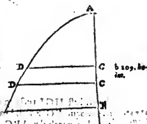
[a] Ex conuersa 47. huius.

PROPOSITIO CCCXLI.

Dato A B latere recto, exhibere illius parabolam.

Constructio & demonstratio.

Secetur A B vtcunque in C C, & ex C lineæ erigantur C D, vt C D quadrata æqualia sint rectangulis C A B singula singulis: patet A, D, D puncta [b] esse ad parabolam quæsitam.



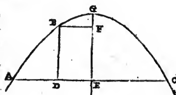
[b] 109. huius.

PROPOSITIO CCCXLII.

Datis tribus punctis A, B, C non in directum positis, & linea B D, quæ per aliquod ex datis punctis transeat, oportet parabolam describere per A, B, C puncta cuius aliqua sit diameter B D.

Constructio & demonstratio.

Iuncta A C secetur bifariam in E, ponaturque E F parallela B D, & B F rectæ A C: fiat autem, vt A E quadratum ad quadratum B F, sic E G linea ad lineam F G. describaturque per B, G, C parabola cuius diameter sit B D, patet illam quoque per [c] A transire. Igitur, &c. Quod erat faciendum.

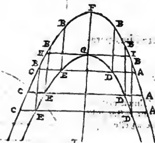


[c] Ex 1. huius.

PARABOLÆ
PARS OCTAVA

Miram exhibet parabolarum parallelarum, cum hyperbola inter asymptotos constituta, symbolisationem.

PROPOSITIO CCCXLIII.



Sit ABC parabolæ axis FG & ordinatim ad illũ applicata HGI: ductisq; HI, parallelis CA, quadrato HG æqualia fiant rectangula CEA, CDA.

Dico E, G, D puncta esse ad parabolam æqualem parabolæ ABC.

Demonstratio.

Erigantur ex D & E, diametri EB, DB: quoniam æquidistãt HI, CA, & HG quadrato id est HGI rectangulo æqualia sunt rectangula CEA, sive CDA, diametri[a] quoque FG, BE, BD æquales sunt: quare & [b] puncta E, G, D ad parabolam, æqualem parabolæ ABC.

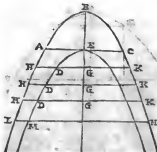
a Ex 47. huius.
b 133. huius.

PROPOSITIO CCCXLIV.

Eadem posita sint quæ priùs:

Dico parabolas illas in infinitum productas magis semper ad inuicem accedere, nusquam tamen occurrere.

Demonstratio.



Cum enim per præcedentem æquales sint parabolæ ABC, DEF, latera recta[c] quoque illarum æqualia sunt, quare nusquam,[d] in infinitum productæ concurrent[e]: quod verò magis semper ad inuicem accedant sic ostendo, ponantur ad BG diametrum in parabola ABC, ordinatim HK, LN: & LN quidem remotior sit à vertice B, quàm HK. æqualia igitur sunt rectangula HDK, LMN ex hypothesi. quare HD est ad LM, vt MN ad DK; sed MN maior est DK, quia LN, maior est HK (vtpote remotior à vertice B,) recta igitur HD quoque maior est LM.

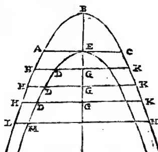
c Per defin.
d 334. huius.

Similiter si remotior quæuis à vertice B, parallela assumatur, ostendetur LM maiorem esse quauis sibi æquidistante infra se posita; magis igitur semper ad inuicem accedunt parabolæ ABC, DEF: asymptoticæ igitur sunt parabolæ ABC, DEF.

PRO-

PROPOSITIO CCCXLV.

EAdem positâ figurâ: propositum sit datæ parabolæ parallelam siue asymptoticam describere.

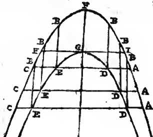


Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabola data: ponatur in illa diameter BE ad quam ordinatim applicetur AEC. positisque AC parallelis, HK: secentur HK in D & F, vt tam HDK quàm HFK, rectangula æqualia sint quadrato AE: constat ex antè demonstratis, DEF puncta esse ad parabolam parallelam parabolæ ABC. fecimus igitur quod fuit postulatum.

PROPOSITIO CCCXLVI.

ASsumptâ figurâ propositionis 343. sint ABC, DEG parabolę parallelæ seu asymptoticę, & quæuis ponantur æquidistantes ECDA. Dico rectangula CEA, inter se, vti & CDA rectangulis æquari.



Demonstratio.

ERigantur ex D & E diametri DB, EB; quoniam igitur parallelæ sunt diametri ABC, DGE, æquales sunt diametri BE, DB vti ex ipso ortu constat, sed quam rationem diametri DB, BE seruant, eandem quoque continent rectangula CEA, CDA; æqualia igitur sunt rectangula CEA inter se, vti & rectangulis CDA.

Corollarium.

EX dictis sequitur rectas CE, DA esse inter se æquales. demonstratio patet, cum CEA, CDA rectangula æqualia sint.

PROPOSITIO CCCXLVII.

PArallelarum parabolarum diametri omnes communes sunt.

Demonstratio.

ASsumatur figura propositionis 344. sint ABC, DEF parabolę parallelæ, & quæuis ponatur diameter BG in parabola ABC; sint autem ad illam applicatæ ordinatim HK, occurrentes parabolæ DEF in D & F. dico FD lineas in G bifariam diuidi: cùm enim HK per constructionem ordinatim ponantur ad BG, diametrum, rectæ HK in G bisectræ sunt; sunt autem æquales ostensæ, HD, a FK; residuæ igitur DG, GF quoque æquales sunt, adeoque ad BG ordinatim applicatæ. communis igitur est BG diameter vtrique parabolæ. a Per Coroll. 346. huius.

PROPOSITIO CCCXLVIII.

Contingens parabolis parallelis intercepta in contactu bissecatur.

Demonstratio.

POnatur per E punctum quodlibet in perimetro parabolæ DEF assumptum contingens AC; dico AC in E bissecari, posita per E, diametro BG, ponatur qualis DF, æquidistans AC; occurrens parabolæ ABC in H & K. quoniam igitur FD, æquidistat contingenti AC; recta FD in G, a bissecta est; sunt autem æquales HD, FK: tota igitur HK in G bissecta est: quare & AC b æquidistans HK, ab eadem diametro in E bissecatur.

a 15. huius. b Defin. 5. aut 4. huius.

PROPOSITIO CCCXLIX.

TRiangula quæ fiunt à contingentibus, parabolis parallelis interceptis, & diametris per contactuum puncta ductis, inter se æqualia sunt.

Demonstratio.

SInt ABC, HIK parabolæ parallelæ: & IHK parabolam contingant AC, DE, FG: ponantur autem per H, I, K, contactus diametri BH, LI, MK, intelliganturque iungi FMG, CBA, DLE: dico triangula FMG, CBA, DLE inter se esse æqualia: quoniam enim parabolæ parallelæ sunt, diametri LI, BH, MK æquales sunt: sunt autem AC, DE, FG contingentes in H, I, K c bifariam diuisæ; æqualia igitur sunt d triangula ABC, FMG, DLE.

c 348. huius. d 218. huius.

PROPOSITIO CCCL.

EAdem posita figura: sint in ABC parabola lineæ tres AC, DE, FG, æqualia auferentes segmenta: secentur autem AC, DE, FG bifariam in H, I, K.

Dico puncta H, I, K esse ad parabolam parallelam parabolæ ABC.

Demonstratio.

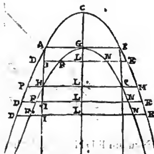
ERigantur ex H, I, K punctis diametri HB, MK, LI: quoniam æqualia sunt segmenta DAE, ABC, GMF, triangula quoque DLE, ABC, FMG, æqualia sunt: quare & diametri LI, BH, MK æquales sunt, & puncta H, I, K ad parabolam parallelam ABC.

PRO-

PROPOSITIO CCCLI.

SInt ABC, FHG parabolæ parallelæ, recta autem AB contingat in G parabolam FHG; ponanturque DE æquidistantes AB. Dico AG quadrato, æquari rectangula singula DFE.

Demonstratio.



POnatur AH æquidistans diametro CG, occurrensque FHG parabolę in H puncto per quod recta ponatur PHQ parallela AB: vt CG ad AH, sic AGB rectangulum id est quadratum AG, (est enim AB contingens in G bissecta) ad rectangulū, PHM: æquales autem [b] sunt diametri CG, AH, igitur & PHM rectangulum æquale est quadrato AG. sed PHM, DFE rectangula [c] æqualia sunt, quadrato igitur AG æqualia sunt rectangula singula DFE.

a 47. huius. b Ex 333. huius.

c 346. huius.

PROPOSITIO CCCLII.

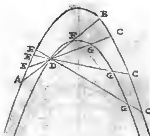
IIsdem positis, recta AH occurrat DE lineis in I. Dico DIE rectangula æquari quadratis FL.

Demonstratio.

QVoniam DE lineæ in L diuisæ sunt bifariam, & non bifariam in F, quadrata LD ęqualia sunt quadratis LF vnà cum rectangulis DFE: eadem de causa quadrata LD æqualia sunt quadratis LI vnà cum rectangulis DIE, rectangula igitur DFE vnà cum quadratis FL æqualia sunt quadratis LI simul cum rectangulis DIE: æqualia autem ostēnsa sunt [d] rectangula DFE, quadratis LI id est AG, residua igitur rectangula DIE residuis quadratis FL æqualia sunt.

d 351. huius.

PROPOSITIO CCCLIII.



INtra parabolam ABC assumpto quouis puncto D ponantur per D lineæ quotcunque AB, EC: fiant autem AD, ED lineis æquales BF, CG.

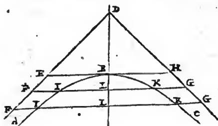
Dico D, F, G puncta esse ad parabolam parallelam parabolæ ABC.

DEmonstratio manifesta est ex Coroll. huius, vbi demonstratū est positis parabolis parallelis ABC, DFG rectas ED, GC, item AD, FB esse inter se æquales.

Applicatio parabolarum parallelarum ad hyperbolam inter asymptotos positarum.

Applicatio propositionis 343. *huius.*

PROPOSITIO CCCLIV.



ANgulum EDH subtendat linea EH, qua bifariam diuisa in B, ponantur EH, æquidistantes FG, quæ in I secentur, vt FIG rectangula, æqualia sint quadrato EB.

Dico BII ad eandem esse hyperbolam.

DEmonstratio habetur in libro nostro de hyperbola propositione 14.

Applicatio propositionis 344. *huius.*

PROPOSITIO CCCLV.

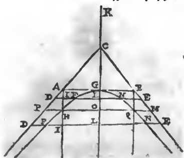
EAdem posita figura.

Dico ED, DH lineas in infinitum productas, magis semper ac magis ad hyperbolam accedere, nusquam autem conuenire.

DEmonstratio habetur in lib. nostro de hyperbola propos. 15.

Applicatio propositionum 346. 351. *huius.*

PROPOSITIO CCCLVI.



AB recta inter asymptotos AC, CB hyperbolæ FGN constituta in G vertice diametri KG diuisa sit bifariam, & AB quidem æquidistent DFE.

Dico DFA rectangula æquari inter se vti & rectangulis DNE, siue quadrato AG.

DEmonstrationem vide in lib. de hyperbola propos.

Corol-

Corollarium.

EX his quoque ſequitur, lineas DF, NE eſſe inter ſe æquales.

Applicatio propoſ. 352. huius.

PROPOSITIO CCCLVII.

IIſdem poſitis:
Dico DIE rectangula æquari quadratis LF.

DEmonſtrationem vid. lib. de hyp. prop. 17.

Applicatio propoſitionis 348.

PROPOSITIO CCCLVIII.

OMnis contingens hyperbolam & cum aſymptotis conueniens in puncto contactus bifariam ſecatur.

DEmonſtrationem vid. lib. de hyperb. 29.

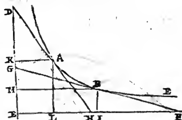
Applicatio propoſitionis 349. huius.

PROPOSITIO CCCLIX.

HYperbolam ABC inter aſymptotos ED, EF conſtitutam contingant duæ lineæ DAH, FBG quæ triangula conſtituant HED, FEG.

Dico illa eſſe inter ſe æqualia.

DEmonſtrationem vide in libro de hyperbola, parte ſecunda.

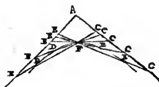


Applicatio propoſitionis 353. huius.

PROPOSITIO CCCLX.

INtra angulum BAC punctum aſſumatur quoduis F, per quod rectæ ponantur BFC, pertinentes ad vtrumque anguli latus in C & B: fiantq́; BF lineis æquales CE, & viciſſim CF æquales DB:

Dico puncta EFD eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſint BA, AC.



DEmonſtrationem vide in hyperbola parte, vltima.

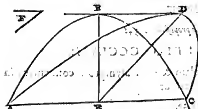
PRO-

PROPOSITIO CCCLXI.

Datæ parabolæ rectæ ABC, æqualem exhibere inclinatam, cuius ordinatim ad diametrum positæ datum angulum constituant.

Parabolam inclinatam voco, omnem parabolam quæ lineas habet ordinatim addiametros positas ad angulos obliquos: porro nullas dari parabolas ex natura sua inclinatas, ex sequenti propositione constabit.

Constructio & demonstratio.

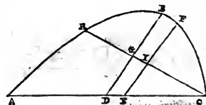


Sit ABC parabolæ axis BE, & ordinatim ad illum posita AC: positaque per B contingente, ducatur ad illam linea ED, quæ angulum EDB æqualem faciat dato F: & describatur parabola ADE, habens ED diametrum, dico illam satisfacere petitioni. cùm enim vtraque parabola, communem habeat subtensam AC, & eandem altitudinem, constat illas inter se esse æquales: quod autem ADE parabola sit inclinata, ex eo patet quod AC linea & illi æquidistantes, diametrum DE ad angulos secent obliquos.

PROPOSITIO CCCLXII.

Datæ parabolæ inclinatæ axem exhibere.

Constructio & demonstratio.



Sit ABC parabolæ inclinatæ diameter BD, & ad illam ordinatim posita AC: ducatur autem ex C linea CH normalis ad BD, diuisaque CH bifariam in I, ponatur per I recta IF æquidistans BD: dico IF axem esse parabolæ inclinatæ. cùm enim FE æquidistet BD diametro, recta FE quoque sectionis diameter est; quia verò lineam HC, bifariam & ad rectos secat angulos, constat FE a axem esse parabolæ ABC. exhibuimus igitur datæ parabolæ inclinatæ axem.

a 1. Defin. huius.

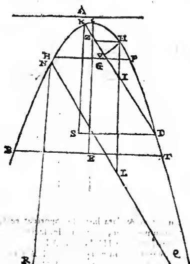
Hinc patet nullas prorsus inclinatas dari parabolas quæ diuersa sint natura à rectis: vtriq; enim essentialis illa & primaria passio communis, quòd ordinatim ad axem applicata, eundem ad angulos secent rectos. id quod etiam intelligi velim de hyperbola & ellipsi: similiter enim in omni sectione coni, siue hyperbola, siue ellipsis fuerit, ostenditur, ordinatim ad axes applicatas eosdem ad angulos rectos diuidere: vnde nullas omnino dari coni sectiones natura sua inclinatas, siue quæ diuersam à rectis habeant naturam constat.

PRO-

PROPOSITIO CCCLXIII.

IN data parabola diametrum assignate, cui data linea inseruiat pro latere recto, modò minor ea non existat latere recto axeos datæ parabolæ.

Constructio & demonstratio.



DAta sit linea A & parabola BCD. oporteat exhibere diametrum quæ latus rectum habeat æquale datæ lineæ A. factum sit quod petitur; & ML sit diameter, cui A linea inseruiat pro latere recto. Inueniatur CG axis[a] parabolę BCD, æqualis lateri recto: lineæ autem CG æqualis fiat MI, & ML, CE lineæ singulæ æquales rectæ A: ponanturque per L, & E, item G & I ordinatim ad diametros suas lineæ HP, KD, BT, NQ: quoniam igitur MI, CG lineæ æquales sunt, segmenta[b] KMD, HCP æquantur: posita igitur ex D, linea DS normali ad demissam ex K diametrum KS, rectę HP, SD[c] æquales sunt. similiter æquales ostendentur RQ, BT. Rursum cùm ML æqualis ponatur lateri suo recto A, & NL ordinatim ad ML, rectę NL, [d]ML æquales sunt. quia verò MI æqualis est CG, & CG data est vti & ML hoc est NL, recta quoque KI data est, cùm sit ML ad MI, vt NL quadratum ad quadratum KI: & quia datæ quoque sunt lineæ CG, CE adeoq; & HP, BT, rectæ quoque SD, RQ (quæ illis ostensæ sunt æquales) datæ sunt: igitur cùm anguli KSD, NRQ recti sint, data quoq; sunt triangula KSD, NSQ, & anguli SKD, RNQ id est KIM, NLM: componendo igitur datâ ML rectâ æquali A, & punctis diuisionum I & L; applicentur ad I & L, datæ lineæ KD, NQ in datis angulis KIM, NLM: rectæ autem KD, NQ bissectæ sint in I & L. tum per K, M, D, puncta parabola describatur: transibit illa per N & Q, cùm per resolutionem ostensum sit esse MI ad ML, vt KI quadratum ad quadratum NL: inueniatur deinde parabolæ KMD axis CG: & ML diameter transferatur in parabolam datam, ponaturque ab axe eiusdem, interuallo ZM normalis ad axem: patet per resolutionem, positione inuentam esse diametrum cui data A seruiat pro latere recto.

a 213. huius.
b 218. & 240. huius.
c 259. huius.
d 9. huius.

PROPOSITIO CCCLXIV.

DAtam lineam applicare ad parabolam, quæ segmentum auferat dato æquale. oportet autem lineam D, non minorem esse lineâ AC.

Constructio & demonstratio.

SIt ABC segmentum datum & data linea D: oporteat rectam D applicare ad parabolam, vt segmentum auferat, dato æquale: factum sit quod petitur, & IH linea æqualis D, segmentum auferat HFI, dato ABC æquale: bisecentur AC, HI in E & G, punctis, per quæ diametri ponantur EB, FG. quoniam igitur segmenta ABC, HFI æqualia sunt, rectę [a] BE, FG quoque sunt æquales; datæ igitur sunt BE & IG, dimidia HI siue D. fiant iam BE, IG, FK proportionales, data ergo etiam est FK: inueniatur igitur per præcedentem diameter, cuius FK latus rectum est & ponatur in parabola ABC, factaque FG æquali BE ponatur per G ordinatim linea HI: patet per resolutionem & constructionem, HI lineam rectę D, & HFI segmentum dato ABC æquale esse; datam igitur lineam, &c. Quod erat faciendum.

a 318. & 160. huius.

Scholion.

DEstinaueram duas alias Partes, quæ parabolam concernunt, præsenti libro adiungere; sed cùm aduertam librum hunc, quo Parabolicæ sectionis proprietates prosecuti sumus, in molem nimis magnam excrescere, quàm vt libris reliquis de coni sectionibus par sit, in alios libros eas partes transtuli; exigente id maximè argumento materiæ, quam tales libri explanare intendunt.

Pars autem prima symbolizationes ac similitudines complectitur, quæ sunt inter parabolam ac spiralem figuram; mira enim est inter has conformitas; neque à mea sententia recedere audeo, quæ mihi planè persuasum est Archimedem in eam notitiam peruenisse quam nobis reliquit, quæ per contingentem spiralis figuræ lineam rectam exhibet, quæ circuli circumferentiæ sit æqualis. habet præterea parabola multas alias proprietates, cum spirali Archimedæa communes, non solùm secundùm primam circulationem, sed secundùm quotcunque numero exhibitas; quas fusius considerare poteris suo loco.

Secunda pars quæ huc spectabat agit de parabolis virtualibus, quarum nomenclaturam desumpsi à proprietatibus illarum, quæ ita similes sunt proprietatibus verarum parabolarum, vt ab ijsdem non discrepent, nisi solo aspectu vt ita dicam; nam æquales sunt secundùm superficies

ries considerata, & secundùm ordinatim applicatas ad diametrum; in hoc tamen differunt, quod earum diametri lineæ sint parabolicæ; in parabolis autem quæ sectiones conicæ sunt, axes vel diametri rectæ sunt lineæ. Coniecimus autem tractatum huius materiæ in librum de ductibus planorum in plana, eò quod vsus virtualium parabolarum, spectet ad æquationes formandas cum corporibus, quæ partes Cylindricæ sunt, concauam habentes superficiem, vel conuexam. Sed de his plura suis locis.

Libri quinti finis.



Parabola pag. 249. e 250. – de duabus mediis proportionalibus pag. 250.



